УДК 519.1

П.В. СКУМС

КРАУСОВА ДЕКОМПОЗИЦИЯ В СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССАХ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

The criterion of belonging of graphs of the form K_n-EK_m to the class of edge intersection graphs of linear k-uniform hypergraphs is obtained. This criterion allows to obtain an explicit expression for krausz dimension of such graphs. For split graphs with high enough vertex degrees the analogue of the classical Whitney theorem is proved.

1. Введение. Граф пересечений ребер $L(H)$ гиперграфа H определяется следующими условиями:

1) вершины графа $L(H)$ биективно соответствуют ребрам гиперграфа H;

2) две вершины смежны в $L(H)$ тогда и только тогда, когда соответствующие ребра пересекаются.

Гиперграф называется *k-униформным,* если каждое его ребро содержит в точности k вершин. В *линейном* гиперграфе никакие два ребра не имеют более одной общей вершины. Класс графов пересечений ребер линейных k-униформных гиперграфов обозначается через L_k^l . *Краусовой размерностью* kdim (G) графа G называется параметр min $\{k{:}G\in L_k^l\}$.

Известно, что задача распознавания

$$«G\in L_k^l» \tag{1}$$

является NP-полной для любого фиксированного $k\geq3$ [1], что также влечет NP-трудность задачи нахождения краусовой размерности. Естественным подходом в данной ситуации представляется поиск классов графов, в которых эти задачи будут полиномиально разрешимы.

В [2] доказано, что для любого фиксированного k множество расщепляемых графов пересечений ребер линейных k-униформных гиперграфов характеризуется конечным списком запрещенных подграфов. При этом существование этого списка доказывалось неконструктивно. Кроме того, в [2] показано, что уже при k=3 данный список содержит достаточно много графов, так что при больших k его нахождение проблематично. Вопрос о сложности вычисления краусовой размерности расщепляемых графов до сих пор открыт. Так что разумным представляется еще более сузить рассматриваемый класс графов. В частности, независимо от [2] одним из основоположников теории графов пересечений Л. Байнеке рассматривалась проблема нахождения краусовой размерности полного графа без одного ребра, что уже оказалось нетривиальной задачей (см. [1]).

Нами рассматривается обобщение задачи Байнеке. Получен критерий принадлежности графов вида K_n-EK_m классу L_k^l , позволяющий явно вычислить краусову размерность таких графов. Кроме того, для расщепляемых графов, имеющих вершину достаточно большой степени, доказан аналог классической теоремы Уитни.

2. Расщепляемые графы и краусовы покрытия. Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Кликой* (*независимым множеством*) называется множество попарно смежных (несмежных) вершин графа. Клику, содержащую не менее $к$ вершин, будем называть *$\geq k$-кликой.* Через $N(x)$ обозначим окружение вершины x, для множества вершин B его окружение $N(B)=\bigcup_{x\in B} N(x)$

Граф G называется *расщепляемым,* если существует разбиение множества его вершин $VG=A\cup B$ на клику А и независимое множество B. Если A- максимальная клика, то такое разбиение называется *полярным* и обозначается через (A, B). При этом A и B называются *верхней* и *нижней долями* соответственно. Конечное семейство $C=\{C_i: i \in I\}$ клик графа G называется *покрытием,* а каждая клика C_i - *кластером* покрытия C, если $G=\bigcup_{i\in I} C_i$. Любое подсемейство C *называется* его *фрагментом.* Будем говорить, что кластер C_0 *покрывает* вершину x или ребро xy, если соответствующие вершины содержатся в C_0. Кластер назовем *нетривиальным,* если он содержит более одной вершины. Через $C(x_1, ..., x_r)$ будем обозначать кластер покрытия С, содержащий вершины $x_1,..., x_r$ и, возможно, другие вершины.

Покрытие C называется *краусовым k-покрытием,* если каждое ребро графа G входит ровно в один кластер C и каждая вершина G входит не более чем в k кластеров C. Будем говорить о краусовом покрытии или просто покрытии, если из контекста ясно, о каком $к$ идет речь. Представление графа в виде объединения кластеров краусова покрытия называется его *краусовой декомпозицией.*

Теорема 1 [3]. *Граф G принадлежит классу , L_k^l если и только если существует его краусово k-покрытие.*

3. Характеризация графов вида K_n-EK_m из . L_k^l Пусть $G=K_n\text{-}EK_m$, $m<n$. Очевидно, что G является расщепляемым графом с полярным разбиением (A, B), где A - наибольшая клика мощности $n\text{-}m+1$, B - независимое множество мощности $m-1$, $|N(x)|=n\text{-}m$ для любого $x\in B$.

