УДК 519.10

В.М. КРАВЦОВ

ОБ ОДНОМ ТИПЕ МАКСИМАЛЬНО НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

The existence of maximal non-integer vertices of the three-index axial assignment problem polytope which have different structures and referred to one type is established.

Для многогранника $M(3, n)=\{x=\|x_{ijt}\|_n : x_{ijt}\geq 0 \ \forall (i, j, t)\in N_n^3,\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \forall t\in N_n,$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \forall j\in N_n,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{ijt} = 1 \ \forall i\in N_n\}$, где $n\geq 2$, $N_n=\{1, 2, \ldots, n\}$, $N_n^3 = N_n\times N_n\times N_n$, трехиндексной аксиальной задачи о назначениях одна из основных проблем связана с описанием его типов максимально нецелочисленных вершин (м. н. в.), т.е. вершин, число дробных компонент у которых равно $3n$-2. Идентификация типов вершин многогранника проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой его вершины. Под двумерным сечением ориентации (i,j) трехиндексной матрицы $x=\|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением индекса t будем понимать двухиндексную матрицу $x^t = \left\|x_{ij}^t\right\|_n$, элементы которой определяются как $x_{ij}^t = x_{ijt}$

$\forall(i, j)\in N_n^2$. Таким образом, у матрицы x имеются двумерные сечения ориентации (i, j), (i, t), (j, t).

Две вершины x и x многогранника $M(3, n)$ назовем неэквивалентными, если матрица x не может быть получена из матрицы x путем перестановки ее двумерных сечений. Естественно считать, что только неэквивалентные вершины этого многогранника имеют различные структуры.

В [1] указаны три типа неэквивалентных м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n\geq 4$. В работах [2, 3] приведено $\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-3\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]-2\right)+n+2\left[\frac{n}{2}\right]-9$ новых типов неэквивалентных м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n\geq 1$.

Число дробных компонент матрицы $x\in M(3, n)$, содержащихся в двумерном сечении ориентации (g, h) с фиксированным индексом s, обозначим через $z\left(x_{gh}^s\right)$, а вектор, составленный из компонент $z\left(x_{gh}^1\right), z\left(x_{gh}^2\right), \ldots, z\left(x_{gh}^n\right)$, - через $z(x, (g, h))$.

Согласно [1] будем говорить, что м. н. в. x многогранника $M(3, n)$, $n\geq 3$, име-ет тип $A=A(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3)$, если количество дробных компонент, содержа-щихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$z\left(x,(g,h)\right)=\left(3, \ldots, 3, \underbrace{2}_{p_l\text{-е место}}, 3, \ldots, 3, \underbrace{2}_{q_l\text{-е место}}, 3, \ldots, 3\right)\ \forall(g,h)\in Q,$$

где $Q=\{(i, j), (i, t), (j, t)\}$, p_l, $q_l\in N_n$, $p_l\neq q_l$, $l=1,2,3$, а числа p_1, q_1 соответствуют паре (i, j), числа p_2, q_2 - паре (i, t), числа p_3, q_3 - паре (j, t).

В настоящей работе получено опровержение предположения, высказанного в [1], согласно которому значения ненулевых элементов любой матрицы, представляющей м. н. в. типа A многогранника $M(3, n)$, $n\geq 3$, не зависят от числа n и принадлежат множеству $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. Тем самым установлено существование м. н. в. указанного типа, имеющих различные структуры.

1. Предварительные результаты

Известно [4, 5], что ранг матрицы системы ограничений трехиндексной аксиальной транспортной задачи порядка $m\times k\times k$ равен числу $m+k+l$-2. Принимая во внимание этот факт, методом от противного легко доказать следующее

Утверждение 1. Для того чтобы матрица x была м. н. в. многогранника $M(3, n)$, необходимо, чтобы она содержала $3n$-2 положительных элементов и для любых непустых подмножеств I, J, T множества N_n выполнялось неравенство $|x(I, J, T)|\leq|I|+|J|+|T|-2$, где $x(I, J, T)=\{(i, j, t)\in I\times J\times T: x_{ijt}>0\}$ $(|\varnothing|=0)$.

