

Э.И. ЗВЕРОВИЧ

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА

A new proof of a classical Jordan theorem about simple closed curves on a plane is given.

Символом $\mathbb{C}$ будем обозначать комплексную плоскость с естественной (порожденной евклидовой метрикой) топологией, а символом $\hat{\mathbb{C}}$ - расширенную комплексную плоскость с топологией, порожденной сферической метрикой. Хорошо известно, что некомпактное топологическое пространство является подпространством компактного топологического пространства $\hat{\mathbb{C}}$, гомеоморфного сфере.

Плоской кривой называется непрерывное отображение $z=z(t):[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, где $-\infty < a < b < +\infty$ (далее речь будет идти исключительно о плоских кривых). Кривая называется замкнутой, если $z(a)=z(b)$, и разомкнутой, если $z(a) \neq z(b)$. Носителем кривой $z=z(t)$, $a < b$, называется компактное множество $\gamma := z([a, b])$, т. е. образ отрезка $[a, b]$ при отображении $z=z(t)$. Разомкнутая кривая называется *простой*, или *жордановой*, если отображение $z=z(t):[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ - инъективное (т. е. если $t_1 \neq t_2 \Rightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$). Замкнутая кривая называется *простой*, или *жордановой*, если $t_1 \neq t_2 \Rightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$, кроме случая, когда одно из значений t_1, t_2 параметра t равно a , а другое равно b .

Носитель γ замкнутой жордановой кривой гомеоморфен окружности, а носитель γ разомкнутой жордановой кривой гомеоморфен отрезку $[0, 1]$ числовой оси. Кроме того, если жорданова кривая разомкнута, то оба множества γ и $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ связны и односвязны. В случае, когда жорданова кривая $z=z(t)$ - замкнутая, то-

пологические свойства множества $\hat{C} \setminus \gamma$ описываются следующей теоремой, установленной К. Жорданом в 1882 г.

Теорема Жордана. Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ - носитель простой замкнутой плоской кривой. Тогда

а) открытое множество $\hat{C} \setminus \gamma$ состоит ровно из двух связных односвязных компонент (областей) D_{-}^{∞} и D_{+}^{∞} ; таким образом, $\hat{C} = D_{+}^{\infty} \cup \gamma \cup D_{-}^{\infty}$;

б) замкнутое множество γ является границей как области D_{+}^{∞} , так и области D_{-}^{∞} ; причем все точки множества γ достижимы как из области D_{+}^{∞} , так и из области D_{-}^{∞} .

Первоначальное доказательство самого К. Жордана считалось трудным и неудовлетворительным. В связи с этим теореме Жордана были даны другие доказательства. Одно из первых опубликовал в 1923 г. Э. Шмидт [1]. Оно воспроизведено в монографии П.С. Александрова [2] и занимает там 28 страниц текста (всю вторую главу). Более простые доказательства теоремы Жордана были опубликованы в 1950 г. А.И. Вольпертом [3] и А.Ф. Филипповым [4]. Ниже излагается еще одно доказательство теоремы Жордана, которое, по-видимому, проще любого из упомянутых. Предварительно напоминаю, что граничная точка z_0 области D называется *достижимой*, если существует простая кривая, носитель которой лежит на множестве $D \cup \{z_0\}$, и которая соединяет внутреннюю точку области с точкой z_0 .

Сначала покажем, что каждая точка множества γ является граничной для множества $\hat{C} \setminus \gamma$. Действительно, пусть $z_0 \in \gamma$. Если предположить, что точка z_0 - не граничная, тогда она - внешняя, т. е. должен существовать круг $\{|z - z_0| < r\}$, в котором нет точек множества $\hat{C} \setminus \gamma$. Значит, должно быть $\{|z - z_0| < r\} \subset \gamma$. Но так как множество γ гомеоморфно окружности, то отсюда заключаем, что круг гомеоморфен части окружности, что невозможно, так как при гомеоморфизмах сохраняется размерность. Получено противоречие.

Покажем далее, что γ локально разбивает множество $\hat{C}$, т. е. что каждая точка $z_0 \in \gamma$ имеет такую окрестность $U \subset \mathbb{C}$, что множество $U \setminus \gamma$ не связно.

