УДК 512.547

О.И. ТАВГЕНЬ, ЯН СИНЬСУН (КНР)

УНИПОТЕНТНОСТЬ ОБРАЗА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $F_2(x, y)$ В $GL(7, C)$ ПРИ УСЛОВИИ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УНИПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Let $\rho: F_2(x,y) \to GL(7,C)$ be a matrix representation of F_2, where F_2 is a free group of rank two with generators x and y. If the image of any primitive element from F_2 is an unipotent matrix, then $\rho(F_2)$ is a unipotent subgroup in $GL(7,C)$.

Пусть $F_2(x,y)$ – свободная группа с образующими x и y. Рассмотрим представление этой группы $\rho: F_2(x,y) \to GL(n,C)$, при этом образующие и все примитивные элементы группы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В [2–4] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядков $n \le 6$, в [5] – утвердительный ответ для любого n при условии $(\rho(p)-E)^3 = 0$ для любого примитивного элемента p. В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для $n = 7$.

Теорема. *Образ $F_2(x,y)$ относительно представления $\rho: F_2(x,y) \to GL(7,C)$ – унипотентная подгруппа в $GL(7,C)$ при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы.*

Для доказательства теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1 [1]. *Пусть p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2. Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с p, имеют вид $p^\alpha q^\varepsilon p^\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$.*

В дальнейшем обозначим $\rho(p) = A = H + E, \rho(q) = B = T + E$, где E – единичная матрица. Для примитивных элементов A и B имеем $\mathrm{tr}AB^2 = \mathrm{tr}B^2 = \mathrm{tr}(AB)^2 = n$. Из этого получаем $\mathrm{tr}HBHB = 0$. Аналогично для примитивных элементов A и $A^m B$ получаем $\mathrm{tr}HA^m BHA^m B = 0$, т. е.

$$\mathrm{tr}(HB + mH^2B + \frac{m!}{2!(m-2)!}H^3B + \cdots + \frac{m!}{(n-2)!(m-n+2)!}H^{n-1}B)^2 = 0.$$

Это уравнение можно переписать так: $m^{2n-4}F_{2n-4} + m^{2n-5}F_{2n-5} + \cdots + m^2F_2 + mF_1 + F_0 = 0$, где $F_0 = \mathrm{tr}HBHB, \ldots, F_{2n-4} = \mathrm{tr}H^{n-1}BH^{n-1}B$. Взяв $m = m_1, \ldots, m_{2n-3}$ неравными, получим $F_j = 0$ $(j = \overline{0, 2n-4})$. Аналогично из $\mathrm{tr}A^m BA^m B = 0$ следует $\mathrm{tr}(B + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m!}{i!(m-i)!}H^iB)^2 = n$. Это уравнение можно переписать так: $m^{2n-2}F'_{2n-2} + m^{2n-3}F'_{2n-3} + \cdots + m^2F'_2 + mF'_1 + F'_0 = 0$, где $F'_1 = 2\mathrm{tr}(HB^2), \ldots, F'_{2n-2} = \mathrm{tr}H^{n-1}BH^{n-1}B$. Взяв $m = m_1, \ldots, m_{2n-1}$ неравными, получим $F'_j = 0$ $(j = \overline{1, 2n-2})$.

Для примитивных элементов A и B имеем $\mathrm{tr}B^2ABA = \mathrm{tr}AB^3 = \mathrm{tr}(AB)^3 = n$. Отсюда $\mathrm{tr}HBHBHB = 0$. Аналогично для примитивных элементов A и A^mB получаем $\mathrm{tr}HA^mBHA^mBHA^mB = 0$, т. е.

$$\mathrm{tr}(HB + mH^2B + \frac{m!}{2!(m-2)!}H^3B + \cdots + \frac{m!}{(n-2)!(m-n+2)!}H^{n-1}B)^3 = 0.$$

Значит, $\sum_{k=0}^{3n-6} m^k T_k = 0,$ где $T_0 = \mathrm{tr}HBHBHB,..., T_{3n-6} = \mathrm{tr}H^{n-1}BH^{n-1}BH^{n-1}B.$ Взяв $m = m_1,..., m_{3n-5}$ неравными, получим $T_j = 0$ $(j = \overline{0,3n-6})$. Аналогично из $\mathrm{tr}A^m BA^m BA^m B = 7$ получаем $\mathrm{tr}(B + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m!}{i!(m-i)!} H^i B)^3 = n.$ Значит, $\sum_{k=1}^{18} m^k T'_k = 0,$ где $T'_1 = \mathrm{tr}HB^3$, ..., $T'_{3n-3} = \mathrm{tr}(H^{n-1}B)^3$. Из этого следует $T'_j = 0$ $(j = \overline{1,3n-3})$.