Утверждение, обратное к утверждению 1, неверно.

Зафиксируем число $m\in N_{n-1}$ и пусть I_1, J_1, T_1 - некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности m множества N_n. Положим $I_2=N_n\backslash I_1$, $J_2=N_n\backslash J_1$ $T_2=N_n\backslash T_1$. Так как $m\leq n$-1, то $I_2\neq\varnothing$, $J_2\neq\varnothing$, $T_2\neq\varnothing$. Для двух троек под-множеств (I_1, J_1, T_1) и (I_2, J_2, T_2) определим многогранники

$$M\left(I_s, J_s, T_s\right)=\Big\{x=\left\|x_{ijt}\right\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}: \sum_{i\in I_s}\sum_{j\in J_s}x_{ijt}=1\ \ \forall t\in T_s,\ \sum_{i\in I_s}\sum_{t\in T_s}x_{ijt}=1\ \ \forall j\in J_s,$$
$$\sum_{j\in J_s}\sum_{t\in T_s}x_{ijt}=1\ \ \forall i\in I_s,\ x_{ijt}\geq 0\ \ \forall\left(i, j, t\right)\in I_s\times J_s\times T_s\Big\},\ s=1, 2.$$

Замечание 1. Многогранники $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(I_2, J_2, T_2)$ отличаются от многогранников $M(3, m)$ и $M(3, n-m)$ соответственно лишь нумерацией элементов их матриц. При $m=1$ многогранник $M(I_1, J_1, T_1)$, а при $m=n$-1 многогранник $M(I_2, J_2, T_2)$ вырождается в точку.

Для вершины $y^s=\left\|y_{ijt}^s\right\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ многогранника $M(I_s,\ J_s,T_s)$, s=1, 2, введем множество $K(I_s,\ J_s,T_s,\ y)$=$\{(i,j,\ t)\in I_s,\times J_s,\times T_s$: y_{ijt}^s >0}.

С помощью утверждения 1 доказывается

Лемма 1. Пусть $y^s=\left\|y_{ijt}^s\right\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ - некоторая м. н. в. многогранника $M(I_s,\ J_s,T_s)$, s=1, 2. Тогда для любых двух троек индексов $(i_s,j_s,\ t_s)\in K(I_s,J_s,T_s,\ y^s)$, s=1, 2, удовлетворяющих условию $y_{i_1,j_1,t_1}^1\neq y_{i_2,j_2,t_2}^2$, и любого числа $r\in\{1,\ 2,\ 3\}$ матрица $x^r=\left\|x_{ijt}^r\right\|_n$ с элементами

$$x_{ijt}^r=y_{ijt}^s\quad\forall(i,\ j,t)\in K\left(I_s,J_s,T_s,y^s\right)\setminus\left\{\left(i_s,\ j_s,t_s\right)\right\},\ s=1,\ 2,$$

$$x_{ijt}^r=y_{ijt}^s-\theta,\ \text{если}\ (i,\ j,t)=\left(i_s,\ j_s,t_s\right),\ s=1,\ 2,$$

$$x_{ijt}^1=\theta\ \ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_1,\ j_2,t_1\right),\left(i_2,\ j_1,t_2\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^2=\theta\ \ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_2,\ j_1,t_1\right),\left(i_1,\ j_2,t_2\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^3=\theta\ \ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_1,\ j_1,t_2\right),\left(i_2,\ j_2,t_1\right)\right\},$$

x_{ijt}^r= 0для остальных$(i,\ j,\ t)\in N_n^3$, является вершиной многогранника $M(3,\ n)$, число дробных компонент у которой равно $3n$-3, где θ= min $\left\{y_{i_1,j_1,t_1}^1,\ y_{i_2,j_2,t_2}^2\right\}$

С использованием леммы 1 и утверждения 1 легко также доказать следующую лемму, дающую простую процедуру **а** построения м. н. в. многогранника $M(3,\ n)$ на основе м. н. в. многогранников $M(I_1,\ J_1,\ T_1)$ и $M(I_2,\ J_2,\ T_2)$.

