УДК 517.94

М.Н. ВАСИЛЕВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ФУКСА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И РАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ

One inverse problem of the analytic theory of linear differential equations is considering. Namely, a Fuchsian system of the second order with four critical points and integrable monodromy group is constructed.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – произвольные точки на комплексной проективной прямой CP^1. Рассмотрим на открытом множестве $M = \{CP^1 \setminus \bar{M}\}$, где $\bar{M} = \bigcup_{j=1}^{4} a_j$, систему Фукса

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{x - a_j} \right) Y\, dx \tag{1}$$

с квадратной матрицей Y второго порядка и постоянными (2×2)-матричными коэффициентами U_j такими, что [1]

$$\sum_{j=1}^{4} U_j = 0. \tag{2}$$

Пусть x_0 – отмеченная точка множества M, а γ_j – петля с началом и концом в точке x_0, охватывающая точку a_j, $j = \overline{1,4}$. Обозначим через $\pi_1(M, x_0)$ фундаментальную группу комплексного аналитического многообразия M, а через $\Phi_{x_0}(x)$ – нормированную в точке x_0 фундаментальную матрицу решений системы (1) ($\Phi_{x_0}(x_0) = E$, где E – единичная матрица).

Далее, пусть V_j, $j = \overline{1,4}$, – заданные постоянные квадратные (2×2)-матрицы такие, что

$$\prod_{j=1}^{4} V_j = E,$$

т. е. V_j – матрицы, которые порождают мультипликативную группу, и пусть

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \to GL(2; C) \ - \tag{3}$$

гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(M, x_0)$ дополнения к точкам a_1, a_2, a_3, a_4 в общую линейную группу $GL(2; C)$ квадратных невырожденных комплекснозначных матриц порядка 2.

Гомоморфизм (3) называют представлением монодромии, или монодромией системы (1).

Образ $\operatorname{Im}\chi$ группы $\pi_1(M, x_0)$ при гомоморфизме χ называется группой монодромии системы (1). Матрицы же $V_j \in GL(2; C)$ называют матрицами монодромии, или образующими группы монодромии.

Наряду с матрицами монодромии V_j, $j = \overline{1,4}$, рассмотрим так называемые показательные матрицы монодромии

$$W_j = (2\pi i)^{-1} \ln V_j, \quad j = \overline{1,4},$$

где $\ln V_j$ – главное значение логарифмической функции от матрицы V_j.

Задача (Проблема Римана – Гильберта). Существует ли система Фукса (1), (2) с заданными особыми точками a_1, a_2, a_3, a_4, фундаментальная матрица решений которой реализует заданный гомоморфизм?

Иначе, когда по заданным особым точкам a_j, $j = \overline{1,4}$, и заданным матрицам монодромии можно построить матрицы U_j, $j = \overline{1,4}$, которые дают систему Фукса (1), (2).

В работах [1, 2] со ссылкой на статью [3] утверждается, что даже в случае произвольного конечного числа особых точек и представления монодромии ранга 2 проблема Римана – Гильберта всегда имеет положительное решение.

В настоящей работе дается конструктивное решение сформулированной проблемы в случае разрешимой группы монодромии, когда собственные значения порождающих ее матриц различны (случай совпадающих собственных значений рассмотрен в [4]).

Дальнейшие исследования будем проводить, не умаляя общности рассуждений [1], считая, что $a_4 = \infty$. В этом предположении систему (1) можно переписать в виде

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{U_j}{x - a_j} \right) Y\, dx, \tag{4}$$

считая, что собственные значения матриц U_j, $j = 1,2,3$, равны $0, \xi_j$, так как задачу легко свести к этому случаю [5]. Согласно [6, с. 159] числа $0, \xi_j$ будут тогда и собственными значениями матриц W_j, $j = 1,2,3$.

В силу принятых соглашений и структуры рассматриваемой группы монодромии показательные матрицы W_j, которые мы задаем, можно выбирать в виде

$$W_j = \begin{pmatrix} w_j & \dfrac{\xi_j - w_j}{h} \\ hw_j & \xi_j - w_j \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $w_j \neq 0$, $j = 1,2,3$, $h \neq 0$ – произвольно заданные числа.