Из $tr(A^m B)^4 = n$ получаем $\mathrm{tr}(B + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m!}{i!(m-i)!} H^i B)^4 = n,$ значит, $\sum_{i=1}^{4n-4} m^i T''_i = 0.$ Как и выше, $T''_i = 0$ $\left(i = \overline{1,4n-4}\right)$.

Следующие леммы доказаны при условии $n = 7$.

Лемма 2. *Пусть* $(\rho(p) - E)^5 = 0$ *для любого примитивного элемента* p. *Тогда 1)* $\mathrm{tr}W(\rho(p), \rho(q) - E) = 0,$ *когда в* $W(\rho(p), \rho(q) - E)$ *встречается не более двух элементов вида* $\rho(q) - E$ (*либо не более двух элементов вида* $\rho(p)$), *где* p *и* q *– два ассоциированных примитивных элемента группы* F_2; *2)* $\mathrm{tr}(HB)^i = 0, i = \overline{1,5}$ $\left(\mathrm{tr}(HB^2)^i = 0, i = \overline{1,4}\right)$; *3)* $\mathrm{tr}(H^3 B^k) = 0,$ $\mathrm{tr}(H^4 B^k) = 0.$

Доказательство. 1) Если $(\rho(p) - E)^4 = 0$ для любого примитивного элемента $p,$ то утверждение уже было доказано в работе [4]. Поэтому рассмотрим случай $(\rho(p) - E)^5 = 0$ и $(\rho(p) - E)^4 \neq 0$ для какого-то элемента $p.$ Возьмем два любых ассоциированных примитивных элемента группы F_2 – p и q.

Пусть $A = \mathrm{diag}(Y_5, Y_2).$ Из $F_j = 0$ $(j = \overline{0,6})$, $F'_j = 0$ $(j = \overline{1,8})$, $T_j = 0$ $(j = \overline{0,9})$ и $T'_j = 0$ $(j = \overline{1,12})$ следует $x_{41} = x_{52} = x_{51} = 0.$ Решая систему $F_2 = 0,$ $F_3 = 0,$ $F'_4 = 0,$ $T_3 = 0,$ $T'_6 = 0$, $T_4 = 0,$ получаем $x_{31} = x_{42} = x_{53} = 0.$ Тогда $\mathrm{tr}H^m BH^n B = 0,$ где $m + n > 4.$ Из $\mathrm{tr}B^m AB^m A = 7,$ $\mathrm{tr}BA^m B^{m+1} A = 7$ (лемма 1) имеем систему

$$PX = \begin{bmatrix} 9 & 30 & 18 & 5 & 16 & 18 & 4 \\ 25 & 135 & 150 & 30 & 160 & 350 & 200 \\ 36 & 231 & 315 & 55 & 350 & 945 & 700 \\ 49 & 364 & 588 & 91 & 672 & 2156 & 1960 \\ 64 & 540 & 1008 & 140 & 1176 & 4368 & 4704 \\ 81 & 765 & 1620 & 204 & 1920 & 8100 & 10080 \\ 12 & 48 & 36 & 8 & 32 & 48 & 16 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{tr}T^2A^2 \\ \mathrm{tr}T^2ATA \\ \mathrm{tr}T^2AT^2A \\ \mathrm{tr}T^3A^2 \\ \mathrm{tr}T^3ATA \\ \mathrm{tr}T^3AT^2A \\ \mathrm{tr}T^3AT^3A \end{pmatrix} = 0.$$

Из этого получаем $\mathrm{tr}T^p AT^q A = 0$ потому, что $\mathrm{rank}(P) = 7.$ Таким образом, $\mathrm{tr}W(T, A) = 0,$ когда в $W(T, A)$ имеется только один или два элемента $A.$ Тогда

$$\mathrm{tr}T^p HT^q H = \mathrm{tr}T^p AT^q A - \mathrm{tr}T^p AT^q - \mathrm{tr}T^p T^q H - \mathrm{tr}T^p T^q =$$

$$= \mathrm{tr}T^p AT^q A - \mathrm{tr}T^p AT^q - \mathrm{tr}T^p T^q A = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{tr}W(T, H) = 0,$ когда в $W(T, H)$ только один или два H. Поэтому

$$\mathrm{tr}B^p HB^q H = \sum \mathrm{tr}W(T, H) = 0,$$

т. е. $\mathrm{tr}W(B, H) = 0,$ когда в $W(B, H)$ только один или два H.

