Математика и информатика

УДК 517.946

В.И. КОРЗЮК, В.В. ДАЙНЯК

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Dirichlet problem for the nonstationary equation of the third order is considered. The existence and the unicity of the generalized solution are proved with the help of the averaging operator of variable step.

В настоящее время хорошо разработана теория задач, корректно поставленных для уравнений эллиптического, гиперболического, параболического типов. В связи с расширением сферы приложений математических методов часто возникают задачи, связанные с исследованием уравнений в частных производных, которые не принадлежат ни к одному из классических типов.

Данная работа посвящена изучению задачи типа Дирихле для уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами, которые нельзя классифицировать с помощью характеристического полинома и его корней. Методами функционального анализа, используя операторы осреднения переменного шага, доказано существование и единственность обобщенного решения. Получены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи. Случай с постоянными коэффициентами проанализирован в [1].

Пусть линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)=(x_0, x')$ имеют вид

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_k}\left(a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \mathcal{L}_1(x,D)u = f(x), \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_1(x,D)u = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x)u .$$

Здесь $a_k(x)$, $b_k(x)$ ($k=1, 2, \ldots, n$) - достаточно гладкие функции, $p_k(x)$ и $\partial p_k/\partial x_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$) измеримы и ограничены.

Пусть $\mathcal{L}_0(v) = v_0^3 + \sum_{k=1}^{n}(a_k v_0 v_k^2 + b_k v_k^3)$ при $x \in \partial\Omega$. В Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям типа Дирихле

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \qquad (2)$$

где $\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega \mid \mathcal{L}_0(v) < 0\}$.

Наряду с задачей (1), (2) будем рассматривать и сопряженную

$$\mathcal{L}^* \upsilon = g(x), \qquad (3)$$

$$\upsilon\Big|_{\partial\Omega}=0\,,\qquad \frac{\partial\upsilon}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega^+}=0\,,\tag{4}$$

$\partial\Omega^+=\{x\in\partial\Omega\,|\,\mathcal{L}_0(\nu)>0\}$, где

$$\mathcal{L}^*=-\frac{\partial^3}{\partial x_0^3}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_k(x)\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial x_k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_k(x)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right)+\mathcal{L}_1^*(x,D)\,,$$

где $\mathcal{L}_1^*$ - оператор первого порядка, формально сопряженный к $\mathcal{L}_1$

Обозначим через M множе ство индексов $(1,2,\ldots,n)$. Пусть $Q=\{k\in M|a_k(x)<0\}$,

$P=\{k\in M|a_k(x)>0\}$, $A=3+\frac{4}{9}\sum_{k\in Q}\frac{a_k^3(x')}{b_k^2(x')}$ и $B=\frac{4}{9}\sum_{k\in Q}\frac{a_k^2(x')\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k}}{b_k^2(x')}$.

Предположим, что коэффициенты $a_k(x)$, $b_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ удовлетворяют следующим условиям:

Условие I. а) $\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0}\equiv\frac{\partial b_k(x)}{\partial x_0}\equiv 0$, $k\in M$;

б) $b_k(x')\neq 0$ при $k\in Q$;

в) если $a_k^2(x')+b_k^2(x')=0$ при $k\in M$, то $\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k}>0$;

г) $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a_j(x')\beta_0+\partial b_j(x')/\partial x_j}{b_j(x')}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{a_i(x')\beta_0+\partial b_i(x')/\partial x_i}{b_i(x')}\right)$, если $i,j\in Q$,

$\beta_0=\mathrm{const}>0$;

д) A>0.

Условие II. а) Считаем, что выполняются требования а) - г) условия I;

б) если $A<0$, то $B>0$ и $\max\limits_{\substack{k\in P\cup Q\\ x\in\overline{\Omega}}}\left\{-\frac{\partial b_k/\partial x_k}{a_k}\right\}<-\frac{B}{A}$.

Условие III. а) Считаем, что выполняются требования а) - г) условия I;

б) если $A=0$, то $B>0$.

Условие IV. Для любого $x\in\overline{\Omega}$ $\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0}+\frac{\partial b_k(x)}{\partial x_k}>0$ при всех $k\in M$.

Условие V. Для любого $x\in\overline{\Omega}$ $\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0}+\frac{\partial b_k(x)}{\partial x_k}<0$ при всех $k\in M$.

