

О КЛАССАХ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Two classes of nonlinear partial differential equations of the order $n \geq 2$ with Painleve property have been obtained.

Пусть D - оператор дифференцирования по x . Операторы L и B зададим следующим образом:

$$L = D - v, \quad (1)$$

$$B = D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \dots + p_{n-2} D^2 + p_{n-1} D + p_n, \quad (2)$$

где $v = v(x, t)$, $p_k = p_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть $Bu = u$, $Lu = \lambda u$, λ - собственное значение оператора L . Тогда

$$u_x - vu = \lambda u. \quad (3)$$

Имеет место

Теорема 1. Чтобы собственное значение λ оператора L из (1) не зависело от времени t , функция v должна удовлетворять уравнению

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k D^{n-k} v = v_t + a, \quad p_k = \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} (e^{-q}) e^q, \quad (4)$$

$$q_x = v, \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_i = \gamma_i(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad a = a(x, t).$$

Доказательство. Про дифференцируем (3) по t . Получим

$$u_{xt} - v_t u_t - v u_t = \lambda_t u + \lambda u_t.$$

Пусть $A_t = 0$. Тогда имеем

$$u_{xt} - v u_t = v_t u + \lambda u_t. \quad (5)$$

С учетом (1) перепишем (5) в виде

$$L u_t = v_t u + \lambda u_t. \quad (6)$$

Так как оператор B определяет эволюцию собственной функции u по времени, из (6) имеем

$$L(Bu) = v_t u + \lambda(Bu).$$

В силу того, что $\lambda = \text{const}$, запишем

$$L(Bu) - B(\lambda u) = v_t u$$

или

$$(LB - BL)u = v_t u. \quad (7)$$

С учетом (1), (2) будем иметь

$$\begin{aligned} (LB - BL)u &= (D - v)(D^n u + p_1 D^{n-1} u + p_2 D^{n-2} u + \dots + p_{n-2} D^2 u + p_{n-1} D u + \\ &+ p_n u) - (D^n + p_1 D^{n-1} + p_2 D^{n-2} + \dots + p_{n-2} D^2 + p_{n-1} D + p_n)(Du - v u) = \\ &= (D - v) \left(\sum_{k=0}^n p_k D^{n-k} u \right) - \left(\sum_{k=0}^n p_k D^{n-k} \right) (Du - v u) = \\ &= \sum_{k=1}^n (D p_k - v p_k) D^{n-k} u + \sum_{k=0}^n p_k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i D^i v D^{n-k-i} u = \\ &= \sum_{k=1}^n D p_k D^{n-k} u + \sum_{k=0}^{n-1} p_k \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i D^i v D^{n-k-i} u = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(D p_k + \sum_{i=1}^k C_{n-k+i}^i p_{k-i} D^i v \right) D^{n-k} u, \end{aligned} \quad (8)$$

где считаем $p_0 = 1$, $D^0 u = u$. С учетом (8) из (7) получим

$$\sum_{k=1}^n \left(D p_k + \sum_{i=1}^k C_{n-k+i}^i p_{k-i} D^i v \right) D^{n-k} u - v_t u = 0. \quad (9)$$

Чтобы равенство (9) выполнялось тождественно, необходимо требовать равенство нулю коэффициентов при $D^i u$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогда получим для функции v уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k D^{n-k} v = v_t + a,$$

где $a = -D p_n$, а коэффициенты p_k заданы рекуррентными формулами

$$p_k = - \int \left(\sum_{i=1}^k C_{n-k+i}^i p_{k-i} D^i v \right) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Например,

$$\begin{aligned} p_1 &= -C_n^1 v + \gamma_1, \quad p_2 = -C_{n-1}^2 (v_x - v^2) - C_{n-1}^1 \gamma_1 v + \gamma_2, \\ p_3 &= -C_n^3 (v_{xx} - 3v v_x + v^3) - C_{n-1}^2 \gamma_1 (v_x - v^2) - C_{n-2}^1 \gamma_2 v + \gamma_3, \gamma_i = \gamma_i(t), \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Преобразуем формулу для p_k . Выполним замену $h = e^q$, где $q_x = v$. Так как $h_x = -v e^{-q}$, $h_{xx} = -(v_x - v^2) e^{-q}$, $h_{xxx} = -(v_{xx} - 3v v_x + v^3) e^{-q}$, то можно записать

$$\begin{aligned} p_1 &= C_n^1 h_x e^q + \gamma_1, \quad p_2 = C_n^2 h_{xx} e^q + C_{n-1}^1 \gamma_1 h_x e^q + \gamma_2, \\ p_3 &= C_n^3 h_{xxx} e^q + \gamma_1 C_{n-1}^2 h_{xx} e^q + \gamma_2 C_{n-2}^1 h_x e^q + \gamma_3. \end{aligned}$$