Аналогично рассматриваются случаи, когда $A = \mathrm{diag}(Y_5, E_2)$.

2) Из случая 1) получаем $\mathrm{tr}(HB) = 0, \mathrm{tr}(HB)^2 = 0.$ Поскольку AB – унипотентная матрица, тогда $7 = \mathrm{tr}(AB)^3 = \mathrm{tr}(B + HB)^3 = \mathrm{tr}B^3 + \sum \mathrm{tr}W(H, B) + \mathrm{tr}(HB)^3 = 7 + \mathrm{tr}(HB)^3,$ когда в $W(T, H)$ только один или два H.

Поэтому $\mathrm{tr}(HB)^3 = 0.$ Аналогично для примитивного элемента $B(AB)^3$ получаем $\mathrm{tr}B(HB)^3 = 0$ и

$$7 = \mathrm{tr}(AB)^4 = \mathrm{tr}(B + HB)^4 = \mathrm{tr}B^3 + \sum \mathrm{tr}W(H, B) + \mathrm{tr}B(HB)^3 + \mathrm{tr}(HB)^4 = 7 + \mathrm{tr}(HB)^4$$

(в $W(T, H)$ не больше двух H). Поэтому $\mathrm{tr}(HB)^4 = 0.$

Из леммы 1 B, AB – два ассоциированных примитивных элемента. Тогда из случая 1) $\mathrm{tr}\left(B^2(AB)^3\right)=7$. Значит,

$$7=\mathrm{tr}\left(B^2(AB)^3\right)=\mathrm{tr}\left(B^2(B+HB)^3\right)=\mathrm{tr}B^5+\sum \mathrm{tr}W(H,B)+\mathrm{tr}(HB)^3=7+\mathrm{tr}\left(B^2(HB)^3\right),$$

где в $W(H,B)$ не более двух H. Поэтому $\mathrm{tr}B^2(HB)^3=0$. Аналогично для примитивного элемента AB^2, AB можно доказать $\mathrm{tr}\left(HB(HB^2)^2\right)=0$. Используя $\mathrm{tr}B^2(HB)^3=0$, $\mathrm{tr}\left(HB(HB^2)^2\right)=0$, $\mathrm{tr}B(AB)^4=7$, можно доказать $\mathrm{tr}B(HB)^4=0$. Из $\mathrm{tr}B^2(HB)^3=0$, $\mathrm{tr}\left(HB(HB^2)^2\right)=0$, $\mathrm{tr}B(HB)^4=0$ и

$$7=\mathrm{tr}(AB)^5=\mathrm{tr}B^5+\sum \mathrm{tr}W(H,B)+5\mathrm{tr}B^2(HB)^3+5\mathrm{tr}\left(HB(HB^2)^2\right)+5\mathrm{tr}\left(B(HB)^4\right)+\mathrm{tr}(HB)^5$$

(в $W(T,H)$ не более двух H, и $\mathrm{tr}B(HB)^3=0\big)$ получим $\mathrm{tr}(HB)^5=0$.

Аналогично $\mathrm{tr}(HB^2)^i=0, i=\overline{1,4}$.

3) Из случая 1) $\mathrm{tr}(A^{-1}B^k)=7$, $\mathrm{tr}(A^{-2}B^k)=7$ (так как два A^{-1}). Из этого следует $\mathrm{tr}(H^3B^k)=0$, $\mathrm{tr}(H^4B^k)=0$.

Доказательство теоремы. Подходящим сопряжением A и B приведем A к жордановой форме и рассмотрим ряд случаев в зависимости от жордановой формы матрицы A.