Лемма 2. Пусть $n\geq4$, $|I_s|=|J_s|=|T_s|\geq2$ и $y^s=\left\|y_{ijt}^s\right\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ - некоторая м.н. в. многогранника $M(I_s,\ J_s,T_s)$, s=1, 2. Тогда для любых четырех троек индексов $(i_s,\ \ j_s,\ \ t_s)$, $\left(i_s',\ j_s',\ t_s'\right)\in$ $K(I_s,J_s,T_s,y^s)$, s= 1, 2, удовлетворяющих условиям

$$y_{i_1,j_1,t_1}^1\neq y_{i_2,j_2,t_2}^2,\ y_{i_1',j_1',t_1'}^1\neq y_{i_2',j_2',t_2'}^2, \tag{1}$$

и любого числа $r\in N_6$ матрица $x_r=\left\|x_{ijt}^r\right\|_n$ с элементами

$$x_{ijt}^r=y_{ijt}^s\quad\forall(i,\ j,t)\in K\left(I_s,J_s,T_s,y^s\right)\setminus\left\{\left(i_s,\ j_s,t_s\right),\left(i_s',\ j_s',t_s'\right)\right\},\ s=1,2,$$

$$x_{ijt}^r=y_{ijt}^s-\theta,\ \text{если}\ (i,\ j,t)=\left(i_s,\ j_s,t_s\right),$$

$$x_{ijt}^r=y_{ijt}^s-\theta',\ \text{если}\ (i,\ j,t)=\left(i_s',\ j_s',t_s'\right),\ s=1,\ 2,$$

$$x_{ijt}^1=\theta\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_1,\ j_2,t_1\right),\ \left(i_2,\ j_1,t_2\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^1=\theta'\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_2',\ j_1',t_1'\right),\left(i_1',\ j_2',t_2'\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^2=\theta\ \ \forall(i,j,t)\in\left\{\left(i_1,j_2,t_1\right),\left(i_2,j_1,t_2\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^2=\theta'\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_1',\ j_1',t_2'\right),\left(i_2',\ j_2',t_1'\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^3=\theta\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_2,\ j_1,t_1\right),\left(i_1,\ j_2,t_2\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^3=\theta'\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_1',\ j_2',t_1'\right),\left(i_2',\ j_1',t_2'\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^4=\theta\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_2,\ j_1,t_1\right),\left(i_1,\ j_2,t_2\right)\right\},$$

$$x_{ijt}^4=\theta'\ \forall(i,\ j,t)\in\left\{\left(i_1',\ j_1',t_2'\right),\left(i_2',\ j_2',t_1'\right)\right\},$$

$$x^5_{ijt}=\theta\ \ \forall(i,j,t)\in\{(i_1,j_1,t_2),(i_2,j_2,t_1)\},$$
$$x^5_{ijt}=\theta'\ \ \forall(i,j,t)\in\{(i'_1,j'_2,t'_1),(i'_2,j'_1,t'_2)\},$$
$$x^6_{ijt}=\theta\ \ \forall(i,j,t)\in\{(i_1,j_1,t_2),(i_2,j_2,t_1)\},$$
$$x^6_{ijt}=\theta'\ \ \forall(i,j,t)\in\{(i'_2,j'_1,t'_1),(i'_1,j'_2,t'_2)\},$$

$x^r_{ijt}=0$ для остальных $(i,\ j,\ t)\in N^3_n$, является м. н. в. многогранника $M(3,\ n)$, где $\theta=\min\left\{y^1_{i_1,j_1,t_1},\ y^2_{i_2,j_2,t_2}\right\}$, $\theta'=\min\left\{y^1_{i'_1,j'_1,t'_1},\ y^2_{i'_2,j'_2,t'_2}\right\}$.