Докажем, что все коэффициенты p_k можно найти по формуле

$$p_k = \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} (e^{-q}) e^q, \quad q_x = v, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

где $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $\gamma_0 = 1$. Мы уже убедились, что формула (10) верна при $k=1, 2, 3$. Допустим, что формула (10) верна при всех $k < s$. Докажем, что (10) имеет место при $k=s$. В самом деле,

$$\begin{aligned} p_s &= - \int \left(\sum_{i=1}^s C_{n-s+i}^i p_{s-i} D^i v \right) dx = - \int \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{s-i} C_{n-s+i}^i C_{n-j}^{s-i-j} \gamma_j D^{s-i-j} (e^{-q}) e^q D^i (Dq) \right) dx = \\ &= - \int \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{s-i} C_{n-s+i}^i C_{n-j}^{s-i-j} \gamma_j D^{s-i-j} (e^{-q}) e^q D^i (Dq) \right) dx = \\ &= - \int \left(\sum_{j=0}^{s-1} C_{n-j}^{s-j} \gamma_j \left(\sum_{i=0}^{s-j} C_{s-j}^i D^{s-i-j} (e^{-q}) e^q D^i (Dq) - D^{s-j} (e^{-q}) e^q Dq \right) \right) dx = \\ &= - \int \left(\sum_{j=0}^{s-1} C_{n-j}^{s-j} \gamma_j \left(D^{s-j} (e^{-q} Dq) e^q - D^{s-j} (e^{-q}) e^q Dq \right) \right) dx = \\ &= \int \left(\sum_{j=0}^{s-1} C_{n-j}^{s-j} \gamma_j D \left(D^{s-j} (e^{-q}) e^q \right) \right) dx = \sum_{j=0}^{s-1} C_{n-j}^{s-j} \gamma_j \int D \left(D^{s-j} (e^{-q}) e^q \right) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} C_{n-j}^{s-j} \gamma_j D^{s-j} (e^{-q}) e^q + \gamma_s = \sum_{j=0}^s C_{n-j}^{s-j} \gamma_j D^{s-j} (e^{-q}) e^q. \end{aligned}$$

Значит, формула (10) верна. Теорема 1 доказана.

При $n=2, 3, 4, 5$ уравнение (4) соответственно примет вид

$$\begin{aligned} (v_x - v^2 + \gamma_1 v)_x &= v_t + a, \quad (v_x - 3vv_x + v^3 + \gamma_1(v_x - v^2) + \gamma_2 v)_x = v_t + a, \\ (v_{xxx} - 4vv_{xx} - 3v_x^2 + 6v^2 v_x - v^4 + \gamma_1(v_{xx} - 3vv_x + v^3) + \gamma_2(v_x - v^2) + \gamma_3 v)_x &= v_t + a, \\ (v_{xxxx} - 5vv_{xxx} + 10v^2 v_{xx} - 10v_x v_{xx} - 10v^3 v_x + 15vv_x^2 + v^5 + \\ + \gamma_1(v_{xxx} - 4vv_{xx} - 3v_x^2 + 6v^2 v_x - v^4) + \gamma_2(v_{xx} - 3vv_x + v^3) + \\ + \gamma_3(v_x - v^2) + \gamma_4 v)_x &= v_t + a. \end{aligned}$$

Теорема 2. Нелинейное уравнение (4) имеет свойство Пенлеве.

Доказательство. Выполним замену

$$v = -\frac{Dw}{w}. \quad (11)$$

Коэффициенты p_k при этом примут вид

$$p_k = \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} \gamma_i \frac{\partial^{k-i} w}{w}, \quad k=1, 2, \dots, n-1. \quad (12)$$

С учетом (11), (12) перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{1}{w} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} w D^{n-i} \left(-\frac{Dw}{w} \right) = -\frac{(Dw)_t}{w} + \frac{w_t Dw}{w^2} + a.$$

Поменяв порядок суммирования и записав отдельно слагаемые при $k=i$, получим

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i D^{n-i} \left(\frac{Dw}{w} \right) - \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i+1}^{n-1} C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} w D^{n-k} \left(\frac{Dw}{w} \right) = -D \left(\frac{w_t}{w} \right) + a,$$