Пусть $H_0^\ell(\Omega)$ $(\overset{0}{H}{}^\ell(\Omega))$, $\ell=1,2,3$, - подпространство пространства Соболева $H^\ell(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют однородным граничным условиям (2) ((4)).

Задачу (1)-(2) будем рассматривать как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u=f\tag{5}$$

с областью определения $D(L)=$ $H_0^3(\Omega)$, а задачу (3), (4) - как решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}^*\upsilon=g\tag{6}$$

с областью определения $D(\mathcal{L}^*)=\overset{0}{H}{}^3(\Omega)$.

Для доказательства разрешимости уравнения (5) при любых $f\in H_0^{-1}$ строим расширение L оператора $\mathcal{L}$ такое, что множество его значений $R(L)$ совпадает с пространством H_0^{-1}. Аналогично для оператора $\mathcal{L}^*$ строим расширение L_* [см. 1].

Докажем энергетические неравенства для операторов L и L^*.

Теорема 1. При выполнении одного из условий I - IV для любых u и υ из $H_0^1(\Omega)$ при достаточно большом $\lambda(x)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\|Lu\|_{H_0^{-1}}, \tag{7}$$

$$\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le C^*\|L^*\upsilon\|_{H_0^{-1}}, \tag{8}$$

где постоянные C и C^* положительны и не зависят от функций u и υ.

Доказательство. Докажем неравенство (7) сначала для функций $u\in H_0^3$ В этом случае

$$\|Lu\|_{H_0^{-1}} = \sup_{\upsilon\in H_0^1}\frac{\left|(Lu,\upsilon)_{L_2(\Omega)}\right|}{\|\upsilon\|_{H_0^1}}. \tag{9}$$

В (9) полагаем $\upsilon(x)=\psi(x)u(x)$, $\psi(x)=-\exp(-\beta_0 x_0-\varphi(x'))$. С учетом условий (2) будем иметь

$$\begin{aligned}
(Lu,\psi u)_{L_2(\Omega)} &= (L_0u,\psi u)_{L_2(\Omega)} + (L_1u,\psi u)_{L_2(\Omega)} = -\int_\Omega \psi(x)\left[\frac{3}{2}\beta_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \right.\\
&+\sum_{k=1}^n a_k(x')\varphi_{x_k}(x')\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(a_k(x')\beta_0 + 3b_k(x')\varphi_{x_k}(x') + \right.\\
&\left.\left.+\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\right]ds + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega^+}\exp(-\beta_0 x_0-\varphi(x'))L_0(v)\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2 d\sigma + \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega \exp(-\beta_0 x_0-\varphi(x'))\left[\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial a_k(x')}{\partial x_k}\varphi_{x_k}\beta_0 + a_k(x')\varphi_{x_kx_k}\beta_0 - \right.\right.\\
&-a_k(x')\varphi_{x_k}^2\beta_0 - \varphi_{x_kx_k}\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k} - b_k(x')\varphi_{x_kx_kx_k} + \\
&\left.+3b_k(x')\varphi_{x_k}\varphi_{x_kx_k} + \varphi_{x_k}^2\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k} - b_k(x')\varphi_{x_k}^3 + \frac{\partial p_k(x)}{\partial x_k} - p_k(x)\varphi_{x_k}\right) - \\
&\left.-\beta_0^3 + \frac{\partial p_0(x)}{\partial x_0} - p_0(x)\beta_0 + 2\lambda(x)\right]u^2 ds.
\end{aligned} \tag{10}$$

Выберем функцию $\varphi(x')$ и константу β_0 таким образом, чтобы форма в первых скобках (10) была положительно определенной. Это будет верно тогда и только тогда, если главные миноры матрицы

$$\begin{bmatrix}
3\beta_0 & a_1(x')\varphi_{x_1} & a_2(x')\varphi_{x_2} & \dots & a_n(x')\varphi_{n} \\
a_1(x')\varphi_{x_1} & \begin{matrix} a_1(x')\beta_0 + \\ +3b_1(x')\varphi_{x_1} + \\ +\partial b_1(x')/\partial x_1 \end{matrix} & 0 & \dots & 0 \\
a_2(x')\varphi_{x_2} & 0 & \begin{matrix} a_2(x')\beta_0 + \\ +3b_2(x')\varphi_{x_2} + \\ +\partial b_2(x')/\partial x_2 \end{matrix} & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_n(x')\varphi_{x_n} & 0 & 0 & \dots & \begin{matrix} a_n(x')\beta_0 + \\ +3b_n(x')\varphi_{x_n} + \\ +\partial b_n(x')/\partial x_n \end{matrix}
\end{bmatrix}$$

