Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 3

УДК 517.9

В.Н. ГОРБУЗОВ, С.Н. ДАРАНЧУК

БАЗИС АВТОНОМНЫХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМЫ ЯКОБИ - ФУРЬЕ

The spectral method of building of the autonomous first integrals basis of the ordinary differential Jacobi - Fourier's system is elaborated.

Рассмотрим обыкновенную дифференциальную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i X - x_i A_{n+1} X \equiv J_{x_i}(x), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ - вектор из $\mathbf{R}_n$, $X=(x_1, \ldots, x_n, 1)$, $A_k(a_{k1}, \ldots, a_{k,\ n+1})$, $k=\overline{1, n+1}$ векторы из $\mathbf{R}_{n+1}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} | a_{n+1,\ j} | \neq 0$.

При n=2 уравнением траекторий системы (1) является уравнение Якоби, методы интегрирования которого и обзор литературы приведены в [1] (см. также [2] и [3]).

Используя подходы Г. Дарбу построения первого интеграла обыкновенной дифференциальной системы по ее частным интегралам [4] и учитывая наличие особых точек у системы (1), М. Лагутинский решил [5] задачу понижения порядка этой системы, которую он назвал системой Якоби - Фурье. Используя метод частных интегралов полиномиальных многомерных (в частных производных и полных дифференциалах) дифференциальных систем [6], в работах [7-9] для системы Якоби - Фурье в частных производных были построены первые интегралы с точностью до последнего множителя.

Построение первых интегралов и последних множителей системы (1) методом приведения матрицы преобразования этой системы к нормальной жордановой форме рассмотрено в [10]. Вместе с тем задача нахождения базиса первых интегралов системы (1) при n>2 оставалась открытой.

Заметим, что в [11] спектральным методом для **R**-линейных систем уравне-ний в полных дифференциалах построен интегральный базис. В данной статье спектральным методом построен базис первых интегралов системы (1).

Линейный частный интеграл. Уравнение $\det(B-\lambda E)=0$, где B есть матрица, транспонированная к матрице $\|a_{\tau k}\|$ (τ - номер строки, k - номер столбца), E есть единичная матрица, назовем интегральным характеристическим, а его корни - интегральными характеристическими корнями системы (1).

Основу метода построения базиса первых интегралов составляет

Теорема 1. Если $\Theta=(\theta_1, \ldots, \theta_{n+1})$ - собственный вектор матрицы B, то функция $p{:}x\to\Theta X,\ \forall x\in\mathbf{R}^n$, будет частным интегралом системы (1).

Действительно, линейная неоднородная функция p является частным интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\Im p(x)=p(x)MX,\ \forall x\in\mathbf{R}^n,$$

где $M=(\mu_1, \ldots, \mu_{n+1})$ - вектор из $\mathbf{R}_{n+1}$, а $\Im(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} J_{x_i}(x)\partial_{x_i},\ \ \forall x\in\mathbf{R}^n$, - оператор дифференцирования в силу системы (1). Это тождество имеет место, если и только если совместна линейная система

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_{k\tau}-\delta_{k\tau}\lambda)\theta_k=0,\ \ \tau=\overline{1,n+1}\,,$$

где $\delta_{k\tau}$, - символ Кронекера, а $\mu_i=-a_{n+1,\ i}$, $i=\overline{1,n}$, $\mu_{n+1}=-a_{n+1,\ n+1}+\lambda$.

Первые интегралы системы (1). Методами, аналогичными изложенным в [12], доказываем следующие теоремы о построении автономных первых инте-гралов системы (1).

Примем условные обозначения:

$$p_k(x)=\Theta_k X,\ \ f_k(x)=\Phi_k X,\ \ g_k(x)=\Psi_k X,\ \ \Theta_k=(\theta_{1k},\ \ldots,\ \theta_{n+1,\ k}),$$

$$\Phi_k=(\mathrm{Re}\ \theta_{1k},\ \ldots,\ \mathrm{Re}\ \theta_{n+1,\ k}),\ \Psi_k=(\mathrm{Im}\ \theta_{1k},\ \ldots,\ \mathrm{Im}\ \theta_{n+1,\ k}).$$

Теорема 2. Пусть λ_i, $i=\overline{1,3}$,- различные вещественные собственные числа матрицы B, которым соответствуют собственные векторы Θ_i, $i=\overline{1,3}$. Тогда первым интегралом на области G из $\mathbf{R}_n$ системы (1) будет функция

$$W_1 : x \to \left|p_1(x)\right|^{h_1} \left|p_2(x)\right|^{h_2} \left|p_3(x)\right|^{h_3}, \ \forall x \in G,$$

где числа h_1, h_2 и h_3 находятся из системы $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3 = 0$ при условии $|h_1| + |h_2| + |h_3| \neq 0$.