Замечание 2. Отметим, что лемма 2 остается справедливой и для случая, когда $n\geq4$, $|I_2|=|J_2|=|T_2|=1$. Тогда $(i_2,\ j_2,\ t_2)=(i'_2,\ j'_2,t'_2)$ условие (1) заменяем на $y^1_{i_1,j_1,t_1}+y^1_{i'_1,j'_1,t'_1}\neq1$, а величина θ' вычисляется по формуле $\theta'=\min\left\{y^1_{i'_1,j'_1,t'_1},\ 1-\theta\right\}$.

Под одномерным сечением ориентации t трехиндексной матрицы x с фиксированными значениями индексов i и j будем понимать вектор $x^{i,j}=\left(x^{i,j}_1,\ x^{i,j}_2,\ldots,\ x^{i,j}_n\right)$, компоненты которого определяются следующим образом: $x^{i,j}_t=x_{ijt}\ \ \forall t\in N_n$.

Для вершины $x=\|x_{ijt}\|_n$ многогранника $M(3,\ n)$ введем множество $S(x)=\{k\in(0,\ 1):\exists(i,\ j,\ t)\in N^3_n:x_{ijt}=k\}$. Очевидно

Утверждение 2. Для того чтобы пара м. н. в. x и x' многогранника $M(3,\ n)$ имела разные структуры, достаточно выполнения условия $S(x)\neq S(x_1)$.

Теорема 1 [1]. Матрица $x^0=\left\|x^0_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^0_{111}=x^0_{nnn}=\frac{2}{3},\ \ x^0_{221}=x^0_{122}=x^0_{232}=x^0_{n12}=x^0_{n-1,n-1,n}=\frac{1}{3},$$
$$x^0_{k-1,\,k-1,\,k}=x^0_{kkk}=x^0_{k,\,k+1,\,k}=\frac{1}{3},\ \ k=3,4,\ldots,n-1\ \ (n\geq4),$$

является м. н. в. многогранника $M(3,\ n)$, $n\geq3$.

Заметим, что вершина x_0 имеет тип $A(1,\ n,\ 1,\ n,\ 1,\ n)$.

Следствие 1. Вершина x_0 многогранника $M(3,\ n)$, $n\geq3$, обладает свойствами:

1) $S\left(x^0\right)=\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$; 2) $z\left(x^0,(g,h)\right)=\left(2,\ \underbrace{3,\ldots,3}_{n-2\ раз},\ 2\right)\ \forall(g,h)\in Q$; 3) среди ее одномерных сечений имеется $2n$-5 сечений (n-2 и n-3 сечений ориентации t и j соответственно), каждое из которых содержит две дробные компоненты, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

2. Основные результаты

Здесь получены теоремы существования м. н. в. типа A многогранника $M(3,\ n)$, имеющих разные структуры.

Теорема 2. Матрица $x^1=\left\|x^1_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^1_{111}=x^1_{n-2,n-2,n-2}=\frac{1}{6},\ \ x^1_{221}=x^1_{122}=x^1_{232}=x^1_{n-2,1,2}=x^1_{n-3,n-3,n-2}=\frac{1}{3},$$
$$x^1_{1,n-1,1}=x^1_{n,n-2,n-2}=x^1_{n-2,n,n-1}=x^1_{n-1,1,n-1}=x^1_{n-1,n,n}=x^1_{n,n-1,n}=\frac{1}{2},$$
$$x^1_{k-1,\,k-1,\,k}=x^1_{kkk}=x^1_{k,\,k+1,\,k}=\frac{1}{3},\ \ k=3,4,\ldots,n-3\ \ (n\geq6),$$

является м. н. в. многогранника $M(3,\ n)$, $n\geq5$.