откуда найдем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k \gamma_i D^{k+1} w D^{n-k-i} \left(\frac{1}{w} \right) + \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i+1}^{n-1} C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} w D w D^{n-k} \left(\frac{1}{w} \right) + \\ + \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=i+1}^{n-k} C_{n-i}^k C_{n-j-k}^{j-i} \gamma_i \frac{D^{j-i} w}{w} D^{k+1} w D^{n-k-j} \left(\frac{1}{w} \right) = D \left(\frac{w_t}{w} \right) - a. \end{aligned} \quad (13)$$

Методом математической индукции докажем

$$D^n \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{1}{w} \sum_{k=1}^n C_n^k D^k w D^{n-k} \left(\frac{1}{w} \right). \quad (14)$$

Легко проверить, что при $n=1$ формула (14) верна. Пусть (14) имеет место при всех $n < s$. Докажем, что (14) выполняется при $n=s$. В самом деле,

$$\begin{aligned} D^s \left(\frac{1}{w} \right) &= D \left(D^{s-1} \left(\frac{1}{w} \right) \right) = -D \left(\frac{1}{w} \sum_{k=1}^{s-1} C_{s-1}^k D^k w D^{s-k-1} \left(\frac{1}{w} \right) \right) = \\ &= \frac{w_x}{w^2} \sum_{k=1}^{s-1} C_{s-1}^k D^k w D^{s-k-1} \left(\frac{1}{w} \right) - \frac{1}{w} \sum_{k=1}^{s-1} C_{s-1}^k D^{k+1} w D^{s-k-1} \left(\frac{1}{w} \right) - \\ &- \frac{1}{w} \sum_{k=1}^{s-1} C_{s-1}^k D^k w D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{w_x}{w} D^{s-1} \left(\frac{1}{w} \right) - \frac{1}{w} \sum_{k=2}^s C_{s-1}^{k-1} D^k w D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) - \\ &- \sum_{k=2}^s C_{s-1}^{k-1} \frac{D^k w}{w} D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) - \sum_{k=1}^{s-1} C_{s-1}^k \frac{D^k w}{w} D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{w_x}{w} D^{s-1} \left(\frac{1}{w} \right) - \frac{D^s w}{w^2} - \\ &- \frac{1}{w} (s-1) w_x D^{s-1} \left(\frac{1}{w} \right) - \frac{1}{w} \sum_{k=2}^{s-1} C_{s-1}^{k-1} D^k w D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) - \frac{1}{w} \sum_{k=2}^{s-1} C_{s-1}^k D^k w D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) = \\ &= -\frac{1}{w} \left(s w_x D^{s-1} \left(\frac{1}{w} \right) + \frac{1}{w} D^s w + \sum_{k=2}^{s-1} (C_{s-1}^{k-1} + C_{s-1}^k) D^k w D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{w} \sum_{k=1}^s C_s^k D^k w D^{s-k} \left(\frac{1}{w} \right). \end{aligned}$$

Значит, формула (14) верна при любом натуральном n . Применив к первому слагаемому уравнения (13) формулу (14), будем иметь

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-i-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{n-i}^k C_{n-k-i}^j \gamma_i^{k+1} w D^j w D^{n-k-i-j} \left(\frac{1}{w} \right) + \\ &+ \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=j+1}^{n-k} C_{n-i}^k C_{n-i-k}^{j-i} \gamma_i D^{j-i} w D^{k+1} w D^{n-k-j} \left(\frac{1}{w} \right) + \\ &+ \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i+1}^{n-1} C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} w D w D^{n-k} \left(\frac{1}{w} \right) = \left(\frac{w_t}{w} \right)_x - a, \end{aligned}$$

откуда, выполнив во втором слагаемом замену $j=s+i$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i D^{n-i+1} w + \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i D w D^{n-i} \left(\frac{1}{w} \right) + \gamma_{n-1} \left(D w D \left(\frac{1}{w} \right) + \frac{D^2 w}{w} \right) + \\ &+ \frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=i+1}^{n-1} C_{n-i}^{k-i} \gamma_i D^{k-i} w D w D^{n-k} \left(\frac{1}{w} \right) = \left(\frac{w_t}{w} \right)_x - a. \end{aligned}$$

Воспользовавшись во втором слагаемом формулой (14) и выполнив в последнем слагаемом левой части последнего уравнения замену $k=s+i$, получим

$$\frac{1}{w} \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i D^{n-i+1} w - \frac{1}{w^2} \sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i D w D^{n-i} \left(\frac{1}{w} \right) + \gamma_{n-1} D \left(\frac{D w}{w} \right) = D \left(\frac{w_t}{w} \right) - a$$

