

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТЕПЕНИ n ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

The necessary and sufficient conditions of Painleve property for cross system of two differential equations of n -degree are founded.

Рассмотрим систему

$$x'' = C(x, t) + y \cdot A(x, t), \quad y'' = D(y, t) + x \cdot B(y, t), \quad (1)$$

где $A(x, t)$, $C(x, t)$ и $B(y, t)$, $D(y, t)$ – функции, рациональные по x и y соответственно и аналитические по t , причем $A(x, t)$ и $B(y, t)$ не равны тождественно нулю, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Условия наличия свойства Пенлеве у системы (1) при $n \leq 3$ получены в [1–3]. Поскольку все утверждения, содержащиеся в настоящей работе, имеют место и при $n = 3$, то в дальнейшем будем считать, что $n \geq 3$. Найдем необходимые и достаточные условия, при которых рассматриваемая система имеет свойство Пенлеве.

Основной результат

Из (1) для компоненты x построим уравнение

$$\left(nx'' - \frac{C'_t A - C A'_t}{A} \cdot \frac{1}{(x')^{n-1}} - \frac{C'_x A - C A'_x}{A} \cdot \frac{1}{(x')^{n-2}} - \frac{A'_t}{A} \cdot x' - \frac{A'_x}{A} \cdot x'^2 \right)^n =$$

$$= \frac{A^n}{(x')^{n(n-1)}} \cdot \left(D \left(\frac{x'' - C}{A}, t \right) + x \cdot B \left(\frac{x'' - C}{A}, t \right) \right). \quad (2)$$

Для отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнения (2), согласно лемме из [4], необходимо требовать, чтобы $\frac{C'_t A - C A'_t}{A} = 0$ и $\frac{C'_x A - C A'_x}{A} = 0$. Или $C = K_1 \cdot A$, где K_1 – постоянная. В силу симметричности переменных в системе (1) заключаем, что $D = K_2 \cdot B$, где K_2 – постоянная.

Таким образом, систему (1) можно записать в виде

$$x'' = (y + K_1) \cdot A(x, t), \quad y'' = (x + K_2) \cdot B(y, t).$$

С помощью линейного преобразования $y \rightarrow y - K_1$, $x \rightarrow x - K_2$ она приводится к виду

$$x'' = A(x, t)y, \quad y'' = B(y, t)x. \quad (3)$$

Согласно лемме 1 из [5], чтобы система (3) не имела подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы $A(x, t) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$, $B(y, t) = b_k y^k + b_{k-1} y^{k-1} + \dots + b_0$, где $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и a_i , $i = \overline{0, m}$, b_j , $j = \overline{0, k}$, – аналитические по t функции.

Положим в (3) $x = \lambda^p X$, $y = \lambda^q Y$, $t = t_0 + \lambda^r \tau$. Рассматривая систему нулевого приближения, получаем следующий результат. Если (3) обладает свойством Пенлеве, то необходимо, чтобы

$$A(x, t) = \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i, \quad B(y, t) = \sum_{i=0}^{2n} b_i y^i, \quad (4)$$

где $a_i = a_i(t)$, $b_i = b_i(t)$ – аналитические функции ($i = \overline{0, 2n}$).

Из системы (3) при условиях (4) для компонент x и y построим соответственно уравнения

$$\left(nx'' - \frac{A'_x}{A} \cdot x'^2 - \frac{A'_t}{A} \cdot x' \right)^n = A^n \cdot \frac{x}{x'^{n(n-1)}} \cdot B \left(\frac{x''}{A}, t \right) \quad (5)$$

и

$$\left(ny'' - \frac{B'_y}{B} \cdot y'^2 - \frac{B'_t}{B} \cdot y' \right)^n = B^n \cdot \frac{y}{y'^{n(n-1)}} \cdot A \left(\frac{y''}{B}, t \right). \quad (6)$$

* Авторы статьи – сотрудники кафедры математического анализа ГрГУ им. Янки Купалы.

Для отсутствия подвижных критических особых точек у решений уравнений (5) и (6) согласно лемме из [4] необходимо требовать, чтобы $a_i = b_i = 0$, $i \in \{0, \dots, n-2\} \cup \{n+2, \dots, 2n\}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Для того чтобы система (1) при $n \geq 3$ не имела подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{aligned} x'^n &= y(a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}), \\ y'^n &= x(b_{n+1}y^{n+1} + b_ny^n + b_{n-1}y^{n-1}), \end{aligned} \quad (7)$$

где a_i, b_i , $i = \overline{n-1, n+1}$, – функции, аналитические по t , и $|a_{n+1}| + |a_n| + |a_{n-1}| \neq 0$, $|b_{n+1}| + |b_n| + |b_{n-1}| \neq 0$.