Доказательство. Пусть $n \geq 5$. Положим $I_1=J_1=T_1=N_{n-2}$, $I_2=J_2=T_2=\{n-1, n\}$. Согласно теореме 1 у многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$ найдется м. н. в. y^1 с ненулевыми элементами $y^1_{111} = y^1_{n-2,n-2,n-2} = \frac{2}{3}$, $y^1_{221} = y^1_{122} = y^1_{232} = y^1_{n-2,1,2} = y^1_{n-3,n-3,n-2} = \frac{1}{3}$, $y^1_{k-1,k-1,k} = y^1_{kkk} = y^1_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}$, $k = 3, 4, \ldots, n-3$ $(n \geq 6)$, а в силу [6] у многогранника $M(I_2, J_2, T_2)$ - м. н. в. y^2 с ненулевыми элементами $y^2_{n-1,n-1,n-1} = y^2_{n,n,n-1} = y^2_{n-1,n,n} = y^2_{n,n-1,n} = \frac{1}{2}$. Так как $y^1_{111} = \frac{2}{3} > y^2_{n-1,n-1,n-1} = \frac{1}{2}$, $y^1_{n-2,n-2,n-2} = \frac{2}{3} > y^2_{n,n,n-1} = \frac{1}{2}$, а матрица x^1 построена с помощью процедуры α на основе м. н. в. y^1 и y^2 многогранников $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(I_2, J_2, T_2)$ соответственно, то в силу леммы 2 заключаем, что матрица x^1 является м. н. в. многогранника $M(3, n)$. Теорема доказана.

Следствие 2. Вершина x^1 многогранника $M(3, n)$, $n \geq 5$, обладает свойствами:

1) $S(x^1) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$; 2) $z(x^1, (g,h)) = \left(\underbrace{3,\ldots,3}_{n-2\ раз}, 2, 2\right)$ $\forall (g,h) \in Q$; 3) среди ее одномерных сечений имеется $2n-7$ сечений (по $n-4$ сечений ориентации t и j, одно сечение ориентации i), каждое из которых содержит две дробные компо-ненты, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Через $\overline{x}^1$ обозначим вершину, которая получена из вершины x^1 путем перестановки местами ее двумерных сечений всех ориентации с номерами 1 и $n-1$.

Легко видеть, что

$$z(\overline{x}^1, (g,h)) = z(x^0, (g,h)) = \left(2, \underbrace{3,\ldots,3}_{n-2\ раз}, 2\right) \quad \forall (g,h) \in Q,$$

$$S(\overline{x}^1) = S(x^1) = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \neq S(x^0) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Тем самым при $n \geq 5$ получено опровержение следующего предположения: значения ненулевых компонент любой м. н. в. типа A многогранника $M(3, n)$ не зависят от числа n и принадлежат множеству $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

В отличие от теоремы 2 следующая теорема опровергает это предположение не только для $n \geq 5$, но и для $n=3, 4$.

Теорема 3. Матрица $x^2 = \|x^2_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^2_{111} = x^2_{221} = x^2_{212} = \frac{1}{4},\ x^2_{331} = x^2_{233} = x^2_{313} = \frac{1}{2},\ x^2_{122} = \frac{3}{4} \text{ при } n = 3;$$

$$x^2_{1n1} = x^2_{n21} = x^2_{212} = x^2_{244} = x^2_{414} = \frac{1}{4},\ x^2_{122} = \frac{3}{4},\ x^2_{331} = x^2_{233} = x^2_{313} = x^2_{444} = \frac{1}{2} \text{ при } n \geq 4;$$

$$x^2_{k-1,k,k} = x^2_{k,k-1,k} = \frac{1}{4},\ x^2_{kkk} = \frac{1}{2},\ k = 5, \ldots, n\ (n \geq 5),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n>3$.

