

ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДИННАДЦАТЬЮ ПАРАМЕТРАМИ

We present nine conditions for the origin to be a centre for the system $x' = y(1 + Dx + Px^2) + Hx^2 + Qx^3$, $y' = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3$ and determine Darboux integrating factors.

Рассматривается система

$$\begin{aligned} x' &= y(1 + Dx + Px^2) + Hx^2 + Qx^3, \\ y' &= -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A, B, C, D, H, K, L, M, N, P, Q \in \mathbb{C}$. Для системы (1) в начале координат возникает проблема различения особой точки типа центр или фокус. Решение этой проблемы для различных классов кубических систем рассмотрено в [1]. Решение проблемы для системы (1) в случае $H = N = Q = 0$ изложено в [2]. Случай $D = H = P = Q = 0$ для системы (1) рассмотрен в [3, 4]. Достаточные условия центра при $H = Q = 0$ для (1) указаны в [5].

Рассмотрим проблему различения особой точки типа центр или фокус для системы (1). Существует формальный ряд $U = x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} q_{i,j} x^i y^j$, для которого в силу (1) $\dot{U} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i (x^2 + y^2)^{i+1}$, где g_i , $i=1, 2, \dots$, фокусные величины системы (1). Начало координат является центром тогда и только тогда, когда $g_i = 0$, $i = \overline{1, \infty}$ [6].

Введем вектор $p = (A, B, C, D, H, K, L, M, N, P, Q)$. Тогда фокусные величины $g_i, i = 1, 2, \dots$, являются полиномами кольца $\mathbb{C}[p]$. Образует идеал $J = \langle g_1, g_2, \dots \rangle \in \mathbb{C}[p]$. Многообразие $V(J) = \{p \in \mathbb{C}^{11} : \forall g \in J \ g(p) = 0\}$ будем называть *многообразием центра* системы (1). Особая точка $O(0,0)$ является центром тогда и только тогда, когда $p \in V(J)$ [7].

Исключим в (1) независимую переменную t и введем подстановку

$$y = \frac{Y - Hx^2 - Qx^3}{1 + Dx + Px^2}.$$

Получим уравнение вида

$$(1 + Dx + Px^2)^2 YY' = -x\alpha(x) + 3x\beta(x)Y + \gamma(x)Y^2 + NY^3, \quad (2)$$

где $\alpha(x) = Nx^5(H + Qx)^3 - x^3(C + Mx)(H + Qx)^2(1 + Dx + Px^2) + 3x^2(B + Lx)(H + Qx)(1 + Dx + Px^2)^2 + (1 - Ax - Kx^2)(1 + Dx + Px^2)^3$; $\beta(x) = Nx^3(H + Qx)^2 - x(2C + D + 2(M + P)x)(H + Qx) \times (1 + Dx + Px^2) / 3 + ((3B + 2H) / 3 + (L + Q)x)(1 + Dx + Px^2)^2$; $\gamma(x) = -3Nx^2(H + Qx) + (C + D + (M + 2P)x)(1 + Dx + Px^2)$.

Вторая замена

$$Y = \frac{y\alpha(x)}{1 + Dx + Px^2 + y\beta(x)}$$

приводит уравнение (2) к виду

$$(1 + Dx + Px^2)^3 \alpha(x) YY' = -x(1 + Dx + Px^2)^3 + (1 + Dx + Px^2)(3x\beta^2(x) + \alpha(x)\gamma(x) + \alpha(x) \times (D + 2Px)(1 + Dx + Px^2) - (1 + Dx + Px^2)^2 \alpha'(x))y^2 + (\alpha(x)\beta(x)\gamma(x) + \alpha^2(x)N + 2x\beta^3(x) - \beta^2(x)(1 + Dx + Px^2)^2(\alpha(x)/\beta(x))')y^3. \quad (3)$$