Введем обозначения

$$\rho_{ij} = \sigma(U_i U_j),\ \ \rho_{ijk} = \sigma(U_i U_j U_k),\ \ \tau_{ij} = \sigma(W_i W_j),\ \ \tau_{ijk} = \sigma(W_i W_j W_k), \tag{6}$$

$$\sigma_4 = \rho_{123} - \rho_{132},\ \ \sigma_5 = \rho_{123} + \rho_{132},\ \ z = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2},$$

где $i, j = 1,2,3$, $\sigma(T)$ – сумма характеристических чисел матрицы T (след матрицы T).

В работе [5] указан общий алгоритм, следуя которому можно пытаться решить сформулированную выше задачу. Основу алгоритма составляет пункт, согласно которому требуется прежде всего найти решение системы следующих пяти дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho_{12}}{dz} = \frac{\sigma_4}{z},\ \ \frac{d\rho_{13}}{dz} = \frac{\sigma_4}{1-z},\ \ \frac{d\rho_{23}}{dz} = \frac{\sigma_4}{z(z-1)},$$

$$\frac{d\sigma_4}{dz} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)\sigma_5 + 2\rho_{12}\rho_{13} - 2\rho_{12}\rho_{23}}{1-z} - \frac{(\xi_1 - \xi_3)\sigma_5 + 2\rho_{13}\rho_{23} - 2\rho_{12}\rho_{13}}{z}, \tag{7}$$

$$\frac{d\sigma_5}{dz} = \sigma_4\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{1-z} + \frac{\xi_3 - \xi_1}{z}\right).$$

В [5] показано, что следы ρ_{ij}, ρ_{ijk}, которые должны удовлетворять системе (7), являются в общем случае функциями τ_{ij}, τ_{ijk} и z. При этом примечательно то, что система (7), рассматриваемая как самостоятельный объект, имеет стационарное решение

$$\rho_{12} = \xi_1\xi_2,\ \ \rho_{13} = \xi_1\xi_3,\ \ \rho_{23} = \xi_2\xi_3,\ \ \sigma_4 = 0,\ \ \sigma_5 = 2\xi_1\xi_2\xi_3. \tag{8}$$

Так вот получается, что в рассматриваемом нами случае следы ρ_{ij}, ρ_{ijk} (см. (6)) как раз совпадают со стационарным решением (8) системы (7). Таким образом, следуя алгоритму из [5], можно получить решение поставленной задачи. Но, как показывает практическая реализация алгоритма, процесс этот оказывается весьма трудоемким, причем окончательные формулы имеют очень сложную структуру.

Нами предлагается иной подход к решению задачи, который намного проще и прозрачнее алгоритма из [5], и, что самое главное, полученные результаты являются неулучшаемыми.

Переходя к содержательной части работы, заметим, что, не умаляя общности рассуждений, можно считать в дальнейшем, что матрицы W_j имеют вид

$$W_j = \begin{pmatrix} \xi_j & w_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ j = 1,2,3, \tag{9}$$

поскольку матрицы (5) и (9) являются подобными.

В самом деле, если взять матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -h & 1 \end{pmatrix},$$

обратная к которой

$$T^{-1} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -h & 0 \end{pmatrix},$$

то имеем равенство

$$T\begin{pmatrix} w_j & \dfrac{\xi_j - w_j}{h} \\ hw_j & \xi_j - w_j \end{pmatrix}T^{-1} = \begin{pmatrix} \xi_j & w_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, согласно работе [6, с. 137–142] фундаментальную матрицу решений системы (4), нормированную в точке x_0, можно строить в виде сходящегося ряда

$$\Phi_{x_0}(x) = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,3)} U_{j_1} \cdots U_{j_\nu} J_{j_1\ldots j_\nu}\left(\frac{x-a_{j_\nu}}{x_0-a_{j_\nu}}\right), \qquad (10)$$

где сумма $\sum\limits_{j_1,\ldots,j_\nu}^{(1,2,3)}$ содержит 3^ν членов, которые получим, когда индексы $j_1,\ldots,j_\nu$ пробегают независимо друг от друга значения $1,2,3$, а $J_{j_1\ldots j_\nu}$ – итерированный интеграл, определяемый рекуррентными формулами

$$J_{j_1} = \int_{x_0}^{x} d\ln\frac{x-a_{j_1}}{x_0-a_{j_1}},\ \ J_{j_1j_2} = \int_{x_0}^{x} J_{j_1}\, d\ln\frac{x-a_{j_2}}{x_0-a_{j_2}},\ \ldots,$$

$$J_{j_1j_2\ldots j_\nu} = \int_{x_0}^{x} (J_{j_1j_2\ldots j_{\nu-1}})\, d\ln\frac{x-a_{j_\nu}}{x_0-a_{j_\nu}},\quad j_\nu = 1,2,3;\quad \nu = 1,2,3,\ldots\ .$$