Лемма 1. *Если C_0 - кластер некоторого краусова k-покрытия графа G и вершина x смежна с не менее чем $k+1$ вершиной из C_0, то $x \in C_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $C_0=\{x_1, ...,x_{k+1}\}$ и пустьx не содержится в C_0. Но тогда ребра x_ix должны покрываться различными кластерами. Это значит, что x будет покрыта $k+1$ кластером краусова k-покрытия, что противоречит опреде-лению последнего. Лемма доказана.

Пусть $B=\{u_1, ..., u_{m-1}\}$, $A\backslash N(B)=\{v\}$.

Лемма *2. Если $\geq(k+1)$-клика C_0 является кластером некоторого краусова покрытия графа G, то либо $C_0=A$, либо $C_0=(A\backslash\{v\}) \cup \{u_i\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $C_0=\{x_1, ..., x_{k+1}\}$ и пусть $y\in A\backslash\{v\}$. Тогда вершина y смежна с $k+1$ вершиной из C_0, и по лемме 1 $y \in C_0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $n\text{-}m>k+1$, то не существует краусова покрытия, в котором $>(k+1)$-клика является кластером.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть такое покрытие существует. Тогда, согласно лемме 2 и не ограничивая общности, имеем, что А - кластер покрытия. Поскольку для любого $i \in \{1, ..., m\text{-}1\}$ u_i смежна с $k+1$ вершиной из А, то все u_i должны содержаться в А. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Лемма 4. *Если $n\text{-}m>k(k\text{-}2)$, то не существует краусова покрытия графа G такого, что v и u_i, $i\in \{1, ..., m\text{-}1\}$, содержатся ровно в к нетривиальных кластерах.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Докажем утверждение леммы для вершины v.

Пусть существует краусово покрытие графа G. Так как $|N(u_1)|=n\text{-}m>k(k\text{-}2)$, то существует кластер C_0, такой, что $u_1\in C_0$, $|C_0|\geq k$. В силу леммы 3 имеем $|C_0|=k$, $C_0=\{t_1, \ldots, t_{k\text{-}1}, u_1\}$.

Покажем, что любой нетривиальный кластер, покрывающий v, должен пересекаться с C_0. Действительно, пусть существует такой кластер C_1, что $C_1\cap C_0=\varnothing$, $v\in C_1$, и пусть $t\in C_1\backslash\{v\}$. Тогда t должна покрываться не менее чем k+1 кластером: C_1, $C(t, u_1)$, $C(t, t_1)$, ..., $C(t, t_{k\text{-}1})$. Получено противоречие.

Пусть C_v - фрагмент, содержащий все нетривиальные кластеры, покрывающие v. Тогда все они должны иметь с C_0 общую вершину, причем по определению краусова покрытия соответствие между кластерами из C_v и вершинами из C_0 соответствующего кластера биективное. Следовательно, если $|C_v|=k$, то существует кластер из C_v, пересекающийся с C_0 по вершине u_1, что невозможно, поскольку v и u_1 несмежны. Лемма доказана.

Теорема 2. $G=K_n\text{–}EK_m\in L_k^l$ *тогда и только тогда, когда* $m\leq k$ и $n\text{-}m\leq(k\text{-}1)^2$.

Доказательство . Докажем сначала необходимость. Из теоремы 1 следует, что любой граф из L_k^l не содержит звезду $K_{1,\,k+1}$ в качестве порожденного подграфа, что влечет необходимость условия $m\leq k$.

Пусть $|N(v)|=n\text{-}m\geq(k\text{-}1)^2+1$. Согласно лемме 4 вершина v покрывается не более чем k-1 кластерами краусова покрытия. Но тогда среди этих кластеров существует один, мощность которого не меньше чем k+1, что невозможно по лемме 3.

В силу наследственности класса L_k^l достаточность можно доказать только для случая $n\text{-}m=(k\text{-}1)^2$, $m=k$.