При этом имеют место соотношения $P_0(x) = \alpha(x)$, $(1 + Dx + Px^2)^2 P_2(x) = 3x\beta^2(x) + \alpha(x)\gamma(x) + \alpha(x)(D + 2Px)(1 + Dx + Px^2) - (1 + Dx + Px^2)^2 \alpha'(x)$, $(1 + Dx + Px^2)^3 P_3(x) = \alpha(x)\beta(x)\gamma(x) + \alpha^2(x)N + 2x\beta^3(x) - \beta^2(x)(1 + Dx + Px^2)^2(\alpha(x)/\beta(x))'$, где $P_0(x), P_2(x), P_3(x)$ – полиномы 8, 7, 11-й степеней соответственно.

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$P_0(x)yy' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3.$$

Следовательно, система (1) приводится к системе типа систем Лъенара

$$x' = yP_0(x), \quad y' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3, \quad (4)$$

где $P_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^8 c_i x^i$, $P_2(x) = \sum_{j=0}^7 a_j x^j$, $P_3(x) = \sum_{k=0}^{10} b_k x^k$; $a_j, b_k, c_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, 8}, j = \overline{0, 7}, k = \overline{0, 10}$.

Для приведенной системы (4) в случае центра справедливы равенства $P_3(x) = xQ(x)$, $Q'(x)P_0(x) + 3Q(x)P_2(x) = xR(x)$; $Q(x), R(x)$ – полиномы.

Введем следующие обозначения: $\delta = C - D$, $\sigma = 2C + D$, $v = 3B - H$, $\tau = 3B + 2H$, $\rho_1 = 188A^2 + 172AC + 27C^2$, $\rho_2 = 1140A^3 + 3292A^2C + 2506AC^2 + 821C^3$, $\rho_3 = 1160A^3 + 2180A^2C + 1430AC^2 + 387C^3$, $\rho_4 = 108A^2 + 100AC + 35C^2$.

Теорема. Пусть V – многообразие центра системы (1). Тогда

$$\bigcup_{i=1}^9 V(J_i) \subset V,$$

где $J_1 = \langle A\tau^2 + \sigma(\tau v + \delta\sigma), 9\delta\tau^3 K + (\tau v + \delta\sigma)((9B^2 - 6BH - 8H^2)(\delta\tau + 9N) + \delta((4C - D)\tau + 18N)\sigma), 9\tau^2 L + (9N - (C + 2D)\tau)(\tau v + \delta\sigma), \delta\tau((C + 2D)\delta - 9M) + 9N(3(C^2 - D^2) + 2\tau v), \delta\tau((C + 2D)\delta + 9P) - 9N(3C\delta + \tau v), 9N(\delta\sigma - 3\tau H) + \tau(3B(4D - C)H - 2(5C - 2D)H^2 + (9B^2 + (5C + D)\delta)\sigma) - 9\tau^2 Q, 1 - \delta\tau \rangle \cap \mathbb{C}[p]$;

$$J_2 = \langle 2H(36A^2 - 9C^2 + 8H^2) + 18\tau K - 9(2A + C + D)(2(2A - D)H + 3(BC + N)) + 9M(v - H) - \\ - 36H(BH + P) + 18(3B^2(B - H) - Q\sigma), \quad 3\tau H^2 M + 27HN((C + D)H - 2Q) + \tau(3(3C + 2D)\delta H^2 + \\ + 2\tau H^2 v - 6(C - 3D)HQ - 12Q^2), \quad H^2 P - (DH - Q)Q, \quad 3B(A + C) + (2A - D)H + 3(L + N + Q), \\ 2A\tau^3 H^3 + \tau(\tau H^3(30BC + 6BD - 7CH - 5DH) - 3\tau(6B - 5H)H^2 Q - 9(4C + 11D)HQ^2 + 54Q^3 - 27(C - \\ - 2D)H^2 Q\sigma + 9\delta H^3 \sigma^2) + 9HN(\tau H^2(6B + H) + 3(H\sigma - 3Q)(H\sigma - 2Q)), \quad 81H^2 N^2 - 54D\tau H^2 N - \\ - \tau^2 H^2(9(C^2 - D^2) + 2\tau v) + (9(C - 3D)\tau^2 H + 81\tau HN)Q + 18\tau^2 Q^2, \quad 1 - \tau Ht \rangle \cap \mathbb{C}[p];$$