Теорема 1. *Фундаментальная матрица решений (10) системы (4) реализует заданный гомоморфизм (3) тогда и только тогда, когда матричные коэффициенты системы (4) совпадают с показательными матрицами монодромии, т. е. когда* $U_j = W_j,\ \ j = 1,2,3.$

Доказательство. Необходимость. Так как матрица (10) – фундаментальная матрица решений системы (4), то ее аналитическое продолжение вдоль пути γ_j – матрица

$$\Phi_j(x) = V_j \Phi_{x_0}(x)$$

также является фундаментальной матрицей решений системы (4). В таком случае

$$d\Phi_j(x) = V_j d\Phi_{x_0}(x) = V_j \omega \Phi_{x_0}(x) = V_j \omega V_j^{-1} V_j \Phi_{x_0}(x) = \omega \Phi_j(x),$$

где

$$V_j \omega V_j^{-1} = \omega = \sum_{j=1}^{3} \frac{U_j}{x-a_j}. \qquad (11)$$

Теперь, имея в виду представление (9) матрицы W_j и с учетом формулы Лагранжа – Сильвестра [5]

$$W_k = \frac{\xi_k}{e^{2\pi i \xi_k}-1}(V_k - E),$$

находим, что

$$V_j = \begin{pmatrix} \lambda_k & v_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\lambda_k = e^{2\pi i \xi_k},\ \ v_k = \frac{w_k}{\xi_k}(e^{2\pi i \xi_k} - 1).$$

Далее, из (11) следует, что

$$V_k \omega = \omega V_k. \qquad (12)$$

А тогда с учетом представления ω в виде суммы (11) после умножения обеих частей равенства (12) справа на $x-a_k$ получим равенство

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3} V_k U_j \frac{x-a_k}{x-a_j} + V_k U_k = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3} U_j V_k \frac{x-a_k}{x-a_j} + U_k V_k. \qquad (13)$$

Полагая в (13) $x = a_k$, приходим к равенству $V_k U_k = U_k V_k$, которое подробнее записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & v_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11}^k & u_{12}^k \\ u_{21}^k & u_{22}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^k & u_{12}^k \\ u_{21}^k & u_{22}^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_k & v_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} \lambda_k u_{11}^k + \nu_k u_{21}^k & \lambda_k u_{12}^k + \nu_k u_{22}^k \\ u_{21}^k & u_{22}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^k \lambda_k & u_{11}^k \nu_k + u_{12}^k \\ u_{21}^k \lambda_k & u_{21}^k \nu_k + u_{22}^k \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{cases} \nu_k u_{21}^k = 0, \\ u_{12}^k (\lambda_k - 1) = \nu_k (u_{11}^k - u_{22}^k). \end{cases}$$

Из системы находим

$$u_{21}^k = 0,\ \ u_{12}^k = \frac{\nu_k (u_{11}^k - u_{22}^k)}{(\lambda_k - 1)} = \frac{(e^{2\pi i \xi_k} - 1) w_k}{\xi_k} \cdot \frac{(u_{11}^k - u_{22}^k)}{e^{2\pi i \xi_k} - 1} = \frac{w_k}{\xi_k} (u_{11}^k - u_{22}^k).$$

Итак,

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{11}^k & \dfrac{w_k}{\xi_k} (u_{11}^k - u_{22}^k) \\ 0 & u_{22}^k \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось, собственные значения матриц W_k и U_k совпадают. Собственными значениями матриц W_k являются ξ_k и 0. Тогда и матрицы U_k имеют собственные значения ξ_k и 0. Следовательно, $u_{11}^k = \xi_k$, $u_{22}^k = 0$. Но в таком случае матрица U_k примет вид

$$U_k = \begin{pmatrix} \xi_k & w_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } U_k = W_k,\ k = \overline{1,3}. \tag{14}$$