Доказательство. Сначала установим справедливость теоремы для $n=3$.

Пусть R_{ijt} - вектор-столбец, у которого единицы стоят в строках с номерами i, $n+j$ и $2n+t$, а остальные элементы - нули. Так как векторно-матричное уравнение $\alpha_1 R_{111}+\alpha_2 R_{221}+\alpha_3 R_{212}+\alpha_4 R_{331}+\alpha_5 R_{233}+\alpha_6 R_{313}+\alpha_7 R_{122}=0$ имеет единственное решение $\alpha_l=0\ \forall l\in N_7$, то векторы R_{111}, R_{221}, R_{212}, R_{331}, R_{233}, R_{313}, R_{122} линейно независимые и, значит, матрица x^1 является м. н. в. многогранника $M(3, 3)$.

При $n\geq 4$ доказательство теоремы 3 проводится индукцией по числу n с использованием леммы 2 и замечания 2. Теорема доказана.

В следующих шести теоремах представлены м. н. в. типа A многогранника $M(3, n)$, структура которых отлична от структуры вершин x^0, x^1 и x^2.

Теорема 4. Матрица $x^3=\left\|x^3_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^3_{111}=x^3_{n-1,n,n}=\frac{1}{6},\ x^3_{1,n-1,1}=x^3_{n-1,1,n-1}=x^3_{n,n,n-1}=x^3_{n,n-1,n}=\frac{1}{2},\ x^3_{n-2,n-2,n-2}=\frac{2}{3},$$

$$x^3_{n-1,2,1}=x^3_{122}=x^3_{232}=x^3_{n-2,1,2}=x^3_{n-3,n-3,n-2}=x^3_{2nn}=\frac{1}{3},$$

$$x^3_{k-1,k-1,k}=x^3_{kkk}=x^3_{k,k+1,k}=\frac{1}{3},\ k=3,4,\ldots,n-3\ (n\geq 6),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n\geq 5$.

Теорема 5. Матрица $x^4=\left\|x^4_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^4_{111}=x^4_{221}=x^4_{122}=x^4_{512}=x^4_{254}=x^4_{554}=\frac{1}{4},$$

$$x^4_{331}=x^4_{142}=x^4_{233}=x^4_{313}=x^4_{424}=x^4_{455}=x^4_{545}=\frac{1}{2}\ \text{при}\ n=5;$$

$$x^4_{1,n-2,1}=x^4_{n-2,2,1}=x^4_{122}=x^4_{n12}=x^4_{244}=x^4_{414}=x^4_{2,n,n-1}=x^4_{n,n,n-1}=\frac{1}{4},$$

$$x^4_{331}=x^4_{1,n-1,2}=x^4_{233}=x^4_{313}=x^4_{444}=x^4_{n-1,2,n-1}=x^4_{n-1,n,n}=x^4_{n,n-1,n}=\frac{1}{2}\ \text{при}\ n\geq 6;$$

$$x^4_{k-1,k,k}=x^4_{k,k-1,k}=\frac{1}{4},\ x^4_{kkk}=\frac{1}{2}, k=5,\ldots,n-2\ (n\geq 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n\geq 5$.

Доказательство теорем 4 и 5 осуществляется по той же схеме, как проводилось доказательство теоремы 2. Отличие состоит в том, что при доказательстве теоремы 4 используется теорема 1, а при доказательстве теоремы 5 - теорема 3.