$$J_3 = \langle \tau((C + 2D)H - 4Q)((2D - 5C)H^2 - (15B - 8H)Q + 3BH\sigma) + 9HN((7C - D)H^2 - (15B + \\ + 4H)Q + 3BH\sigma), \quad ((C + 2D)H - 4Q)(\delta H + 2Q)(2(2H - 15B)Q + H(6B + H)\sigma) - 3H^2 M((7C - \\ - D)H^2 - (15B + 4H)Q + 3BH\sigma), \quad 3B(A + C) + (2A - D)H + 3(L + N + Q), \quad 18(4A^2 - C^2)H + \\ + 18\tau K - 9(2A + C + D)(2(2A - D)H + 3(BC + N)) + 2\tau v(v - 3H) + 9M(v - H) - 18(2HP + Q\sigma), \\ H^2 P - (DH - Q)Q, \quad 3(3B^2 + (4C - 3D)\delta)H^2 \sigma - 4A\tau^2 H^2 - H^3(3B(13C - 16D) + 2(17C - 14D)H) - \\ - (3(C - 7D)(4C - 3D) + \tau(39B - 4H))HQ - 30(4C - 3D)Q^2, \quad 40Q^3 - H^4(3B(C - 4D) + 2(5C - 2D) \times \\ \times H) - (3(4C^2 - 11CD + D^2) + \tau(15B - 8H))H^2 Q + (9B^2 + (4C - D)\delta)H^3 \sigma - 18HQ^2 \sigma, \quad 1 - \tau H((7C - \\ - D)H^2 - (15B + 4H)Q + 3BH\sigma)t \rangle \cap \mathbb{C}[p];$$

$$J_4 = \langle C^2 DH + (C^2 + 2H^2)N - CH(C^2 - 2H\tau), \quad C(A + C) - H^2, \quad 3C^2 L + (C^2 - H^2)N, \quad C^2 M - N \times \\ \times (3BC + N), \quad C^4 P + (N + C\tau)(CH(C^2 - H\tau) - (C^2 + H^2)N), \quad CH(C^2 - H\tau) - (C^2 + H^2) \times \\ \times N - C^2 Q, \quad K, \quad 1 - CHt \rangle \cap \mathbb{C}[p];$$

$$J_5 = \langle (2A + 8C - D)^2(4A + C + D) - 243B^2 C, \quad 3B(A + C + D) - (2A + 8C - D)H, \quad 3B(A + C) - \\ - 2CH + 3(L + N), \quad 2(2A + 2C - D)(4A + C + D) + 9M, \quad 3BC(A + C) - 2C^2 H + (A + 3C)N, \quad 2(2A + \\ + 2C - D)(A + C + D) + 9P, \quad B(A + C + D) - 2CH + Q, \quad K, \quad 1 - (A + 3C)(2A + 8C - D)t \rangle \cap \mathbb{C}[p];$$

$$J_6 = \langle 9K - A\sigma, \quad A\tau + 9L, \quad 9M + 2\tau v + \delta\sigma, \quad \delta\tau + 9N, \quad \tau v + 9P + 2\delta\sigma, \quad 3B(2(A + C) + D) + (2(2A - C) - \\ - D)H + 9Q \rangle;$$