а) $A=Y_7$. Тогда $H=\begin{pmatrix}0 & E_6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ и $H^6\neq 0, H^7=0$. Поскольку A, B, A^sB $(s=\overline{1,6})$ – унипотентные матрицы (см. лемму 1), то имеем $\mathrm{tr}B=\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}A^sB$. Поэтому $\mathrm{tr}H^sB=0$ $(s=\overline{1,6})$. Решая систему $F_8=0$, $\mathrm{tr}A^5B=0$, получаем $x_{61}=x_{72}=0$. Решая систему $F_6=0$, $F_8'=0$, $\mathrm{tr}A^4B=0$, получаем $x_{51}=x_{62}=x_{73}=0$. Решая систему $F_4=T_6=F_6'=T_9'=0$, $\mathrm{tr}A^3B=0$, получаем $x_{41}=x_{52}=x_{63}=x_{74}=0$. Решая систему $F_2=T_3=F_4'=T_6'=0$, $\mathrm{tr}A^2B=0$, получаем $x_{31}=x_{42}=x_{53}=x_{64}=x_{75}=0$. Пусть $B^{-1}=(s_{ij})$. Аналогично получаем $s_{31}=s_{41}=s_{51}=s_{61}=s_{71}=s_{42}=s_{52}=s_{62}=0$. Тогда, решая систему $F_0=T_0=F_2'=T_3'=0$, $s_{31}=s_{41}=s_{51}=s_{61}=s_{71}=s_{42}=s_{52}=s_{62}=0$, $\mathrm{tr}HB=0$, получаем $x_{21}=x_{32}=x_{43}=x_{54}=x_{65}=x_{76}=0$. Следовательно, представление ρ – приводимо и случай а) доказан.

б) Пусть $A=\mathrm{diag}(Y_6,1)$. Тогда $H^5\neq 0$, $H^6=0$. Поскольку A, B, A^sB $(s=\overline{1,6})$ – унипотентные матрицы, то $\mathrm{tr}B=\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}A^sB$. Поэтому $\mathrm{tr}H^sB=0$ $(s=\overline{1,6})$.

Как и в случае а), имеем $F_j=0$ $(j=\overline{0,8})$, $F_j'=0$ $(j=\overline{1,10})$, $T_j=0$ $(j=\overline{0,12})$ и $T_j'=0$ $(j=\overline{1,15})$. Решая систему $F_6=0$, $\mathrm{tr}A^4B=0$, получаем $x_{51}=x_{62}=0$. Решая систему $F_4=0$, $F_6'=0$, $\mathrm{tr}A^3B=0$, получаем $x_{41}=x_{52}=x_{63}=0$.

I) Пусть $x_{71}\neq 0$. Тогда из $F_3=0$ следует $x_{67}=0$. Сопрягая A и B подходящей матрицей P, перестановочной с A, получаем $x_{7i}=0$ $\left(i=\overline{2,7}\right)$.

Решая систему

$$F_2=0,\ F_4'=0,\ T_3=0,\ T_6'=0,\ \mathrm{tr}A^2B=0, \tag{1}$$

получаем $x_{31}=x_{42}=x_{53}=x_{64}=x_{57}=0$. Решая систему

$$\mathrm{tr}(HB)=0,\ \mathrm{tr}(HB)^2=0,\ \mathrm{tr}(HB)^3=0,\ F_0=0,\ F_2'=0,\ T_0=0,\ T_3'=0, \tag{2}$$

получаем $x_{37}=x_{43}=0$. Таким образом, A и B сопряжением приводятся к виду

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & *\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}B_1 & *\\ 0 & B_2\end{pmatrix}. \tag{3}$$

II) Если $x_{71}=0$. Решая систему (1), получаем либо $x_{31}=x_{42}=x_{53}=x_{64}=x_{67}=0$, либо $x_{31}=x_{42}=x_{53}=x_{64}=x_{72}=0$.

Если $x_{67}\neq 0$, то $x_{31}=x_{42}=x_{53}=x_{64}=x_{72}=0$. Из $F_1=0$ получаем $x_{73}=0$. Решая систему (2), получаем $x_{74}=x_{43}=0$. И A и B сопряжением приводятся к виду (3).