будут больше нуля. Отсюда следует необходимость выполнения условий $\beta_0>0$, $a_i(x')\beta_0+3b_i(x')\varphi_{x_i}(x')+\partial b_i(x')/\partial x_i>0$, $i=1, 2, ..., n$.

Рассуждая аналогичным образом, как в [1] при доказательстве теоремы 1, получим, что главные миноры будут больше нуля, если

$$f_n(\varphi_x)=3\beta_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2(x')\varphi_{x_k}^2}{a_k(x')\beta_0+3b_k(x')\varphi_{x_k}+\partial b_k(x')/\partial x_k}>0. \tag{11}$$

Путем исследования на максимум функции $f_n(\varphi_x)$ можно убедиться, что при выполнении условий теоремы неравенство (11) всегда справедливо, если $\beta_0>0$ и

$$\begin{cases} \varphi_{x_k}=0 & \text{при } k\in P,\\ \varphi_{x_k}=-\dfrac{2a_k(x')\beta_0+2\partial b_k(x')/\partial x_k}{3b_k(x')} & \text{при } k\in Q,\\ 3b_k(x')\varphi_{x_k}+\dfrac{\partial b_k(x')}{\partial x_k}>0 & \text{при } k\in M\setminus(P\cup Q). \end{cases}$$

Пусть $\varphi(x')=\hbar(\bar{x})+\sum\limits_{k\in M\setminus(P\cup Q)}\beta_k x_k$, где $\hbar(\bar{x})$ не зависит от x_k, если $k\in M\setminus(P\cup Q)$, а постоянные β_k выбираем таким образом, чтобы $3b_k(x')\varphi_{x_k}+\partial b_k(x')/\partial x_k>0$ при $k\in M\setminus(P\cup Q)$. Функция $\hbar(\bar{x})$ должна удовлетворять системе

$$\begin{cases} \hbar_{x_k}(\bar{x})=0 & \text{при } k\in P,\\ \hbar_{x_k}(\bar{x})=-\dfrac{2a_k(x')\beta_0+2\partial b_k(x')/\partial x_k}{3b_k(x')} & \text{при } k\in Q, \end{cases}$$

которая в силу требований г) условия I всегда разрешима [4]. Если выполняется условие IV, то полагаем $\varphi_{x_k}(x')=0$ для всех $k\in M$. Так как в силу доказанного форма в первых скобках положительна, то

$$-\int_{\Omega}\psi(x)\left[\frac{3}{2}\beta_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}a_k(x')\varphi_{x_k}(x')\frac{\partial u}{\partial x_0}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k(x')\beta_0+\right.$$
$$\left.+3b_k(x')\varphi_{x_k}+\frac{\partial b_k(x')}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2\Bigg]ds\geq C_1\sum_{k=0}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\geq C_2\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Выражение, стоящее в последних скобках (10), неотрицательно в силу достаточно большой функции $\lambda(x)$. Так как

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega^+}\exp(-\beta_0x_0-\varphi(x'))\mathcal{L}_0(\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)^2ds\geq 0,$$

то верна следующая оценка снизу:

$$(\mathcal{L}u,\psi u)_{L_2(\Omega)}\geq C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{12}$$

Поскольку $\|\psi u\|_{H_0^1(\Omega)}\leq C_3\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ и в силу неравенства (12)

$$\|Lu\|_{H_0^{-1}}\geq\frac{(\mathcal{L}u,\psi u)_{L_2(\Omega)}}{C_3\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}\geq\frac{C_2}{C_3}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Доказательство неравенства (7) в общем случае для u и υ из $H_0^1(\Omega)$ можно осуществить с помощью операторов осреднения [2, 3]. Если $u\in H_0^1(\Omega)$, то $J_ku\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. На основании доказанного

$$\|J_k u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C \sup_{\upsilon\in H_0^1(\Omega)} \frac{|< LJ_k u, \upsilon >|}{\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}}. \tag{13}$$