$$J_7 = \langle 2A(3A^2 + 50H^2) + 75HL, \quad 24A^2(3A^2 + 50H^2) + 625H^2 M, \quad 12A^3(3A^2 + 50H^2) + 3125H^3 N, \\ 4A^2(3A^2 + 50H^2) + 625H^2 P, \quad 2A(3A^2 + 50H^2) + 125HQ, \quad 75BH - 2(9A^2 + 50H^2), \quad 125CH^2 - 6A^3, \\ 125DH^2 + 2A(3A^2 + 25H^2), \quad K, \quad 1 - Ht \rangle \cap \mathbb{C}[p];$$

$$J_8 = \langle 3B(A + C) + (A - C)H + 3(L + N + Q), \quad 3B(34A + 49C) + (26A - 35C)H + 4(32N + 7Q), \quad 3(2A - \\ - C)(2A + 7C) + 64(M + 5P), \quad A + C - D, \quad 6B(2A + C)\rho_1 + H\rho_2, \quad (2A - C)(8048A^4 + 18720A^3 C + \\ + 16040A^2 C^2 + 6216AC^3 + 791C^4) + 64K\rho_3, \quad 64(10A - C)P + (6A + 5C)\rho_4, \quad 8(10A - C)HP - Q\rho_1, \\ 7(2A + C)\rho_2^2 + 288B^2(10A - C)(2A + 7C)\rho_3, \quad 1 - (10A - C)\rho_2\rho_3 t \rangle \cap \mathbb{C}[p];$$

$$J_9 = \langle B, L, N, H, Q \rangle.$$

Доказательство. Пусть $p \in \bigcup_{i=1}^3 V(J_i) \cup V(J_6) \cup V(J_7) \cup V(J_9)$, тогда для системы (4) выполняется тождество $Q(x) \equiv 0$. В случае $p \in V(J_4) \cup V(J_5) \cup V(J_8)$ для (4) выполняется тождество $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \text{const}$. Тогда из метода Черкаса [6, с. 70] следует, что начало координат приведенной системы (4), а значит и системы (1) является центром.

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос об интегрировании системы (1). Укажем интегралы и интегрирующие множители типа Дарбу для системы (1) при $p \in \bigcup_{i=1}^8 V(J_i)$.

Пусть $p \in V(J_1)$. Тогда для системы (1) интегрирующий множитель типа Дарбу имеет вид

$$\mu_1 = f_1^{-3/2},$$

где $f_1 = 1 + 2\sigma x / 3 - 2\tau y / 3 - 2((C + 2D)\tau - 9N)xy / 9 - \tau Ny^2 / \delta + (\delta\tau(\tau(3B - 4H) + \sigma(4C - D)) + 9N(\tau(3B - 4H) + 2\delta\sigma))x^2 / (9\delta\tau)$, $f_1 = 0$ – инвариантная кривая.

В случае $p \in V(J_2)$ для системы (1) существуют две инвариантные прямые $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, где $f_2 = 1 + Qx / H$, $f_3 = 1 + (C + 3N / \tau)x - \tau y / 3$. Тогда интегрирующий множитель типа Дарбу для (1) имеет вид

$$\mu_2 = f_2^{\frac{\delta H + 9HN}{Q} + \frac{9HN}{\tau Q}} f_3^{-3}.$$

Если $p \in V(J_3)$, то для системы (1) интегрирующий множитель типа Дарбу имеет вид