Если $x_{67}=0.$ Решая систему (2), получаем один из случаев: 1) $x_{57}=x_{43}=x_{47}=0,$ 2) $x_{57}=x_{65}=0,$ 3) $x_{21}=0,$ 4) $x_{72}=x_{43}=x_{73}=0,$ 5) $x_{57}=x_{43}=x_{72}=0.$ В случаях 1) – 4) A и B сопряжением приводятся к виду (3). В случае 5) имеем $x_{21}=-x_{32},$ $x_{65}=-x_{54},$ $x_{21}^2+x_{65}^2=0.$ Решая систему $\operatorname{tr}(HB)=0,$ $\operatorname{tr}(HB)^2=0,$ $\operatorname{tr}(HB)^3=0,$ $T_4''=0,$ получаем $x_{21}=x_{32}=x_{65}=x_{54}=0.$ Случай б) доказан.

в) $A=\operatorname{diag}(Y_5,Y_2).$ Как и в случае а), имеем $F_j=0$ $(j=\overline{0,6}),$ $F_j'=0$ $(j=\overline{1,8}),$ $T_j=0$ $(j=\overline{0,9})$ и $T_j'=0$ $(j=\overline{1,12}).$ Отсюда легко получаем $x_{41}=x_{52}=x_{51}=0.$ Решая систему

$$F_2=0,\ F_3=0,\ F_4'=0,\ T_3=0,\ T_6'=0,\ T_4=0, \tag{4}$$

получаем $x_{31}=x_{42}=x_{53}=0.$

(I) Пусть $x_{71}\neq 0$. Еще раз решая систему (4), получаем $x_{46}=x_{56}=x_{57}=0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с $A,$ получаем $x_{61}=0,$ $x_{71}=1.$ Решая систему $F_1=0,$ $F_3'=0,$ получаем $x_{36}=x_{47}=0.$ Решая систему

$$\operatorname{tr}(HB)^i=0,\ i=\overline{1,4},\ tr(H^2B^2)=0,\ tr(H^3B^3)=0, \tag{5}$$

получаем $x_{32}=x_{37}=x_{43}=x_{54}=0.$ Тогда A и B сопряжением приводятся к виду (3).

II) Пусть $x_{71}=0,$ $x_{56}\neq 0.$ Решая систему (4), получаем $x_{61}=x_{72}=0.$ Решая систему $F_1=0,$ $F_3'=0,$ получаем $x_{62}=x_{73}=0.$ Решая систему (5), получаем $x_{21}=x_{32}=x_{43}=0.$ Тогда A и B сопряжением приводятся к виду (3).

III) Пусть $x_{71}=0,$ $x_{56}=0,$ $x_{72}\neq 0.$ Можно считать $x_{72}=1.$ Решая систему $F_1=0,$ $F_3'=0,$ получаем $x_{46}=x_{57}=0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей $P_1,$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{72}=1,$ $x_{73}=x_{74}=x_{75}=x_{77}=0.$ Решая систему (5), получаем $x_{21}=x_{54}=x_{43}=0.$ Тогда A и B сопряжением приводятся к виду (3). Аналогично можно доказать случай, когда $x_{71}=0,$ $x_{56}=0,$ $x_{72}=0,$ $x_{73}\neq 0$ или $x_{71}=0,$ $x_{56}=0,$ $x_{72}=0,$ $x_{73}=0.$

г) $A=\operatorname{diag}(Y_5,E_2).$ Аналогично в) получаем $x_{41}=x_{52}=x_{51}=0,$ $x_{31}=x_{42}=x_{53}=0.$ Если $x_{61}=x_{71}=0,$ то, решая систему $\operatorname{tr}(HB)^i=0,$ $i=\overline{1,4},$ получаем $x_{21}=x_{54}=x_{43}=x_{32}=0.$ В противном случае, сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с $A,$ получаем $x_{61}=0,$ $x_{71}=1.$ Решая систему $\operatorname{tr}(HB)^i=0,$ $i=\overline{1,4},$ $\operatorname{tr}(H^4B^2)=0,$ получаем $x_{21}=x_{54}=x_{43}=x_{32}=x_{57}=0.$ Решая систему $\operatorname{tr}(H^3B^2)=0,$ $\operatorname{tr}(HB)^2=0,$ $\operatorname{tr}(H^4B^3)=0,$ $T_6''=0,$ получаем $x_{56}=x_{47}=0$ или $x_{67}=x_{62}=x_{47}=0.$ Если $x_{56}=x_{47}=0,$ то все доказано. Если $x_{67}=x_{62}=x_{47}=0,$ то, решая систему $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0,$ $T_4''=0,$ получаем $x_{63}=x_{37}=0.$ Тогда A и B сопряжением приводятся к виду (3).