Система (7) при помощи линейного преобразования искомых функций и аналитической замены независимой переменной приводится к одному из следующих видов:

$$\begin{aligned} x'^n &= yx^{n-1}, \\ y'^n &= x(b_{n+1}y^{n+1} + b_ny^n + b_{n-1}y^{n-1}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $|b_{n+1}| + |b_n| + |b_{n-1}| \neq 0$;

$$\begin{aligned} x'^n &= y(x^n + a_{n-1}x^{n-1}), \\ y'^n &= x(b_{n+1}y^{n+1} + b_ny^n + b_{n-1}y^{n-1}), \end{aligned} \quad (9)$$

где $|b_{n+1}| + |b_n| \neq 0$;

$$\begin{aligned} x'^n &= y(x^{n+1} + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}), \\ y'^n &= x(b_{n+1}y^{n+1} + b_ny^n + b_{n-1}y^{n-1}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $b_{n+1} \neq 0$.

Рассмотрим систему (8). Для компоненты x построим уравнение

$$(nxx'' + (1-n)x'^2)^n = b_{n+1}x^2x'^{2n} + b_nx^{n+1}x'^n + b_{n-1}x^{2n}. \quad (11)$$

Полагая в уравнении (11) $t = t_0 + \lambda \tau$, при $\lambda = 0$ получим упрощенное уравнение

$$(nxx\ddot{x} + (1-n)\dot{x}^2)^n = b_{n+1}(t_0)x^2\dot{x}^{2n}. \quad (12)$$

Выполняя в уравнении (12) замену переменной по формуле $x = u^n$, получим дифференциальное уравнение вида $\ddot{u} = \varepsilon \cdot \sqrt[n]{b_{n+1}(t_0)} u \dot{u}^2$, где $\varepsilon^n = 1$, для однозначности решений которого необходимо требовать, чтобы $b_{n+1}(t_0) = 0$. Поэтому для отсутствия подвижных критических особых точек у общего решения уравнения (11) необходимо требовать, чтобы $b_{n+1}(t) \equiv 0$ (в силу произвольности выбора t_0).

Таким образом, уравнение (11) можно записать в виде

$$\left(nxx'' + (1-n)\frac{x'^2}{x} \right)^n = b_nxx'^n + b_{n-1}x^n. \quad (13)$$

Требуя, чтобы общее решение уравнения $b_nxx'^n + b_{n-1}x^n = 0$ было решением для уравнения (13) [7], получим, что необходимо выполнение одного из условий: $b_n = 0$, $b_{n-1} \neq 0$ или $b_{n-1} = Mb_n$, $b_n \neq 0$, M – постоянная.

При $b_n = 0$ уравнение (13) запишем в виде $x'' - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x'^2}{x} - \frac{\varepsilon \cdot \sqrt[n]{b_{n-1}}}{n}x = 0$, где $\varepsilon^n = 1$. Это уравнение, а значит, и система

$$x'^n = yx^{n-1}, \quad y'^n = b_{n-1}xy^{n-1}, \quad (14)$$

где $b_{n-1} \neq 0$, обладают свойством Пенлеве [8].

При $b_{n-1} = Mb_n$, $b_n \neq 0$, построим относительно компоненты y уравнение

$$(nb_ny(y+M)y'' - b_n(ny + (n-1)M)y'^2 - b'_ny(y+M)y')^n = b_n^{n+1}y^{2n}(y+M)^{n+1}. \quad (15)$$

Пусть $M \neq 0$. Полагая $t = t_0 + \lambda \tau$, при $\lambda = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = \left(\frac{1-1/n}{y} + \frac{1/n}{y+M} \right) \dot{y}^2,$$

которое не обладает свойством Пенлеве при $n \geq 3$ [6, с. 430–438], а, следовательно, в рассматриваемом случае этим свойством не обладает и система (8).

Пусть $M = 0$. Тогда уравнение (15) примет вид

$$\left(y'' - \frac{y'^2}{y} - \frac{b'_n}{nb_n} y' \right)^n = \frac{b_n}{n^n} y^{n+1}.$$

Вводя замену $y = u^n$, получим дифференциальное уравнение

$$u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{b'_n}{nb_n} u' + \frac{\varepsilon \cdot \sqrt[n]{b_n}}{n^2} \cdot u^2, \quad (16)$$

где $\varepsilon^n = 1$, которое не имеет подвижных критических особых точек, если $b_n = \frac{H}{t^n}$, где $H \neq 0$, H – постоянная [8]. При этом уравнение (16) является частным случаем третьего уравнения Пенлеве. В этом случае система (8) со свойством Пенлеве примет вид

$$x'^n = y x^{n-1}, \quad y'^n = \frac{H}{t^n} x y^n, \quad (17)$$

где $H \neq 0$, H – постоянная.