Разделим $N(v)$ произвольным образом на k-1 клику по k-1 вершине в каж-дой. Полученные клики, объединенные с вершиной v, будут кластерами крау-сова покрытия, содержащими v. Удалим из G все ребра подграфов, порожден-ных образованными кластерами, и вершину v. Получим полный k-дольный граф H с k-1 вершиной в каждой доле.

Пусть H_1, ..., H_k - доли графа H. Назовем k-множеством подмножество вершин графа H вида $\{x_1,..., x_k\}$, где $x_i\in H_i$, а реберным k-множеством - множество ребер подграфа, порожденного этим k-множеством. Достаточно показать, что для H существует краусово (k-1)-покрытие с k-множествами в качестве кластеров.

Множество VH можно разбить на k-1 непересекающихся k-множеств

$$\frac{(k-1)^k(k-2)^k...2^k\cdot 1^k}{(k-1)!}=((k\text{–}1)!)^{k\text{–}1}$$

способами. Любой такой набор k-множеств назовем разбиением. Произвольное разбиение, в свою очередь, порождает набор из k-1 попарно непересекающихся реберных k-множеств. Краусово (k-1)-покрытие можно рассматривать как набор из k-1 разбиений, такой, что соответствующие этим разбиениям реберные k-множества попарно не пересекаются.

Будем говорить, что ребро e входит в разбиение (или разбиение содержит ребро e), если оно входит в какое-либо реберное k-множество, порожденное этим разбиением. Аналогичное определение введем для набора разбиений.

Предположим, что искомого набора разбиений не существует. Всего таких наборов

$$\binom{((k-1)!)^{k-1}}{k-1}.$$

Любое разбиение содержит $(k\text{-}1)^2$ k-множеств, а каждое реберное k-множество содержит $\frac{k(k-1)}{2}$ ребер. Если бы существовал искомый набор разбиений, то он содержал бы

$$(k-1)^2\frac{k(k-1)}{2}=\frac{k(k-1)^3}{2}$$

ребер. Но по предположению такого набора не существует, поэтому имеем

$$|EH|<\frac{\binom{((k-1)!)^{k-1}}{k-1}\frac{k(k-1)^3}{2}}{l}, \tag{2}$$

где l - число вхождений произвольного ребра в различные наборы разбиений.

Фиксируем ребро xy. Пусть имеется произвольное разбиение и в нем k-множество M, содержащее вершину x,D - доля, содержащая y. Вершину из D, входящую в M, можно выбрать k-1 способами. Но если известно, что реберное k-множество, порожденное M, должно содержать ребро xy, то вариант выбора вершины из D только один - это должна быть вершина y. Таким образом, число разбиений, содержащих ребро xy, в k-1 раз меньше, чем число всех разбиений, и оно равно $\frac{((k-1)!)^{k-1}}{k-1}=p$. Пусть также $r=k\text{-}1$.

Вычислим, сколько раз учитываются элементы из p-элементного подмножества A pr-элементного множества B в сочетаниях из r элементов. Количество сочетаний из r элементов, содержащих i элементов из A, равно $\binom{p}{i}\binom{(r-1)p}{r-i}$, и элементы из A учитываются в них $i\binom{p}{i}\binom{(r-1)p}{r-i}$ раз. Имеем:

$$l=\sum_{i=0}^{r}(r-i)\binom{p}{r-i}\binom{(r-1)p}{i}=\sum_{i=0}^{r}r\binom{p}{r-i}\binom{(r-1)p}{i}-$$
$$-\sum_{i=0}^{r}i\binom{p}{r-i}\binom{(r-1)p}{i}=r\binom{rp}{r}-q, \tag{3}$$

где q - число вхождений элементов из $B\backslash A$ в сочетания из r элементов. Поскольку $\frac{|B\setminus A|}{|A|}=r-1$, то $\frac{q}{l}=r-1$. Подставив это равенство в (2), имеем

$$l=\binom{r\cdot p}{r}.$$

Перейдя к прежним обозначениям, получаем

$$l=\binom{((k-1)!)^{k-1}}{k-1}.$$

Подставив теперь l в (1), получим $|EH|<\frac{k(k-1)^3}{2}=|EH|$. Данное противоречие доказывает теорему.

4. О теореме Уитни. Теорема Уитни об изоморфизмах реберных графов простых графов известна в следующей формулировке:

Теорема 3 [3]. *Пусть G и H - связные графы порядка* >4, $L(G)\cong L(H)$. *Тогда* $G\cong H$.