д) $A=\operatorname{diag}(Y_4,E_3).$ Аналогично в) получаем $x_{21}=x_{32}=x_{43}=x_{31}=x_{42}=x_{43}=0.$ Если $x_{61}=x_{51}=x_{71}=0,$ то все доказано. Если это не так, то, сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с $A,$ получаем $x_{61}=0,$ $x_{51}=0,$ $x_{71}=1.$ Решая систему $\operatorname{tr}(H^3B^3)=0,$ $T_3'=0,$ $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0,$ $T_4''=0,$ получаем $x_{37}=x_{47}=0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с $A,$ имеем $x_{72}=x_{73}=x_{74}=x_{75}=x_{76}=0.$ Если $x_{45}=x_{46}=0,$ то случай д) доказан. Если это не так, то, сопрягая A и B подходящей матрицей вида $\operatorname{diag}\left(E,\begin{bmatrix} x_{45} & x_{46} \\ q & p \end{bmatrix},1\right),$ перестановочной с $A,$ получаем $x_{46}=x_{52}=x_{57}=0,$ $x_{45}=1.$ Решая систему $\operatorname{tr}(HB^2)^i=0,$ $i=\overline{1,4},$ получаем $x_{27}=x_{53}=0.$ Решая систему $\operatorname{tr}(H^2B^3)=0,$ $\operatorname{tr}(H^3B^4)=0,$ получаем $x_{67}=0$ или $x_{36}=x_{56}=0,$ и все доказано.

е) $A=\operatorname{diag}(Y_4,Y_2,1).$ Легко видеть, что $x_{41}=0.$

I) Пусть $x_{61}\neq 0.$ Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с $A,$ получаем $x_{51}=x_{71}=0,$ $x_{61}=1.$ Из $\operatorname{tr}(H^2B)=0,$ $F_2=0,$ $F_4'=0$ получаем $x_{31}=x_{42}=x_{45}=0.$ Таким образом, решая $F_1=0,$ $F_3'=0,$ получаем $x_{35}=x_{46}=0.$ Отсюда из $T_4'=0$ получаем $x_{47}x_{75}=0.$

Если $x_{47}=0$, то из $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, получаем $x_{43}=0$. Таким образом, A и B сопряжением приводятся к виду (3). Если $x_{47}\neq 0$, то $x_{75}=0$. Решая $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, получаем $x_{43}=0$, $x_{32}=0$, $x_{65}=-x_{21}$, $x_{25}=-x_{21}^2$. Тогда, сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с A, получаем $x_{21}=x_{65}=x_{25}=0$. Решая $\operatorname{tr}(HB^2)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, получаем $x_{15}=0$. Таким образом, A и B сопряжением приводятся к виду (3).

II) Пусть $x_{61}=0, x_{71}\neq 0$. Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с A, получаем $x_{61}=0$, $x_{51}=0$, $x_{71}=1$. Из $\operatorname{tr}(H^2B)=0$, $F_2=0$, $F_4'=0$ получаем $x_{31}=x_{42}=0$. Таким образом, из $F_1=0$, $F_3'=0$ получаем $x_{47}=0$, $x_{45}x_{62}=0$.

i) Пусть $x_{45}=0$. Из $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, получаем $x_{43}=0$, $x_{21}=0$. Если $x_{46}=0$, то все доказано. Если не так, то, сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с A, получаем $x_{46}=1$. Таким образом, из $\operatorname{tr}(HB)^3=0$, $\operatorname{tr}(H^3B^3)=0$, $T_3'=0$, получаем $\operatorname{tr}(HB^2H^2B)+\operatorname{tr}(HBH^2B^2)=0$. Из системы

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(H^2B^2)=0,\ \operatorname{tr}(H^2B^3)=0, \operatorname{tr}(HB^2H^2B)+\operatorname{tr}(HBH^2B^2)=0,\\ \operatorname{tr}(H^3B^3)=0,\ \operatorname{tr}(HB^2)=0,\ \operatorname{tr}(HB)^s=0,\ s=\overline{1,5},\end{gathered}\tag{6}$$

получаем $x_{67}=x_{65}=x_{32}=0$. Решая $T_4''=0$, $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$, $\operatorname{tr}(HB^2)=0$, получаем $x_{62}=x_{37}=0$. Из $\operatorname{tr}(HB^2)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, имеем $x_{63}=x_{27}=0$. Случай *i*) доказан.