Рассмотрим систему (9). Для компоненты y построим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(ny(b_{n+1}y^2 + b_ny + b_{n-1})y'' - ((n+1)b_{n+1}y^2 + nb_ny + (n-1)b_{n-1})y'^2 - (b'_{n+1}y^2 + b'_ny + b'_{n-1})yy' \right)^n = \\ & = (b_{n+1}y^2 + b_ny + b_{n-1})^n y'^{n+1} y'^n + a_{n-1}y^{2n} (b_{n+1}y^2 + b_ny + b_{n-1})^{n+1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Считая, что $b_{n+1} \neq 0$, введем в уравнение (18) параметр λ по формулам $y = \lambda^{-n} Y(\tau)$, $t = t_0 + \lambda^2 z$. Находя решение полученного уравнения в виде

$$Y = \frac{h}{z^n} + \lambda \cdot Y_1(z) + \lambda^2 \cdot Y_2(z) + \dots,$$

для Y_1 имеем уравнение

$$\left(Y_1'' + \frac{2(n+1)Y_1'}{z} + \frac{n(n+1)Y_1}{z^2} \right)^n - \frac{(-1)^n h^{n+1}}{z^{n^2+2n}} = 0,$$

допускающее решение

$$Y_1(z) = \frac{C_1}{z^{n+1}} + \frac{C_2}{z^n} - \frac{h^{(n+1)/n} \cdot (\ln(z) - 1)}{z^n},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные с логарифмической особенностью в точке $z = 0$.

Значит, уравнение (18), а следовательно и система (9) при $b_{n+1} \neq 0$ не обладает свойством Пенлеве.

Пусть $b_{n+1} = 0$. Тогда система (9) запишется в виде

$$\begin{aligned} x'^n &= y(x^n + a_{n-1}x^{n-1}), \\ y'^n &= x(b_ny^n + b_{n-1}y^{n-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $b_n \neq 0$.

Положим в (19) $x = \lambda^{-n} X$, $y = Y$, $t = t_0 + \lambda \tau$. Требуя, чтобы решения системы нулевого приближения были однозначными, получаем, что $b_{n-1} \equiv 0$. Тогда с учетом симметричности независимых переменных в системе (19) необходимо, чтобы $a_{n-1} \equiv 0$. Итак, (9) принимает вид

$$x'^n = yx^n, \quad y'^n = b_nxy^n.$$

Построив для компоненты x уравнение

$$(nxx'' - nx'^2)^n = b_nx^{n+1}x'^n$$

и выполнив замену $x = u^n$, получим

$$u'' = \frac{u'^2}{u} + \frac{\varepsilon \cdot \sqrt[n]{b_n}}{n} \cdot uu', \quad (20)$$

где $\varepsilon^n = 1$.

Уравнение (20) обладает свойством Пенлеве только при условии $(b_n)' = 0$ [8]. Таким образом, система (9) со свойством Пенлеве имеет вид

$$x''' = yx^n, \quad y''' = Kxy^n, \quad (21)$$

где K – постоянная.

Рассмотрим систему (10). Положим $x = \lambda^{-n}X$, $y = \lambda^{-n}Y$, $t = t_0 + \lambda^2 \tau$. Поскольку $b_{n+1}(t_0) \neq 0$, то решения системы нулевого приближения имеют подвижные критические особые точки. Следовательно, система (10) не обладает свойством Пенлеве.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы система (1) при $n \geq 3$ обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием x , y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из следующих видов: (14), (17) или (21).*

1. Степанова Т.С. Аналитические свойства решений систем второго порядка: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1998.
2. Парманчук О.Н., Пецевич В.М., Пронько В.А. // Вестн. ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. 2008. № 3 (73). С. 72.
3. Кулеш Е.Е., Пецевич В.М., Пронько В.А. // Там же. 2009. № 3 (87). С. 13.
4. Березкина Н.С., Мартынов И.П., Пронько В.А. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 4. С. 1.
5. Мартынов И.П., Пецевич В.М., Пронько В.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 1. С. 113.
6. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
7. Cosgrove C., Scoufis G. // Stud. Appl. Math. 1993. Vol. 88. P. 25.
8. Bureau F. // Ann. di Math. Sci. 1964. Vol. 64. P. 229.

Поступила в редакцию 05.07.10.

Иван Платонович Мартынов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой.

Ольга Николаевна Парманчук – аспирант. Научный руководитель – И.П. Мартынов.

Виктор Михайлович Пецевич – кандидат физико-математических наук, доцент.

Вячеслав Аркадьевич Пронько – кандидат физико-математических наук, доцент.