На основании теоремы 2 получаем следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть вещественному собственному числу λ матрицы B соответствуют два линейно независимых собственных вектора Θ_1 и Θ_2. Тогда первым интегралом на области G пространства $\mathbf{R}_n$ системы (1) будет функция

$$W_1^1 : x \to \left|p_1(x)\right|^{h} \ \left|p_2(x)\right|^{-h},$$

где h - произвольное фиксированное ненулевое вещественное число.

Утверждение 2. Пусть существенно комплексному собственному числу $\lambda_1 = \xi_1 + i\zeta_1$ матрицы B соответствует собственный вектор Θ_1, а ее вещественному собственному числу λ_3 - собственный вектор Θ_3. Тогда первым интегралом на области G из $\mathbf{R}_n$ системы (1) будет функция

$$W_2 : x \to \left(\frac{f_1^2(x) + g_1^2(x)}{p_3^2(x)} \right)^{\zeta_1} \ \exp\left(2(\lambda_3 - \xi_1) \ \mathrm{arctg} \ \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \right).$$

Утверждение 3. Пусть существенно комплексным собственным числам $\lambda_1 = \xi_1 + i\zeta_1$ и $\lambda_2 = \xi_2 + i\zeta_2$ $(\lambda_2 \neq \overline{\lambda}_1)$ матрицы B соответствуют собственные векторы Θ_1 и Θ_2. Тогда функционально независимыми первыми интегралами на области G пространства $\mathbf{R}_n$ системы (1) будут функции

$$W_2^1 : x \to \ \zeta_1 \ \mathrm{arctg} \ \frac{g_2(x)}{f_2(x)} - \zeta_2 \ \mathrm{arctg} \ \frac{g_1(x)}{f_1(x)}$$

и

$$W_2^2 : x \to \left(\frac{f_1^2(x) + g_1^2(x)}{f_2^2(x) + g_2^2(x)} \right)^{2\zeta_1} \ \exp\left(4(\xi_2 - \xi_1) \ \mathrm{arctg} \ \frac{g_1(x)}{f_1(x)} \right).$$

При наличии у матрицы B кратных элементарных делителей вводится следующее понятие.

Пусть λ - собственное число матрицы B, которому соответствует элементарный делитель кратности m и собственный вектор $\Theta^{(0)} = \left(\theta_1^{(0)}, \ \ldots, \ \theta_{n+1}^{(0)}\right)$. Вектор $\Theta^{(k)} = \left(\theta_1^{(k)}, \ \ldots, \ \theta_{n+1}^{(k)}\right)$, координатами которого являются решения системы уравнений

$$(B - \lambda E) \ \mathrm{colon} \ \Theta^{(k)} = k \cdot \mathrm{colon} \ \Theta^{(k-1)}, \ \ k = \overline{1, m-1}, \tag{3}$$

назовем k-м присоединенным вектором матрицы B, соответствующим собственному числу λ.

Дополнительно обозначим:

$$p_k^{(l)}(x) = \Theta_k^{(l)} X, \quad f_k^{(l)}(x) = \Phi_k^{(l)} X, \quad g_k^{(l)}(x) = \Psi_k^{(l)} X,$$

$$\Theta_k^{(l)} = \left(\theta_{1k}^{(l)}, \ \ldots, \ \theta_{n+1,k}^{(l)}\right), \ \ \Phi_k^{(l)} = \left(\mathrm{Re} \ \theta_{1k}^{(l)}, \ \ldots, \ \mathrm{Re} \ \theta_{n+1,k}^{(l)}\right),$$

$$\Psi_k^{(l)} = \left(\mathrm{Im} \ \theta_{1k}^{(l)}, \ \ldots, \ \mathrm{Im} \ \theta_{n+1,k}^{(l)}\right).$$

Первые интегралы в этом случае строим на основании следующих теорем.

Теорема 3. Пусть вещественному собственному числу λ_1 матрицы B соответствуют двукратный элементарный делитель, собственный Θ_1 и первый присоединенный $\Theta_1^{(1)}$ векторы, а вещественному собственному числу $\lambda_2 (\lambda_2 \neq \lambda_1)$ - собственный вектор Θ_2. Тогда первым интегралом системы (1) будет

$$W_3 : x \to \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \ \exp\left((\lambda_2 - \lambda_1) \ \frac{p_1^{(1)}(x)}{p_1(x)} \right), \ \ \forall x \in G.$$

Отсюда имеем.