ii) Пусть $x_{62}=0$. Из $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, имеем $x_{32}=0$, $x_{21}=0$. Решая систему (6), получаем $x_{57}=x_{37}=x_{67}=x_{52}=0$, или $x_{65}=x_{37}=x_{67}=x_{35}=x_{43}=x_{45}=0$, или $x_{65}=x_{37}=x_{46}=x_{36}=x_{43}=x_{45}=0$, или $x_{65}=x_{37}=x_{67}=x_{57}=x_{43}=x_{45}=0$. Если $x_{65}=x_{37}=x_{67}=x_{57}=x_{43}=x_{45}=0$, то из $\operatorname{tr}(HB^2)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, следует $x_{27}=0$. Поэтому случай *ii*) доказан (потому что матрица B имеет только четыре вида и любым образом A и B сопряжением приводятся к виду (3)).

III) Пусть $x_{61}=x_{71}=0$. Легко видеть, что $x_{31}=x_{42}=x_{41}=0$. Решая $F_1=0$, $F_3'=0$, получаем $x_{45}=0$ или $x_{51}=x_{62}=0$.

Если $x_{45}\neq 0$, можно считать $x_{45}=1$, $x_{51}=x_{62}=0$. Решая $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, получаем $x_{21}=0$, $x_{32}=0$.

Пусть $x_{45}=0$. Решая $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, получаем $x_{21}=0$, $x_{43}=0$. Если $x_{51}=0$, то все уже доказано. Если это не так, то можно считать $x_{51}=1$. Таким образом, решая $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$, $\operatorname{tr}(H^2B^3)=0$, $\operatorname{tr}(HB^2H^2B)=0$, $\operatorname{tr}(HBH^2B^2)=0$, $\operatorname{tr}(H^3B^3)=0$, $\operatorname{tr}(HB^2)=0$, $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, $T_4''=0$, получаем $x_{32}=x_{35}=x_{65}=x_{75}=0$, или $x_{32}=x_{35}=x_{65}=x_{46}=x_{47}=0$, или $x_{32}=x_{35}=x_{65}=x_{62}=x_{47}=0$. Если $x_{47}\neq 0$, то $x_{32}=x_{35}=x_{65}=x_{75}=0$ и $x_{46}x_{62}+x_{47}x_{72}=0$ (из $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$). Сопрягая A и B подходящей матрицей вида $\operatorname{diag}\left(E,\begin{bmatrix}1 & 0\\ x_{46} & x_{47}\end{bmatrix}\right)$, перестановочной с A, получаем $x_{46}=0$, $x_{47}=1$. Решая систему $\operatorname{tr}(HB^2)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, получаем $x_{25}=0$. Все доказано. Если $x_{32}=x_{35}=x_{65}=x_{46}=x_{47}=0$, то A и B сопряжением приводятся к виду (3). Если $x_{32}=x_{35}=x_{65}=x_{62}=x_{47}=0$, то из $\operatorname{tr}(H^2B^3)=0$, $\operatorname{tr}(H^3B^4)=0$, $\operatorname{tr}(HB^2)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, получаем $x_{25}=x_{75}=0$, или $x_{46}=0$, или $x_{63}=x_{67}=0$. Следовательно, A и B сопряжением приводятся к виду (3). Случай е) доказан.

ж) $A=\operatorname{diag}(Y_4,Y_3)$. Легко доказать, что $x_{41}=0$.

I) Пусть $x_{71}\neq 0$. Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с A, получаем $x_{71}=1$, $x_{i1}=0$, $i=\overline{2,6}$. Из $\operatorname{tr}(H^2BH^3B)=0$, $\operatorname{tr}(H^2BH^3B)=0$, имеем $x_{45}=x_{46}=0$. Из $\operatorname{tr}(H^2B)=0$, $\operatorname{tr}(HBH^3B)=0$, $\operatorname{tr}(H^2B)^2=0$, $T_3=0$, $T_6'=0$, имеем $x_{35}=x_{42}=x_{75}=0$. Решая систему $\operatorname{tr}(HBH^2B)=0$, $T_1=0$, $T_4'=0$, $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, получаем $x_{43}=x_{47}=0$. Таким образом, A и B сопряжением приводятся к виду (3).