В силу свойств операторов осреднения J_k и J_k^*, $<LJ_k u,\ \upsilon>$ можно записать в виде

$$<LJ_k u,\ \upsilon> = <Lu,\ J_k^*\upsilon> + K(u,\upsilon;k), \tag{14}$$

где для $K(u,\ \upsilon;\ k)$ справедлива оценка

$$|K(u,\upsilon;k)| \le \frac{1}{k}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{15}$$

Кроме того,

$$\|J_k^*\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le C_4\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{16}$$

В силу (14)-(16) неравенство (13) можно продолжить следующим образом:

$$\|J_k u\|_{H_0^1(\Omega)} \le C \sup_{\upsilon\in H_0^1(\Omega)} \frac{|< Lu, J_k^*\upsilon >|}{\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}} + C_5\frac{1}{k}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le$$

$$\le C_6 \sup_{\upsilon\in H_0^1(\Omega)} \frac{|< Lu, \upsilon >|}{\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)}} + C_5\frac{1}{k}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{17}$$

В неравенстве (17) переходим к пределу при $k\to\infty$ Так как $\|J_k u\|_{H_0^1(\Omega)} \to \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ при $k\to\infty$ то в результате получим доказываемое неравенство (7) для $u\in H_0^1(\Omega)$ -

Неравенство (8) доказывается аналогично.

Теорема 2. При выполнении одного из условий I - IV и достаточно большом $\lambda(x)$ для любого $f\in H_0^{-1}$ ($g\in H_0^{-1}$) существует и единственно обобщенное решение $u\in H_0^1(\Omega)$ ($\upsilon\in H_0^1(\Omega)$) задачи (1)-(2) ((3)-(4)).

Доказательство. Единственность обобщенных решений следует из неравенств (7) и (8).

При доказательстве существования обобщенного решения задачи (1) - (2) заметим, что оператор L является замкнутым. Следовательно, область значений этого оператора есть замкнутое множество. Поэтому достаточно установить плотность множества значений $\{Lu\}$, когда u пробегает множество $H_0^1(\Omega)$. Пусть

$$< Lu, \upsilon > = (Lu, \upsilon)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{18}$$

для любого $u\in H_0^3(\Omega)$ и некоторого $\upsilon\in H_0^1(\Omega)$. В равенстве (18) вместо u возьмем $J_k u$. Тогда будем иметь

$$< LJ_k u, \upsilon > = (LJ_k u, \upsilon)_{L_2(\Omega)} = (J_k Lu, \upsilon)_{L_2(\Omega)} + (LJ_k u - J_k Lu, \upsilon)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= (Lu, J_k^*\upsilon)_{L_2(\Omega)} + (Ku, \upsilon)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Обозначим $(Ku,\upsilon)_{L_2(\Omega)} = K\ (u,\ \upsilon;\ k)$. Тогда получим равенство

$$< LJ_k u, \upsilon > = (Lu, J_k^*\upsilon)_{L_2(\Omega)} + K(u,\upsilon;k) = 0.$$

По свойству операторов осреднения, если $\upsilon\in H_0^1(\Omega)$, то и $J_k^*\upsilon\in H_0^1(\Omega)$. Поэтому в оценке (8) заменим υ на $J_k^*\upsilon$. Будем иметь

$$\|J_k^*\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le C^*\|L^* J_k^*\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)} = C^* \sup_{u\in H_0^3(\Omega)} \frac{|(u, L^* J_k^*\upsilon)_{L_2(\Omega)}|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} =$$

$$= C^* \sup_{u\in H_0^3(\Omega)} \frac{\left|(Lu, J_k^*\upsilon)_{L_2(\Omega)}\right|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \le C^* \sup_{u\in H_0^3(\Omega)} \frac{\left|K(u,\upsilon;k)\right|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \le C_7 \frac{1}{k}\|\upsilon\|_{H_0^1(\Omega)},$$

где постоянная $C_7>0$. Отсюда после перехода к пределу при $k\to\infty$ следует, что $\left\|J_k^*\upsilon\right\| \to \|\upsilon\| \le 0$ при $k\to\infty$ Следовательно, $\upsilon=0$ в $H_0^1(\Omega)$.

Вторая часть теоремы 2 доказывается аналогично.