или

$$\sum_{i=0}^{n-2} \gamma_i D \left(\frac{D^{n-i} w}{w} \right) + \gamma_{n-1} D \left(\frac{D w}{w} \right) = D \left(\frac{w_t}{w} \right) - a.$$

Обозначив $a = -b_x$, перепишем последнее уравнение в виде

$$D \left(\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \frac{D^{n-i} w}{w} \right) = D \left(\frac{w_t}{w} + b \right)$$

или

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i D^{n-i} w = w, + (b + h)w, \quad (15)$$

где $b=b(x, t)$, $h=h(t)$, $\gamma_0=1$, $\gamma_i=\gamma_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Итак, заменой (11) уравнение (4) приводится к виду (15). Уравнение (15) - линейное. Значит, оно не имеет никаких подвижных особенностей [1, с. 9, 25, 38].

Тогда функция $v = -\frac{Dw}{w}$ также не имеет подвижных критических особенностей. Но в тех точках (x, t) , где $w(x, t)=0$, функция v имеет полярные подвижные особенности однозначного характера. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим далее уравнение $Bu = u$. Из (3) найдем $v = \frac{u_x}{u} - \lambda$. Тогда с учетом (2), (10), полагая $p_n=c$, $c=c(x, t)$, получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} \gamma_i u e^{-\lambda x} D^{k-i} \left(\frac{e^{\lambda x}}{u} \right) D^{n-k} u = u, - cu, \quad (16)$$

где $u=u(x, t)$, $\gamma_0=1$, $\gamma_i=\gamma_i(t)$, $i = 1, n-1$.

Теорема 3. Нелинейное уравнение (16) имеет свойство Пенлеве.

Доказательство. Выполним замену

$$u = \frac{1}{g}. \quad (17)$$

Имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \sum_{j=0}^k \gamma_i C_{n-i}^k C_k^j \frac{1}{g} \lambda D^{n-i-k} \left(\frac{1}{g} \right) D^{k-j} g = -\frac{g_i}{g^2} - \frac{c}{g}.$$

Умножая данное уравнение на $-g^2$ и выделяя слагаемые при $j = k$, получим

$$-\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \gamma_i C_{n-i}^k g^2 \lambda^k D^{n-i-k} \left(\frac{1}{g} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_i C_{n-i}^k C_k^j g \lambda^j D^{n-i-k} \left(\frac{1}{g} \right) D^{k-j} g = g_i + cg.$$

Воспользуемся в первой сумме формулой (14)

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \sum_{j=1}^{n-i-k} \gamma_i C_{n-i}^k C_{n-i-k}^j g \lambda^k D^j g D^{n-i-k-j} \left(\frac{1}{g} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_i C_{n-i}^k C_k^j g \lambda^j D^{n-i-k} \left(\frac{1}{g} \right) D^{k-j} g = g_i + cg.$$

Выделяя слагаемые при $j=n-i-k$, получим

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \gamma_i C_{n-i}^k \lambda^k D^{n-i-k} g + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=1}^{n-i-k} \gamma_i C_{n-i}^k C_{n-i-k}^j g \lambda^k D^j g D^{n-i-k-j} \left(\frac{1}{g} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_i C_{n-i}^k C_k^j g \lambda^j D^{n-i-k} \left(\frac{1}{g} \right) D^{k-j} g = g_i + cg. \quad (18)$$

Можно показать, что имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \sum_{j=1}^{n-i-k} \gamma_i C_{n-i}^k C_{n-i-k}^j g \lambda^k D^j g D^{n-i-k-j} \left(\frac{1}{g} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i-1} \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_i C_{n-i}^k C_k^j g \lambda^j D^{n-i-k} \left(\frac{1}{g} \right) D^{k-j} g.$$

Тогда уравнение (18) примет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i-1} \gamma_i C_{n-i}^k \lambda^k D^{n-i-k} g = g_i + cg. \quad (19)$$

Итак, заменой (17) уравнение (16) приводится к виду (19). Уравнение (19) - линейное. Значит, оно не имеет никаких подвижных особенностей [1, с. 9, 25, 38].

Тогда функция $u = \frac{1}{g}$ также не имеет подвижных критических особенностей.

Но в тех точках (x, t) , где $g(x, t)=0$, функция u имеет полярные подвижные особенности однозначного характера. Теорема 3 доказана.

1. Cosgrove C.M. // Stud. Appl. Math. 1993. Vol. 89. P. 1.

Поступила в редакцию 04.12.03.

Елена Евгеньевна Кулеш - ассистент кафедры математического анализа ГрГУ. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы И.П. Мартынов.