II) Пусть $x_{71}=0$, $x_{61}\neq 0$. Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с A, получаем $x_{21}=x_{51}=x_{71}=0$, $x_{61}=1$. Из $\operatorname{tr}(H^2B)=0$, $\operatorname{tr}(HBH^3B)=0$, $\operatorname{tr}(H^2B)^2=0$, $T_3=0$, $T_6'=0$, получаем $x_{31}=x_{42}=x_{75}=x_{45}=0$. Решая $\operatorname{tr}(H^3B^2)=0$, получаем $x_{46}=0$. Тогда из $\operatorname{tr}(HBH^2B)=0$, $T_1=0$, $T_4'=0$, $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, имеем $x_{43}=x_{35}=x_{25}=x_{65}=0$ или $x_{43}=x_{76}=0$, $x_{72}=-1$, $x_{65}=-x_{32}$.

i) Пусть $x_{43}=x_{35}=x_{25}=x_{65}=0$. Тогда из $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$, $\operatorname{tr}(H^3B^3)=0$, $T_0=0$, $T_3'=0$, $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, имеем $x_{47}=0$ (все доказано) или $x_{36}=x_{32}=x_{76}=x_{72}=0$.

Если $x_{36}=x_{32}=x_{76}=x_{72}=0$, то, решая $\operatorname{tr}(HB^2)^s=0$, $s=\overline{1,4}$, получаем $x_{15}=0$. Таким образом, A и B тоже сопряжением приводятся к виду (3).

ii) Пусть $x_{43}=x_{76}=0$, $x_{72}=-1$, $x_{65}=-x_{32}$. Решая $T_5''=0$, $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$, $T_0=0$, $T_3'=0$, $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, получаем $x_{47}=0$. Таким образом, A и B сопряжением приводятся к виду (3).

III) Пусть $x_{61}=x_{71}=0$. Сопрягая A и B подходящей матрицей, перестановочной с A, получаем $x_{31}=0$. Решая $\operatorname{tr}(H^2B)=0$, $F_2=0$, $T_3=0$, получаем $x_{45}=x_{42}=x_{75}=0$ или $x_{42}=-x_{75}$, $x_{42}x_{75}-x_{45}x_{72}=0$.

i) Пусть $x_{45}\neq 0$. Тогда, сопрягая A и B подходящей матрицей вида $\begin{bmatrix} nE_4 & U \\ M & pE_3 \end{bmatrix}$, перестановочной с A, получаем $x_{42}=x_{72}=x_{75}=0$, $x_{45}=1$. Решая $F_1=0$, $F_3'=0$, получаем $x_{51}=0$. Решая систему $\operatorname{tr}(H^2BHB)=0$, $T_1=0$, $T_4'=0$, получаем $x_{21}=0$ (все доказано) или $x_{62}=x_{73}=0$. Пусть $x_{62}=x_{73}=0$. Тогда, решая $\operatorname{tr}(HB)^2=0$, $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$, $\operatorname{tr}(HB)=0$, $\operatorname{tr}(HB)^3=0$, $T_0=0$, $T_3'=0$, получаем $x_{21}=0$ (все доказано).

ii) Пусть $x_{45}=x_{42}=x_{75}=0$. Тогда из $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, получаем $x_{21}=0$. Решая $\operatorname{tr}(H^2BHB)=0$, получаем $x_{72}=0$ или $x_{46}=-x_{35}$.

Пусть $x_{72}=0$. Тогда из $\operatorname{tr}(H^2B^2)=0$, $T_0=0$, $T_3'=0$, $\operatorname{tr}(H^3B^3)=0$, $\operatorname{tr}(HB)^s=0$, $s=\overline{1,5}$, $T_4''=0$, следует, что A и B сопряжением приводятся к виду (3). Аналогично в случае, если $x_{72}\neq 0$.

Авторы благодарны профессору В.В. Беняш-Кривцу за помощь в проверке вычислений и написании статьи.

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений. М., 1974.
2. Самсонов Ю.Б., Тавгень О.И. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 6. С. 29.
3. Тавгень О.И., Синьсун Ян // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 74.
4. Тавгень О.И., Синьсун Ян // Там же. 2010. № 2. С. 114.
5. Тавгень О.И., Синьсун Ян // Там же. № 3. С. 48.

Поступила в редакцию 01.10.10.

Олег Игнатьевич Тавгень – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры.
Ян Синьсун – аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель – О.И. Тавгень.