Если комплексному собственному числу $\lambda_1 = \xi_1 + i\zeta_1$ матрицы B соответствует собственный вектор Θ_1, а ее вещественному собственному числу λ_3 - собственный Θ_3 и первый присоединенный $\Theta_3^{(1)}$ векторы, то первым интегралом на области G системы (1) будет функция

$$W_3^1 : x \to \ \operatorname{arctg} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} - \zeta_1 \ \operatorname{arctg} \frac{p_3^{(1)}(x)}{p_3(x)}.$$

Если комплексному собственному числу $\lambda_1 = \xi_1 + i\zeta_1$ матрицы B соответствуют двукратный элементарный делитель, собственный Θ_1 и первый присоединенный $\Theta^{(1)}{}_1$ векторы, то функционально независимыми первыми интегралами на области G системы (1) будут функции

$$W_3^2 : x \to -\ \operatorname{arctg} \frac{g_1(x)}{f_1(x)} + \zeta_1 \ \operatorname{arctg} \frac{f_1(x) f_1^{(1)}(x) + g_1(x) g_1^{(1)}(x)}{f_1^2(x) + g_1^2(x)}$$

и

$$W_3^3 : x \to \frac{f_1(x) g_1^{(1)}(x) - g_1(x) f_1^{(1)}}{f_1^2(x) + g_1^2(x)}.$$

Теорема 4. Пусть вещественному собственному числу λ_1 матрицы B соответствуют два двукратных элементарных делителя, линейно независимые собственные векторы Θ_1, Θ_2 и первые присоединенные векторы $\Theta_1^{(1)}$, $\Theta_2^{(1)}$. Тогда первым интегралом на области G из $\mathbf{R}_n$ системы (1) будет функция

$$W_4 : x \to \frac{p_1^{(1)}(x)}{p_1(x)} - \frac{p_2^{(1)}(x)}{p_2(x)}.$$

Теорема 5. Пусть собственному числу λ_1 матрицы B соответствует m-кратный ($m \geq 3$) элементарный делитель, собственный вектор $\Theta_1^{(0)}$ и m-1 присоединенных векторов $\Theta_1^{(k)}$, $k = \overline{1, m-1}$. Тогда функционально независимыми первыми интегралами системы (1) будут функции

$$W_5^q : x \to v_q(x), \ \ \forall x \in G, \ \ q = \overline{2, m-1},$$

где функции v_q таковы, что в каждой точке x области G

$$p_1^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} v_i(x) p_1^{(k-i)}(x), \ \ k = \overline{1, m-1}.$$

Теорема 5 предусматривает как случай вещественного собственного числа λ_1 матрицы B, так и комплексного. При комплексном λ_1 первые интегралы W_5^q, $q = \overline{2, m-1}$, распадаются на вещественные интегралы

$$W_5^{q,1} : x \to \operatorname{Re} v_q(x), \ \ W_5^{q,2} : x \to \operatorname{Im} v_q(x), \ \ \forall x \in G, \ \ q = \overline{2, m-1}.$$

1. Горбузов В.Н., Самодуров А. А. Уравнение Дарбу и его аналоги. Гродно, 1985.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб., 2003.
3. Латышева К.Я. // Историко-математические исследования. 1956. Вып. 9. С. 691.
4. Darboux M. G. // Bull, des sci. 1878. Vol. 2. P. 60.
5. Лагутинский М. Частные алгебраические интегралы. Харьков, 1908.
6. Горбузов В.Н. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №4. С. 562.
7. Буслюк Д.В., Горбузов В.Н. //Весн. Гродзен. ун-та. Сер. 2. 2000. № 1 (3). С. 4.
8. Буслюк Д.В. // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 3. С. 418.
9. Буслюк Д.В. Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Гродно, 2000.
10. Тыщенко В.Ю. // Проективное матричное уравнение Риккати. Мн., 1994. Деп. в ВИНИТИ 04.05.94, № 1077-В94.
11. Горбузов В.Н., Проневич А.Ф. // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48. № 1. С. 49.

12. Горбузов В.Н.// Дифференц. уравнения и процессы управления (http:// www. neva.ru). 2000. №2. С. 1.

Поступила в редакцию 11.10.04.

Виктор Николаевич Горбузов - кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы.

Сергей Николаевич Даранчук - магистрант кафедры математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы. Научный руководитель - В.Н. Горбузов.