Теорема 6. Матрица $x^5=\left\|x^5_{ijt}\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^5_{221}=x^5_{122}=x^5_{232}=x^5_{n-3,1,2}=x^5_{n-4,n-4,n-3}=\frac{1}{3},\ x^5_{1,n-1,1}=x^5_{n-2,1,n-1}=\frac{2}{3},$$

$$x^5_{n-3,n-3,n-3}=\frac{1}{6},\ x^5_{n-1,n-3,n-3}=x^5_{n,n,n-2}=x^5_{n-3,n,n}=x^5_{n,n-2,n}=\frac{1}{2},$$

$$x^5_{n-2,n-2,n-2}=x^5_{n-1,n-1,n-2}=x^5_{n-1,n-2,n-1}=\frac{1}{4},\ x^5_{n-2,n-1,n-1}=\frac{1}{12},$$

$$x^5_{k-1,k-1,k}=x^5_{kkk}=x^5_{k,k+1,k}=\frac{1}{3},\ k=3,\ldots,n-4\ (n\geq 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n\geq 6$.

Доказательство. Пусть $n\geq 6$. Положим $I_1=J_1=T_1=N_{n-3}$, $I_2=J_2=T_2=\{n-2, n-1, n\}$. Согласно теореме 1 у многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$ найдется м.н.в. y^1 с ненулевыми элементами $y^1_{111}=y^1_{n-3,n-3,n-3}=\frac{2}{3}$, $y^1_{221}=y^1_{122}=y^1_{232}=y^1_{n-3,1,2}=$ $=y^1_{n-4,n-4,n-3}=\frac{1}{3}$, $y^1_{k-1,k-1,k}=y^1_{kkk}=y^1_{k,k+1,k}=\frac{1}{3}$, $k=3,\ldots,n-4$ $(n\geq 7)$, а ввиду теоремы 3 у многогранника $M(I_2, J_2, T_2)$ - м. н. в. y^2 с ненулевыми элементами

$$y^2_{n-2,n-2,n-2} = y^2_{n-1,n-1,n-2} = y^2_{n-1,n-2,n-1} = \frac{1}{4}, \quad y^2_{n-2,n-1,n-1} = \frac{3}{4},$$

$$y^2_{n,n,n-2} = y^2_{n-1,n,n} = y^2_{n,n-2,n} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $y^1_{111} = \frac{2}{3} < y^2_{n-2,n-1,n-1} = \frac{3}{4}$, $y^1_{n-3,n-3,n-3} = \frac{2}{3} > y^2_{n-1,n,n} = \frac{1}{2}$, а матрица x^5 построена с помощью процедуры α на основе м. н. в. y^1 и y^2 многогранников $M(I_1, J_1, T_1)$ и $M(I_2, J_2, T_2)$ соответственно, то в силу леммы 2 приходим к выводу, что матрица x^5 является м. н. в. многогранника М(3, n). Теорема доказана.

Теорема 7. Матрица $x^6 = \left\| x^6_{ijt} \right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^6_{111} = x^6_{n-3,n-3,n-3} = \frac{1}{6}, \; x^6_{1n1} = x^6_{n,n-3,n-3} = x^6_{n,n,n-2} = x^6_{n-3,n-2,n} = x^6_{n-1,1,n} = \frac{1}{2},$$

$$x^6_{221} = x^6_{122} = x^6_{232} = x^6_{n-3,1,2} = x^6_{n-4,n-4,n-3} = \frac{1}{3},$$

$$x^6_{k-1,k-1,k} = x^6_{kkk} = x^6_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}, \; k = 3,\ldots,n-4 \; (n \ge 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n \geq 6$.

Теорема 8. Матрица $x^7 = \left\| x^7_{ijt} \right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^7_{111} = \frac{1}{6}, \; x^7_{2,n-1,1} = x^7_{122} = x^7_{232} = x^7_{n-3,1,2} = x^7_{n-4,n-4,n-3} = x^7_{n-2,2,n-1} = \frac{1}{3},$$

$$x^7_{n11} = x^7_{1,n,n-2} = x^7_{n-1,n,n} = x^7_{n,n-2,n} = \frac{1}{2}, \; x^7_{n-3,n-3,n-3} = \frac{2}{3},$$

$$x^7_{n-2,n-2,n-2} = x^7_{n-1,n-1,n-2} = x^7_{n-1,n-2,n-1} = \frac{1}{4}, \; x^7_{n-2,n-1,n-1} = \frac{5}{12},$$

$$x^7_{k-1,k-1,k} = x^7_{kkk} = x^7_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}, \; k = 3,\ldots,n-4 \; (n \ge 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n \geq 6$.