Итак, показано, что если матрицы монодромии V_k не коммутируют, но порождают разрешимую группу, то в системе (4) матричные коэффициенты U_k совпадают с W_k, $k = \overline{1,3}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $U_j = W_j$. Предположим, что аналитическое продолжение матрицы (10) вдоль пути γ_j имеет представление

$$\Phi_j(x) = \tilde{V}_j \Phi_{x_0}(x),$$

где $\tilde{V}_j$ – некоторая постоянная матрица. Эта матрица представляется в виде

$$\tilde{V}_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \tilde{\nu}_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\nu}_j = \dfrac{\tilde{w}_j}{\xi_j}(e^{2\pi i \xi_j} - 1)$, $\tilde{w}_j$ – элемент матрицы $\tilde{W}_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \tilde{w}_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассуждая далее, как и при доказательстве необходимости, приходим к выводу, что $u_j = \tilde{w}_j = w_j$, откуда следует, что $\tilde{\nu}_j = \nu_j$, и, значит, $\tilde{V}_j = V_j$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Фундаментальную матрицу решений системы (4), реализующую заданный гомоморфизм (3), можно представить в виде*

$$\Phi_{x_0}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi_{11}(x) = \prod_{j=1}^{3} \left(\frac{x - a_j}{x_0 - a_j} \right)^{\xi_j},$$

$$\varphi_{12}(x) = \prod_{j=1}^{3} \left(\frac{x - a_j}{x_0 - a_j} \right)^{\xi_j} \sum_{k=1}^{3} w_k \int_{x_0}^{x} \prod_{j=1}^{3} \left(\frac{x - a_j}{x_0 - a_j} \right)^{-\xi_j} \frac{dx}{x - a_k}.^{*)}$$

*) Записанный интеграл является аналогом интеграла Кристоффеля – Шварца.

Доказательство. Если матрицы (14) подставить в ряд (10), то в фундаментальной матрице $\Phi_{x_0}(x)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x)\\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x)\end{pmatrix}$ элемент $\varphi_{21}(x)=0$, а $\varphi_{22}(x)=1$. Определим элементы $\varphi_{11}(x)$ и $\varphi_{12}(x)$. Запишем систему (4) в виде

$$dY=\omega Y, \tag{15}$$

где

$$\omega=\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\begin{pmatrix}\xi_j & w_j\\ 0 & 0\end{pmatrix}dx}{x-a_j},$$

откуда

$$\omega_{11}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi_j}{x-a_j}dx,\quad \omega_{12}=\sum_{j=1}^{3}\frac{w_j}{x-a_j}dx.$$

Тогда из системы (15) получим

$$d\Phi_{x_0}(x)=\begin{pmatrix}d\varphi_{11}(x) & d\varphi_{12}(x)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases}d\varphi_{11}(x)=\omega_{11}\varphi_{11}(x),\\ d\varphi_{12}(x)=\omega_{11}\varphi_{12}(x)+\omega_{12}.\end{cases} \tag{16}$$

Из системы (16) находим

$$\frac{d\varphi_{11}}{\varphi_{11}}=\omega_{11}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi_j}{x-a_j}dx,\ \text{а, значит,}\ \ln\varphi_{11}(x)=\sum_{j=1}^{3}\xi_j\, d\ln\frac{x-a_j}{x_0-a_j}$$

и

$$\varphi_{11}(x)=\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{x-a_j}{x_0-a_j}\right)^{\xi_j}.$$

Второе уравнение системы (16) запишем в виде

$$d\varphi_{12}(x)-\omega_{11}\varphi_{12}(x)=\omega_{12}.$$

Умножив обе части уравнения на интегрирующий множитель

$$\mu(x)=e^{-\int\omega_{11}}=e^{-\ln\varphi_{11}(x)}=\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{x-a_j}{x_0-a_j}\right)^{-\xi_j}$$

и решив полученное соотношение, найдем

$$\varphi_{12}(x)=\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{x-a_j}{x_0-a_j}\right)^{\xi_j}\sum_{k=1}^{3}w_k\int_{x_0}^{x}\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{x-a_j}{x_0-a_j}\right)^{-\xi_j}\frac{dx}{x-a_k},$$

что и доказывает теорему 2.

1. Болибрух А.А. // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45. Вып. 2 (272). С. 3.
2. Болибрух А.А. // Мат. заметки. 1989. Т. 46. Вып. 3. С. 118.
3. Dekkers W. // Lect. Notes Math. 1979. Vol. 712. P. 33.
4. Лексин В.П. // Геометрические методы в задачах анализа и алгебры. Ярославль, 1978. С. 121.
5. Еругин Н.П. Проблема Римана. II // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 5. С. 779.
6. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1957.

Поступила в редакцию 16.06.10.

Михаил Николаевич Василевич – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений В.В. Амелькин.