$$\mu_3 = f_2^{-2} f_4^{-3/2},$$

где $f_4 = 1 + 2(H\sigma - 2Q)x / (3H) - 2\tau y / 3 - (8(9(16C - 7D)(3C - D) + (15B + 4H)(75B + 8H))Q^2 - 2HQ \times (80\sigma H^2 - 225B^2(2C - 17D) - 9(3C - D)(4C^2 - 50CD + 19D^2) - 12BH(41C - 137D)) + H^2(6BH \times (45B^2 - 58C^2 - 112CD + 161D^2) + 8H^2(297B^2 + 107C^2 - 91CD + 29D^2) + 32H^3(33B + 4H) - 9(225B^4 + 2\sigma B^2(77C - 74D) + \delta\sigma(14C - 5D)(3C - D))))x^2 / \xi - 2(H^2(6\sigma H \times (13C^2 - 9CD + 2D^2) + 9B(C^2(74C + 7D) - D^2(11C - 2D) - 8H^2(5C - 14D)) + 135B^3(13C + 14D) + 54B^2H(17C + 46D) - 128\delta H^3) - 2HQ(9B(300B^2 + 98C^2 - 57CD + 22D^2) + 12H(180B^2 + 7C^2 - 27CD + 11D^2) + 16H^2(9B - 4H)) - 120Q^2(3B(C - 2D) + 4H(2C - D)))xy / \xi + (2HQ(450B^2(5C + D) + 9C(84C^2 - 31CD + D^2) + 12BH \times (121C + 53D) - 32H^2(C - 7D)) - 40Q^2(90B^2 + 9C(3C - D) + 4H(21B + 4H)) + H^2(8H^2(34C^2 - 53CD + 10D^2) - 9B^2(127C^2 + 112CD - 32D^2) - 6BH(59C^2 + 218CD - 52D^2) - 18C\sigma(3C - D)(4C - D)))y^2 / \xi$, $\xi = 9H^2(9(3C - D)^2 + (15B + 4H)^2)$, $f_4 = 0$ – инвариантная кривая системы (1).

Пусть $p \in V(J_4)$. Введем обозначения $t_1 = (N^2(C^2 - H^2) - \tau C^2 H^2(s + \tau) - CHN(3C^2 + H(3s + 2\tau))) / (N(CH(C^2 - \tau H) - N(C^2 + H^2)))$, $t_2 = H(3N + \tau C)(2N + C(s + \tau)) / (N(C^3 - 2HN - \tau CH))$, $t_3 = (3N \times (Hs - C^2)\tau CH(s + \tau)) / (N(C^2 - H(2s + \tau)))$, где s определяется из равенства $sCH(s + \tau) - N(C^2 - sH) = 0$. Интегрирующий множитель типа Дарбу для системы (1) в этом случае имеет вид

$$\mu_4 = f_5^{t_1} f_6^{t_2} f_7^{t_3},$$

где $f_5 = 1 + (CH(C^2 - \tau H) - (C^2 + H^2)N)x / (C^2 H)$, $f_6 = 1 + (C^3 - HN - CH(s + \tau))x / C^2 + sy$, $f_7 = 1 + Ny / C$, $f_5 = 0$, $f_6 = 0$, $f_7 = 0$ – инвариантные кривые системы (1).

Если $p \in V(J_5)$, то для системы (1) интегрирующий множитель типа Дарбу имеет вид

$$\mu_5 = f_8 f_9^{t_4} f_{10}^{t_5},$$

где $f_8 = 1 - (2A + 2C - D)x / 3$, $f_9 = 1 - 3B(2A + 2C - D)y / (2A + 8C - D)$, $f_{10} = 1 - (2A - C - D)x / 3 - 9BCy / (2A + 8C - D)$, $t_4 = (4A + C + D) / (C + D - 2A)$, $t_5 = 2(A - 2(C + D)) / (C + D - 2A)$, $f_8 = 0$, $f_9 = 0$, $f_{10} = 0$ – инвариантные прямые системы (1).

В случае $p \in V(J_6)$ интегрирующий множитель типа Дарбу μ_6 и интеграл Дарбу U_1 для системы (1) имеют вид

$$\mu_6 = f_{11}^{-1} f_{12}^{-1},$$

$$U_1 = f_{11} f_{12}^{-2},$$

где $f_{11} = 27 + 18(\sigma x - \tau y) - 3x((\tau^2 - \sigma^2)x + 2\tau\sigma y) + 2\tau^2 x(Ax^2 + vxy + \delta y^2)$, $f_{12} = 3 + \sigma x - \tau y$, $f_{11} = 0$, $f_{12} = 0$ – инвариантные кривые системы (1).