Теорема 9. Матрица $x^8 = \left\| x^8_{ijt} \right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x^8_{111} = \frac{5}{12}, \; x^8_{1,n-11} = x^8_{n-2,n-2,n-2} = x^8_{n-1,1,n-2} = x^8_{n-1,n-2,n-1} = \frac{1}{4},$$

$$x^8_{221} = x^8_{122} = x^8_{232} = x^8_{n-3,1,2} = x^8_{n-4,n-4,n-3} = \frac{1}{3}, \; x^8_{n-3,n-3,n-3} = \frac{1}{6},$$

$$x^8_{n,n-3,n-3} = x^8_{n-3,n,n-2} = x^8_{n-1,n,n} = x^8_{n,n-2,n} = \frac{1}{2}, \; x^8_{n-2,n-1,n-1} = \frac{3}{4},$$

$$x^8_{k-1,k-1,k} = x^8_{kkk} = x^8_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}, \; k = 3,\ldots,n-4 \; (n \ge 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n \geq 6$.

Техника доказательств теорем 7, 8 и 9 точно такая же, как и для теоремы 6.

В [1] высказано предположение: для любого натурального числа n наименьшая положительная компонента среди всех м. н. в. многогранника $M(3, n)$ равна $\frac{1}{n}$. Теоремы 2, 3 и 6 опровергают это предположение при n=3, 5, 6, …, 11.

Возникает естественный вопрос: существуют ли у многогранника $M(3, n)$, $n\geq 4$, м. н. в. x и x' типа A, имеющие различные структуры и удовлетворяющие условию $S(x)=S(x')=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. Утвердительный ответ на этот вопрос дает

Теорема 10. Матрица $x^9=\left\|x_{ijt}^9\right\|_n$ с ненулевыми элементами

$$x_{111}^9=x_{n-1,\,n-1,\,n-1}^9=\frac{2}{3},$$

$$x_{2n1}^9=x_{122}^9=x_{232}^9=x_{n12}^9=x_{n-2,\,n-2,\,n-1}^9=x_{n-1,\,n,\,n}^9=x_{n2n}^9=x_{nnn}^9=\frac{1}{3},$$

$$x_{k-1,\,k-1,\,k}^9=x_{kkk}^9=x_{k,\,k+1,\,k}^9=\frac{1}{3},\ k=3,\ldots,n-2\ (n\geq 5),$$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, $n\geq 4$.

Доказательство проводится с помощью леммы 2 с учетом замечания 2.

Следствие 3 (ср. со следствием 1). Вершина x^9 многогранника $M(3, n)$, $n\geq 4$, обладает свойствами: 1) $S(x^9)=\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$; 2) $z(x^9, (g, h))=\left(2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-3\ раз}, 2, 3\right)$ $\forall (g, h)\in Q$; 3) среди ее одномерных сечений имеется $2n$-6 сечений (n-4 и n-3 сечений ориентации t и j соответственно, одно сечение ориентации i), каждое из которых содержит две дробные компоненты, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Тем самым доказано, что условие утверждения 2 не является необходимым.

1. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. // Изв. вузов. Математика. 2002. № 12. С. 84.
2. Кравцов В.М. // Вести. Белорус, ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 80.
3. Кравцов В.М. // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 62.
4. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Емеличев В.А., Кравцов М.К.//Дискрет. мат. 1991. Т. 3. Вып. 2. С. 3.
6. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. //Дискрет. мат. 2001. Т. 13. Вып. 2. С. 120.

Поступила в редакцию 10.11.04.

Виктор Михайлович Кравцов - аспирант кафедры дискретной математики и алгоритмики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.М. Котов.