Действительно, зафиксируем произвольно $z_0 \in \gamma$ и возьмем число $r > 0$ настолько малым, чтобы пересечение окружности $\Gamma := \{|z - z_0| = r\}$ и линии γ содержало не менее двух различных точек. Пусть z_1 и z_2 - две точки множества $\Gamma \cap \gamma$, которые впервые встретятся при движении от точки z_0 вдоль линии γ в противоположных направлениях. Не ограничивая общности, будем считать, что $z_1 = -r$, $z_2 = r$, так как этого можно добиться с помощью вспомогательного дробно-линейного отображения круга $\{|z - z_0| < r\}$ на себя. Обозначим через γ_0 открытую (т. е. не включающую концы) часть линии γ , которая начинается в точке $z_1 = -r$, идет вдоль γ через точку z_0 и оканчивается в точке $z_2 = r$. Покажем, что множество $\{|z - z_0| < r\} \setminus \gamma_0$ не связно. Пусть $\zeta_1 \in \Gamma \setminus \gamma$ и $\zeta_2 \in \Gamma \setminus \gamma$ - две точки окружности Γ , лежащие по разные стороны от кривой γ_0 . Чтобы их получить, заставим точку двигаться соответственно от z_1 и z_2 против часовой стрелки вдоль Γ . Если при этом одной из требуемых точек не окажется, то это будет означать, что объединение кривой γ_0 и соответствующей полуокружности совпадает со всей кривой γ_0 . Таким образом, надлежащее уменьшение радиуса окружности Γ гарантирует существование точки ζ_1 на верхней полуокружности и точки ζ_2 на нижней полуокружности. Возьмем простую кривую γ_1 , лежащую в круге $K := \{|z - z_0| < r\}$ и соединяющую точки ζ_1 и ζ_2 . Достаточно показать, что $\gamma_0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$.

Предполагая противное: $\gamma_0 \cap \gamma_1 = \emptyset$, заключаем, что замыкания $\bar{\gamma}_0$ и $\bar{\gamma}_1$ находятся между собой на положительном расстоянии d . Поэтому точки кривой $\bar{\gamma}_1$ не мо-

гут попасть в криволинейную полосу, которую «замегают» открытые круги радиуса d с центрами, лежащими на кривой γ_0 . В эту полосу не может попасть, в частности, и концевая точка ζ_2 . Поэтому она должна лежать на верхней полуокружности, а по построению она лежит на нижней полуокружности. Полученное противоречие означает, что точки верхней и нижней полуокружностей невозможно соединить кривой, лежащей внутри круга и не пересекающей линию γ_0 . Таким образом, линия γ_0 , соединяя две точки окружности Γ , разбивает круг $K := \{|z - z_0| < r\}$ на две связные компоненты («полукруги»). В этих «полукругах» могут находиться части линии γ , которые не пересекаются с линией γ_0 . Выбросив все эти части линии γ из обоих «полукругов», получим в результате открытое множество, число связных компонент которого в каждом «полукруге» не меньше, чем было до выбрасывания. Обозначим через U_1 и U_2 две из этих компонент, в границу которых входит дуга γ_0 . Множество $U := U_1 \cup \gamma_0 \cup U_2$ и есть требуемая открытая связная односвязная окрестность точки z_0 . Такую окрестность условимся называть «круговая срезка».

Символом D^- обозначим ту связную компоненту множества $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, которая содержит точку ∞ . Покажем, что граница области D^- совпадает с множеством γ . Предварительно установим, что на множестве γ имеется по меньшей мере одна граничная точка области D^- . Чтобы ее найти, возьмем произвольную точку $z^* \in \gamma$ и произвольный луч $[z^*, \infty)$. Пусть $z^{**} \in \gamma$ - последняя точка пересечения этого луча с линией γ . Так как $(z^{**}, \infty] \subset D^-$, то z^{**} - граничная точка области D^- , притом достижимая. Пусть γ^* - граница области D^- . Как и всякая граница, множество γ^* - замкнутое, причем $z^{**} \in \gamma^* \subset \gamma$, а множество γ - открыто-замкнутое (в Индуцированной топологии). Пусть теперь $\hat{z} \in \gamma^*$ - произвольная точка. Поскольку $\hat{z} \in \gamma^*$, то γ разбивает некоторую окрестность точки $\hat{z}$ на две связные компоненты, одна из которых содержится в D^- . Значит, $\hat{z}$ - внутренняя точка границы γ^* , и потому γ^* - непустое открыто-замкнутое подмножество множества γ . Таким образом, $\gamma^* = \gamma$.