Если $p \in V(J_7)$, то для системы (1) существуют три инвариантные прямые $f_{13} = 0$, $f_{14} = 0$, $f_{15} = 0$ и инвариантная кривая третьего порядка $f_{16} = 0$, где $f_{13} = 1 - 2A(3A^2 + 50H^2)x / (125H^2)$, $f_{14} = 1 - 4Ax / 5 - 6A^2 y / (25H)$, $f_{15} = 1 - 2(3A^2 + 50H^2)y / (25H)$, $f_{16} = 1 - 2(3A^2 + 25H^2)y / (25H) + 2A(2Hy - 1)x / 5 - (2(A^2 - 25H^2) / 25 + 4A^2(3A^2 + 50H^2)y / (625H))x^2 - 4A(3A^2 + 50H^2)x^3 / 125$. Интегрирующий множитель типа Дарбу μ_7 и интеграл Дарбу U_2 для системы (1) находим в виде

$$\mu_7 = f_{13}f_{14}^{-3/2}f_{15}^{-3/2},$$

$$U_2 = f_{14}f_{15}f_{16}^{-2}.$$

Для восьмой серии условий $p \in V(J_8)$ для системы (1) существует интеграл Дарбу вида

$$U_3 = f_{17}^3 f_{18}^{-5} f_{19}^2,$$

где $f_{17} = 1 + \rho_0$, $f_{18} = 1 + (2A + 7C)(68A^2 + 84AC + 37C^2)\rho_0 / \rho_3 + (6A + 5C)(2A + 7C)f_{17}\rho_4 x(16(10A - C) - \rho_4 x) / (64(10A - C)\rho_3)$, $f_{19} = 1 + (10A - C)(140A^2 + 180AC + 67C^2)((2A - C)x / (8\rho_3) + 3By / \rho_2) + 5f_{18}x(3(2A + 3C) / 16 + 3(6A + 5C)\rho_4 x / (128(2A + 7C)) - (6A + 5C)\rho_4^2 x^2 / (1024(10A - C)(2A + 7C))) - f_{17}x(5(4368A^4 + 9888A^3C + 9400A^2C^2 + 4552AC^3 + 1033C^4) / 16 + 5(6A + 5C)(84A^2 + 164AC + 121C^2)\rho_4 \times x / 128 + 15(2A - C)(6A + 5C)(14A + 13C)\rho_4^2 x^2 / (512(10A - C)) - 15(6A + 5C)^2 \rho_4^3 x^3 / (8192(10A - C)) + 3(6A + 5C)^2 \rho_4^2 x^4 / (65536(10A - C)^2)) / \rho_3$, $\rho_0 = (C - 2A)x / 8 - 3B\rho_3 y / \rho_2$ и $f_{17} = 0$, $f_{18} = 0$, $f_{19} = 0$ – инвариантные кривые системы (1). При $p \in V(J_8)$ приведенная система (4) принимает вид

$$x' = yP_0(x), \quad y' = -x + \alpha_1 xy^2 + \alpha_2 xy^3,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

1. Romanovski V.G., Shafer D.S. The Center and Cyclity Problems: A Computational Algebra Approach. Birkhauser; Boston; Basel; Berlin, 2009.
2. Садовский А.П. // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 98.
3. Садовский А.П. // Там же. 1997. Т. 33. № 2. С. 236.
4. Садовский А.П. // Там же. 2003. Т. 39. № 4. С. 472.
5. Bondar Y.L., Sadovskii A.P. // Buletinul Academiei de Stinte a Republicii Moldova. Matematica. 2004. Vol. 46. № 3. P. 71.
6. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.
7. Садовский А.П. Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов спец. 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», 1-31 03 01-01 26 «Компьютерная математика», 1-31 03 01-03 03 «Математические методы в экономике». Мн., 2008.

Поступила в редакцию 07.10.10.

Антон Павлович Садовский – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений.

Татьяна Витальевна Щеглова – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – А.П. Садовский.