Замечание. Если коэффициенты $a_k(x)$, $b_k(x)$ ($k=1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условию V, то в этом случае рассматривается задача (1), (4) (условие (4) для функции u) и сопряженная к ней задача (2), (3) (условие (2) для функции υ). Тогда задача (1), (4) рассматривается как решение операторного уравнения

$$\tilde{\mathcal{L}}u \equiv \mathcal{L}u = f \tag{19}$$

с областью определения $D(\tilde{\mathcal{L}}) = \overset{0}{H}{}^3(\Omega)$, а задача (2), (3) - как решение операторного уравнения

$$\tilde{\mathcal{L}}^*\upsilon \equiv \mathcal{L}^*\upsilon = g \tag{20}$$

с областью определения $D(\tilde{\mathcal{L}}^*) = H_0^3(\Omega)$.Расширения $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^*$ операторов $\tilde{\mathcal{L}}$ и $\tilde{\mathcal{L}}^*$ строятся по предыдущей схеме и рассматриваются как операторы из $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ в $\overset{0}{H}{}^{-1}(\Omega)$.Аналогично решения операторных уравнений для $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^*$ называются обобщенными решениями уравнений (19) и (20) соответственно.

Справедливы следующие теоремы, которые вытекают из доказательств теорем 1 и 2.

Теорема 3. При выполнении условия V для любых u и υ из $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$при достаточно большом $\lambda(x)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} \le C\left\|\tilde{L}u\right\|_{\overset{0}{H}{}^{-1}},$$

$$\|\upsilon\|_{\overset{0}{H}{}^1(\Omega)} \le C^*\left\|\tilde{L}^*\upsilon\right\|_{\overset{0}{H}{}^{-1}},$$

где постоянные C и C* положительны и не зависят от функций u и υ.

Теорема 4. При выполнении условия V и достаточно большом $\lambda(x)$ для любого $f\in \overset{0}{H}{}^{-1}$ ($g\in \overset{0}{H}{}^{-1}$) существует и единственно обобщенное решение $u\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ ($\upsilon\in \overset{0}{H}{}^1(\Omega)$) задачи (1),(4) ((2),(3)).

Приведем примеры уравнений, для которых рассматриваемые задачи будут разрешимы.

Пример 1. В произвольной замкнутой области с достаточно гладкой границей $\Omega = \{(x_0, x_1) | \max x_0 = \max x_1 = 1, \min x_0 = \min x_1 = 0\}$ рассмотрим уравнение вида

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}\left(a(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(b(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \mathcal{L}_1(x,D)u = f(x),$$

где $a(x)=2x_0+3x_1-14$, $b(x)=x_0+x_1+1$, $\mathcal{L}_1(x, D)$ - многочлен первого порядка. Тогда $\frac{\partial a_k(x)}{\partial x_0} + \frac{\partial b(x)}{\partial x_1} = 3 > 0$ и $27b_2(x)+4a_3(x)<0$. Поэтому рассматриваемое уравнение является гиперболическим и для него выполняется условие IV.

Пример 2. Пусть задано уравнение

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_1}\left(2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(2x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \mathcal{L}_1(x,D)u = f(x)$$

в замкнутой области $\Omega=\{(x_0, x_1)|\max x_0=\max x_1=2, \min x_0=\min x_1=1\}$. Так как $27b_2(x)+4a_3(x)=27\cdot 4x_1^2+4\cdot 8x_1^3>0$, то уравнение является уравнением составного типа и его коэффициенты удовлетворяют условию IV.

Пример 3. Уравнение вида

$$Lu=\frac{\partial^3 u}{\partial x_0}+\frac{\partial^2}{\partial x_0\partial x_1}\left(-\sqrt[3]{\frac{27}{4}}e^{x_1/3}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(e^{x_1/2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+L_1(x,D)u=f(x)$$

является уравнением с кратными характеристиками, и, как легко видеть, его коэффициенты будут удовлетворять требованиям условия IV.

1. Корзюк В.И., Дайняк В.В. //Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1056.
2. Корзюк В.И. //Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1992. №2. С. 49.
3. Корзюк В.И. //Там же. №3. С. 63.
4. Камке Э. //Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М, 1966.

Поступила в редакцию 03.02.05.

Виктор Иванович Корзюк - член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики.

Виктор Владимирович Дайняк - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики.