Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 3

УДК 537.1

Н.А. АХРАМЕНКО, Л.М. БУЛАВКО

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРЫ

The electric field strength of an evenly charged sphere was calculated for the surface points by different methods. Comparison with the expressions for the near surface points was performed.

В курсе общей физики большое внимание уделяется задачам на определение напряженности электрического поля системы распределенных зарядов. Определить величину напряженности электрического поля системы зарядов в ва-кууме можно несколькими способами:

1) используя принцип суперпозиции;

2) применяя теорему Остроградского - Гаусса для электрического поля в вакууме;

3) используя связь напряженности и потенциала для электрического поля.

Рассмотрим задачу на определение поля равномерно заряженной сферы как весьма значимую с научно-методической точки зрения.

Методика решения этой задачи [1-9] базируется на использовании теоремы Остроградского - Гаусса, поскольку при этом проводится минимум вычисле-ний по сравнению с другими способами. В результате получают выражения для величины напряженности электрического поля внутри сферы, а также вне ее. Что же касается напряженности электрического поля в точках, принадлежащих поверхности сферы, то здесь ситуация неясная: одни авторы считают, что напряженность поля в этих точках будет такой же, как в точках, лежащих на бесконечно близком расстоянии от внешней поверхности; другие вообще не затрагивают этого вопроса. Четкого и ясного освещения этой проблемы в литературе нам найти не удалось. Между тем знание напряженности поля именно в точках, принадлежащих сферической поверхности, позволяет определить величину возникающих сил. Для того чтобы прояснить возникшую ситуацию, эта задача была решена путем использования принципа суперпозиции электрических полей.

Пусть радиус сферы равен R, а расстояние от центра сферы до точки, в которой находим напряженность поля, равно r (рис. 1).

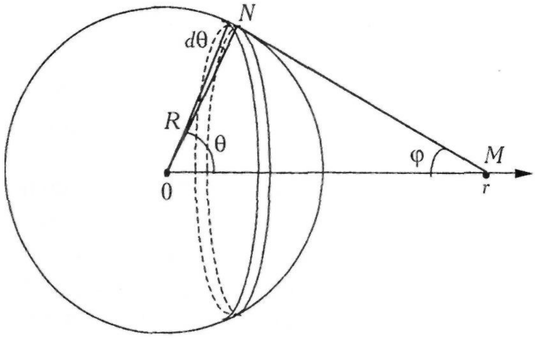

Рис. 1. Вычисление напряженности электрического поля равномерно заряженной сферы

Представим сферу в виде множества элементарных колец разного радиуса. Радиус каждого кольца будет зависеть от угла θ ($R\sin\theta$). Длина колец также зависит от угла θ ($2\pi R\sin\theta$). Площадь каждого кольца равна $2\pi R\sin\theta R d\theta$ а ширина - $R d\theta$. Заряд, расположенный на кольце, $dq=2\pi R\sin\theta\sigma R d\theta$ (σ - поверхностная плотность заряда). Напряженность поля одного элементарного кольца радиуса $R\sin\theta$ в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии ($r - R\cos\theta$) от центра кольца, определяется выражением

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 |MN|^2}\cos\varphi,$$

где ε_0 - электрическая постоянная.

Подставим в это выражение

$|MN|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ (теорема косинусов) и

$$\cos\varphi = \frac{r - R\cos\theta}{|MN|} = \frac{r - R\cos\theta}{\left[R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta\right]^{1/2}}.$$

В результате получим

$$dE = \frac{(r - R\cos\theta)dq}{4\pi\varepsilon_0\left[R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta\right]^{3/2}}.$$

Тогда напряженность поля всей сферы определяется интегралом вида

$$E = \int_0^\pi \frac{2\pi\sigma R^2\sin\theta(r - R\cos\theta)d\theta}{4\pi\varepsilon_0\left[R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta\right]^{3/2}}.$$

Положив, что $A = \frac{R}{r}$, а $\cos\theta = x$, получим

$$E = \frac{\sigma A^2}{2\varepsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{(1 - Ax)dx}{\left[1 + A^2 - 2Ax\right]^{3/2}} = \frac{\sigma A^2}{2\varepsilon_0}I(A),$$

где $I(A) = \int_{-1}^{1}\frac{(1 - Ax)dx}{\left[1 + A^2 - 2Ax\right]^{3/2}}$.

Исследование полученного интеграла показывает, что, несмотря на сложность подынтегрального выражения, значение этого интеграла представляется достаточно простым: при величине $A<1$ получим $I(A)=2$; при $A=1$ получим $I(1)=1$; при $A>1$ получим $I(A)=0$.

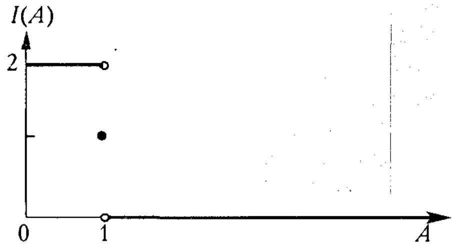

Рис. 2. Зависимость полученного интеграла от величины параметра A

Графическая зависимость значения полученного интеграла от величины параметра A представлена на рис. 2.

Исходя из сказанного, напряжен-ность поля равномерно заряженной сферы можно представить в виде

$$E=\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 r^2}I(A)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{I(A)}{2},$$

где $Q=4\pi R^2\sigma$ - заряд сферы.

Графическая зависимость величины напряженности электрического поля от расстояния до исследуемой точки представлена на рис. 3.

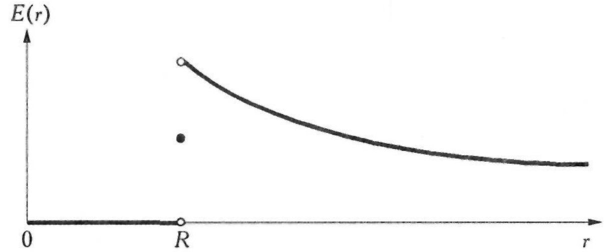

Рис. 3. Зависимость напряженности электрического поля $E(r)$ от расстояния r до исследуемой точки

Таким образом, величина напряженности электрического поля на поверхности сферы не равна величине его напряженности вблизи внешней поверхности сферы.

В результате расчетов величина напряженности электрического поля сферы для точек внутри, вне и на поверхности получается такой же, как и при использовании теоремы Остроградского - Гаусса для потока вектора напряженности электрического поля в вакууме в формулировке, предложенной нами в [10]: поток вектора напряженности электрического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю для зарядов внутри гауссовой поверхности, $q/2\varepsilon_0$ - для зарядов, расположенных на гауссовой поверхности, q/ε_0 - для зарядов вне гауссовой поверхности.

Из этой теоремы также следует, что напряженность поля на поверхности сферы в два раза меньше, чем вблизи внешней поверхности. В этом случае

$$4\pi R^2 E=\frac{q}{2\varepsilon_0},$$

откуда

$$E=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Рассмотрим еще один способ определения напряженности поля на поверхности сферы. Вообразим сферу радиуса R с зарядом q. Пусть под действием сил взаимного отталкивания зарядов сфера увеличилась и ее радиус стал равным $R+dr$. Потенциальная энергия сферы уменьшилась на величину

$$dW=\frac{q^2}{2C_1}-\frac{q^2}{2C_2}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0(R+dr)}=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}dr. \qquad (1)$$

В то же время работа при перемещении зарядов

$$\delta A=\mathbf{F}d\mathbf{r}=Eqdr, \qquad (2)$$

где E - напряженность на поверхности сферы. Так как работа совершается за счет уменьшения потенциальной энергии, то

$$\delta A = dW, \tag{3}$$

откуда, подставив в (3) формулы (1) и (2), получим

$$E = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Таким образом, определение напряженности поля тремя способами (применение принципа суперпозиции электрических полей, теоремы Остроградского - Гаусса для величины напряженности электрического поля и закона сохранения энергии) позволяет утверждать, что напряженность поля на поверхности сферы в два раза меньше, чем вблизи внешней поверхности.

Зная напряженность поля, найдем силу, действующую на элемент поверхности площадью ΔS с поверхностной плотностью заряда σ:

$$f = E\sigma\Delta S = \frac{q\sigma}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\Delta S = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta S.$$

Здесь необходимо отметить, что величина площади поверхности ΔS должна быть такой, чтобы она не повлияла на величину напряженности E, создаваемую остальными точками сферы.

В связи с этим хотелось бы обратить внимание на распространенную задачу ([1], с. 39): «Проводящая сфера радиуса R составлена из двух полусфер. Определить силу F, с которой отталкиваются эти полусферы, если полный заряд сферы равен Q». В данном случае нельзя применять приведенную в [1] формулу ввиду того, что площадь полусферы много больше площади ΔS (что приводится в решении этой задачи, а это неверно). Для того чтобы найти силу, действующую на вторую полусферу, нужно определить напряженность поля, создаваемую первой полусферой в точках расположения второй полусферы. Очевидно, что она отлична от напряженности поля, создаваемой всей сферой. То же относится и к следующей задаче [1].

Анализ полученных зависимостей и графиков позволяет усмотреть закономерность в характере зависимости величины напряженности электрического поля при переходе через равномерно заряженную поверхность. График претерпевает разрыв и включает обособленную точку. Учитывая изложенное, можно сделать вывод, что рассмотрение данной задачи целесообразно ввести в содержание учебного процесса курса общей физики как имеющей существенное научно-методическое значение.

1. Сивухин Д.В. Электричество. М., 1983.
2. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М, 1983.
3. Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики: Электричество и магнетизм. М,, 1980.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М, 1989.
5. Трофимова Т.И. Курс физики. М., 1999.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. В 2 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. М., 1988.
7. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М., 1990.
8. Трофимова Т.И. Справочник по физике для студентов и абитуриентов. М, 2001.
9. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Физика для школьников старших классов и поступающих в вузы. М, 2001.

Поступила в редакцию 28.04.05.

Николай Арсеньевич Ахраменко - кандидат технических наук, доцент кафедры физики Белорусского государственного университета транспорта.

Лариса Михайловна Булавко - старший преподаватель кафедры физики Белорусского государственного университета транспорта.