Известно, что эта теорема, вообще говоря, не переносится на произвольный класс L_k^l

Теорема 4 [4]. *Число попарно неизоморфных линейных k-униформных гиперграфов, реберные графы которых изоморфны графу G, равно числу орбит группы автоморфизмов* Aut *G на множестве краусовых покрытий G.*

Теорема 5. *Пусть G-расщепляемый граф с полярным разбиением (A, B) и минимальной степенью вершин* $\delta(G) \geq (k\text{-}1)^2$. *Тогда если* $G \cong L(H_1)$, $G \cong L(H_2)$, где H_1, H_2 *— линейные k-униформные гиперграфы,* то $H_1 \cong H_2$.

Доказательство. Достаточно провести для случая, когда в B существует вершина степени $(k\text{-}1)^2$. Пусть $G \in L_k^l$, C - произвольное краусово покрытие графа G, $v \in B$, $\deg(v)=(k-1)^2$, $u_0 \in A \setminus N(v)$ - фиксированная вершина. По лемме 4 в подграфе, порожденном множеством $(N(u_0) \cap N(v)) \cup \{u_0, v\}$, вершина u_0 покрывается ровно k-1 нетривиальным кластером $C_1'(u_0), \ldots, C_{k-1}'(u_0)$, $|C_i'(u_0)|=k$. Кластеры C, покрывающие v, имеют вид $\{v, x_1, \ldots, x_{k\text{-}1}\}$, где $x_i \in C_i'(u_0)$.

Теперь ясно, что фрагмент C, покрывающий u_0, состоит из следующих кластеров: $C_0(u_0) \supset A \setminus (N(v) \cup \{v\})$, $C_i(u_0) \supset C_i'(u_0)$, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, где в каждый кластер $C_i(u_0)$, возможно, входит еще одна вершина из B.

Для произвольной вершины $u \in A \setminus (N(v) \cup \{u_0\})$ покрывающие ее кластеры имеют вид $C_0(u) \supset A \setminus (N(v) \cup \{v\})$, $C_i(u) \supset \{u, y_1, \ldots, y_{k-1}\}$, $y_j \in C_j'(u_0)$ $i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, где также в каждый кластер $C_i(u)$, возможно, входит еще одна вершина из B.

Рассмотрим теперь произвольную вершину $w \in B \setminus \{v\}$. Если $N(w) \subseteq N(v)$, то покрывающие w кластеры имеют вид $\{w, z_1, \ldots, z_p\}$, где z_i принадлежат различным $C_i'(u_0)$.

Пусть существует вершина $u \in A \setminus N(v)$, смежная с w. Поскольку вид кластеров, покрывающих u, уже определен, то w содержится либо в $C_0(u)$ и, значит, смежна со всеми вершинами из $A \setminus (N(v) \cup \{v\})$, либо содержится в $C_i(u)$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\text{-}1\}$ и тогда смежна с не менее чем k-1 вершиной из $N(v)$.

Эти случаи взаимоисключающие. Действительно, если $w \in C_i(u)$ и w смежна со всеми вершинами из $A \setminus N(v)$, то тогда кластер $C_i(u)$ содержит k+1 вершин, смежных со всеми вершинами из $A \setminus N(v)$. Тогда все вершины из $A \setminus N(v)$ входят в $C_i(u)$, и, следовательно, $C_i(u)=A$.

Наконец, поскольку вид кластеров, покрывающих вершины из $A \setminus N(v)$ и B, нам уже известен, удалим эти вершины из G. Если в полученном графе еще остались ребра, то кластеры, их покрывающие, имеют вид $\{x_1, \ldots, x_{k\text{-}1}\}$, где $x_i \in C_i'(u_0)$.

Таким образом, доказано, что кластеры покрытия C определены однозначно с точностью до нумерации вершин. По теореме 4 имеем искомое.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS и правительства Республики Беларусь (проект INTAS 03-50-5975).

1. Hlinëny P., Kratochvil J. // Lecture notes in Computer Science. 1997. № 1335. P. 214.
2. Метельский Ю. М. // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 117.
3. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam, 1989.
4. Левин А. Г., Тышкевич Р. И. // Дискрет, математика. 1993. Т. 5. № 1. С. 112.

Поступила в редакцию 16.11.04.

Павел Валентинович Скумс - аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Р.И. Тышкевич.