Покажем теперь, что множество $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ не связно (т. е. линия γ разбивает множество $\hat{\mathbb{C}}$). Предположим противное, т. е. что множество $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ связно и, значит, совпадает с D^- . Возьмем любую точку $z_0 \in \gamma$ и, пользуясь тем, что γ локально разбивает $\hat{\mathbb{C}}$, найдем открытую и связную окрестность U точки z_0 («круговую срезку») такую, что $U \setminus \gamma = U^+ \cup U^- \subset D^-$. Возьмем произвольные точки $z_1 \in U^+$, $z_2 \in U^-$ и, пользуясь связностью области D^- , найдем кривую L с носителем в D^- (т. е. не пересекающую линию γ), которая соединяет точки z_1 и z_2 . Так как линия γ гомеоморфна окружности, а точки z_1 и z_2 лежат по разные стороны от нее, то линия L пересекает линию γ . Полученное противоречие показывает, что множество $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ не связно, причем точки z_1 и z_2 принадлежат различным его связным компонентам. Пусть, например, $z_2 \in D^-$. Тогда $z_1 \notin D^-$. Символом D^+ обозначим ту связную компоненту множества $\hat{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, которая содержит точку z_1 . Ясно, что $D^+ \cap D^- = \emptyset$. Аналогично предыдущему можно показать, что граница области D^+ совпадает с γ . Таким образом, имеем $D^+ \cup \gamma \cup D^- \subset \hat{\mathbb{C}}$, а наша задача - показать, что $D^+ \cup \gamma \cup D^- = \hat{\mathbb{C}}$. С этой целью вспомним, что γ - компактное множество, гомеоморфное окружности, и потому любое ее покрытие семейством множеств, гомеоморфных интервалу $(0, 1)$ числовой оси, содержит конечное подпокрытие. Отсюда следует, что множество γ может быть покрыто и конечным семейством «круговых срезов», одна из которых уже была нами построена. Добавляя к этому покрытию области D^+ и D^- , получим конечное открытое покрытие множества $D^+ \cup \gamma \cup D^-$. Значит, это множество - непустое

открыто-замкнутое подмножество сферы $\hat{\mathbb{C}}$. А так как сфера связна, то имеем $D^+ \cup \gamma \cup D^- = \hat{\mathbb{C}}$.

Для доказательства достижимости граничных точек заметим, что обе замкнутые области $\bar{D}^+ = D^+ \cup \gamma$ и $\bar{D}^- = D^- \cup \gamma$ - локально связные, т. е. любая окрестность каждой точки этих множеств содержит связную окрестность. Действительно, связные окрестности точек из D^+ и из D^- можно взять в виде открытых кругов сколь угодно малых радиусов, а связные окрестности точек множества γ - в виде гомеоморфных открытым кругам «круговых срезов» в кругах сколь угодно малых радиусов.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \gamma$ и покажем, что она достижима со стороны области D^+ . С этой целью используем строго убывающую к нулю последовательность положительных чисел $(r_n)_{n=1}^\infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим «круговую срезку» U_n с помощью круга $\{|z - z_0| < r_n\}$. Обозначая $V_n := \bar{D}^+ \cap U_n$, получаем последовательность связных односвязных компактных окрестностей точки z_0

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \dots \supset \bar{V}_n \supset \dots,$$

пересечение которых состоит из одной точки. Фиксируя для каждого $n \in \mathbb{N}$ точку $z_n \in \bar{V}_n \cap \{|z - z_0| = r_n\}$, получим последовательность точек $(z_n)_{n=1}^\infty$ сходящуюся к точке z_0 . Пользуясь связностью построенных окрестностей, соединим каждую точку z_n со следующей точкой z_{n+1} жордановой кривой L_n , лежащей в $\bar{V}_n$. Композиция всех этих кривых (т. е. кривая, которая получается в результате последовательного прохождения кривых L_n) и будет жордановой кривой, лежащей в области D^+ и оканчивающейся в точке z_0 . Так как точка $z_0 \in \gamma$ была выбрана произвольно, то все точки множества γ достижимы со стороны области D^+ . Аналогично можно показать, что все точки множества γ достижимы и со стороны области D^- .

1. Schmidt E. // Sitzungsberichtet.preussischenAkademied.Wiss. 1923. 28. S. 318.
2. Александров П. С. Комбинаторная топология. М; Л., 1947.
3. Вольперт А. И. // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5. Вып. 5. С. 168.
4. Филиппов А. Ф. // Там же. С. 173.

Поступила в редакцию 21.02.05.

Эдмунд Иванович Зверович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций.