Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 2

УДК 519.24

Ж.В. ВАСИЛЕНКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ, ПОСТРОЕННОЙ ПО НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ИНТЕРВАЛАМ НАБЛЮДЕНИЙ

In this article the moments of the estimate of spectral density constructed from averaging of modified periodograms over non-overlapping observation intervals have been calculated. Asymptotic behaviors of the first two moments have been investigated.

Рассмотрим действительный стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t)$, $t\in Z$, со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda\in\prod=[-\pi, \pi]$.

Пусть $X(0)$, $X(1)$, ..., $X(T-1)$ - T последовательных, полученных через равные промежутки времени, наблюдений за процессом $X(t)$, $t\in Z$. Предположим, что число наблюдений T за процессом $X(t)$, $t\in Z$, представимо в виде: $T=L[r(N-1)+1]$, где $r\in\{1,2, ...\}$, $N\in\{1, 2, ...\}$, L -число непересекающихся интервалов разбиения, содержащих по $r(N-1)$ наблюдению, каждое из которых, в свою очередь, разбиваем на r отрезков длиной N.

В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику вида

$$\hat{f}_{N,r}(\lambda)=\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left|\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}^{l}_{N,r}}}\sum_{t=l[r(N-1)+1]}^{(l+1)[r(N-1)+1]-1} Q_{N,r}(t-l[r(N-1)+1])X(t)e^{-i\lambda t}\right|^2, \quad (1)$$

где функция $Q_{N,r}(t)$ определяется как решение уравнения

$$\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q_{N,r}(t)e^{itx}=\left(\sum_{t=0}^{N-1}e^{itx}\right)^r, \quad (2)$$

$$\mathrm{H}^{l}_{N,r}=2\pi\sum_{t=l[r(N-1)+1]}^{(l+1)[r(N-1)+1]-1} Q^2_{N,r}(t-l[r(N-1)+1]),$$

$$l=\overline{0,L-1},\ \lambda\in\prod.$$

В работе [1] показано, что математическое ожидание оценки спектральной плотности $\hat{f}_{N,r}(\lambda)$, $\lambda\in\prod$, задаваемой соотношением (1), имеет вид

$$M\hat{f}_{N,r}(\lambda)=\int_{\Pi} f(y+\lambda)\Phi_{N,r}(y)\,dy,$$

$$\Phi_{N,r}(y)=H^{-1}_{N,r}\Delta^{2r}_{N}(y),$$

$$\mathrm{H}_{N,r}=2\pi\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q^2_{N,r}(t), \quad (3)$$

$$\Delta_N(y)=\sin\frac{Ny}{2}\left(\sin\frac{y}{2}\right)^{-1}. \quad (4)$$

Теорема 1. Если спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda\in\prod$, ограничена на множестве Π и непрерывна в точке $\lambda\in\prod$, тогда

$$\lim_{N\to\infty} M\hat{f}_{N,r}(\lambda) = f(\lambda),$$

где $\lambda\in\prod$.

Доказательство. Так как $\Phi_{N,r}(y)$ является ядерной функцией [1], то в условиях теоремы 1 имеем требуемое.

Теорема 2. [2] Для любых точек λ_1, $\lambda_2\in\prod$ ковариация оценки спектральной плотности $\hat{f}_{N,r}(\lambda)$, $\lambda\in\prod$, задаваемой соотношением (1), имеет вид

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{f}_{N,r}(\lambda_1),\, \hat{f}_{N,r}(\lambda_2)\right\} = \frac{(2\pi)^3}{L}\frac{1}{(H_{N,r})^2}\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q^4_{N,r}(t)\iiint\limits_{\Pi^3}\Phi_{N,r}(\mu_1,\, \mu_2,\, \mu_3)\times$$
$$\times f_4(\mu_1+\lambda_1, \mu_2-\lambda_1, \mu_3-\lambda_2)P_L\Big[\big(r(N-1)+1\big)(\mu_1+\mu_2)\Big]d\mu_1\, d\mu_2\, d\mu_3 +$$
$$+\frac{1}{L}\iint\limits_{\Pi^2}\Phi_{N,r}(\beta-\lambda_1, \beta-\lambda_2)\Phi_{N,r}(\gamma+\lambda_1, \gamma+\lambda_2)\times$$
$$\times f_2(\beta)f_2(\gamma)P_L\Big[\big(r(N-1)+1\big)(\beta+\gamma)\Big]d\beta\, d\gamma + \tag{5}$$
$$+\frac{1}{L}\iint\limits_{\Pi^2}\Phi_{N,r}(\mu-\lambda_1, \mu+\lambda_2)\Phi_{N,r}(\nu+\lambda_1, \nu-\lambda_2)\times$$
$$\times f_2(\mu)f_2(\nu)P_L\Big[\big(r(N-1)+1\big)(\mu+\nu)\Big]d\mu\, d\nu,$$

где

$$\Phi_{N,r}(y_1, y_2, y_3) = \frac{\Delta^r_N(y_1)\Delta^r_N(y_2)\Delta^r_N(y_3)\Delta^r_N(y_1+y_2+y_3)}{(2\pi)^3\sum\limits_{t=0}^{r(N-1)} Q^4_{N,r}(t)},$$

$$P_L\Big[\big(r(N-1)+1\big)(x+y)\Big] = \frac{1}{L}\frac{\sin^2\dfrac{\big[r(N-1)+1\big](x+y)L}{2}}{\sin^2\dfrac{\big[r(N-1)+1\big](x+y)}{2}},$$

$$\Phi_{N,r}(y_1, y_2) = H^{-1}_{N,r}\Delta^r_N(y_1)\Delta^r_N(y_2),$$

$\lambda_1, \lambda_2\in\Pi$, функции $H_{N,r}$ и $\Delta_N(y)$ заданы соотношениями (3), (4) соответственно, $f_4(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ - семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка, $\mu_i\in\Pi$, $i=1, 2, 3$, $x, y\in\Pi$, $y_1, y_2, y_3\in\Pi$.

Теорема 3. Если спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, непрерывна в точках $\lambda_1, \lambda_2\in\Pi$ и ограничена на множестве Π, семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена постоянной C и выполняется соотношение

$$\sup_N \iiint\limits_{\Pi^3}\left|\Phi_{N,r}(y_1, y_2, y_3)\right| dy_1dy_2dy_3 \le D, \tag{6}$$

то оценка $f_{N,r}(\lambda)$, задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{cov}\left\{\hat{f}_{N,r}(\lambda_1),\, \hat{f}_{N,r}(\lambda_2)\right\} = \begin{cases} 0, \text{ если } \lambda_1\pm\lambda_2\ne 0 \pmod{2\pi}, \\ \dfrac{1}{L}f^2(\lambda_2), \text{ если } \lambda_1+\lambda_2=0 \pmod{2\pi},\ \lambda_1, \lambda_2\ne 0 \pmod{\pi}, \\ \dfrac{1}{L}f^2(\lambda_2), \text{ если } \lambda_1-\lambda_2=0 \pmod{2\pi},\ \lambda_1, \lambda_2\ne 0 \pmod{\pi}, \\ \dfrac{2}{L}f^2(\lambda_2), \text{ если } \lambda_1=\lambda_2=0 \pmod{2\pi}. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение для ковариации, полученное в теореме 2. Обозначим каждое из слагаемых правой части выражения (5) A_1, A_2, A_3, соответственно. С учетом соотношений (3), (6) имеем

$$|A_1| \le 2\pi CD\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q^4_{N,r}(t)\left[\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q^2_{N,r}(t)\right]^{-2}.$$

Отсюда и из соотношения (2) вытекает, что $A_1\to 0$ при $N\to\infty$. Рассмотрим слагаемое A_2 для точек λ_1, λ_2еΠ, λ_1-$\lambda_2\ne 0$ (mod 2π). Используя приведенное в [1] соотношение

$$I_2 = \iint_{\Pi^2} \Phi_{N,r}(\beta-\lambda_1, \beta-\lambda_2)\Phi_{N,r}(\gamma+\lambda_1, \gamma+\lambda_2)P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(\beta+\gamma)\right]d\beta\, d\gamma =$$

$$= \left|\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q_{N,r}^2(t)e^{it(-\lambda_1+\lambda_2)}\right|^2 \left[\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q_{N,r}(t)\right]^{-2},$$

можем записать

$$\left|A_2 - I_2 f^2(\lambda_2)\frac{1}{L}\right| = \frac{1}{L}\left|\iint_{\Pi^2}\left[f_2(\beta)f_2(\gamma) - f^2(\lambda_2)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\Phi_{N,r}(\beta-\lambda_1, \beta-\lambda_2)\Phi_{N,r}(\gamma+\lambda_1, \gamma+\lambda_2)P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(\beta+\gamma)\right]d\beta\, d\gamma\right|.$$

Сделаем замену переменных интегрирования $x=\beta-\lambda_2$, $y=\gamma+\lambda_2$, тогда

$$\left|A_2 - I_2 f^2(\lambda_2)\frac{1}{L}\right| = \frac{1}{L}\left|\iint_{\Pi^2}\left[\left(f_2(x+\lambda_2) - f(\lambda_2)\right)\left(f_2(y-\lambda_2) - f(\lambda_2)\right)+\right.\right.$$

$$+f(\lambda_2)\left(f_2(y-\lambda_2)-f(\lambda_2)\right)+f(\lambda_2)\left(f_2(x+\lambda_2)-f(\lambda_2)\right)\Big]\times$$

$$\left.\times\Phi_{N,r}(x+\lambda_2-\lambda_1,\ x)\Phi_{N,r}(y-\lambda_2+\lambda_1,\ y)P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(x+y)\right]dx\, dy\right| \le$$

$$\le \frac{1}{L}\iint_{\Pi^2}\left|f_2(x+\lambda_2)-f(\lambda_2)\right|\left|f_2(y-\lambda_2)-f(\lambda_2)\right|\left|\Phi_{N,r}(x+\lambda_2-\lambda_1,\ x)\times\right.$$

$$\left.\times\Phi_{N,r}(y-\lambda_2+\lambda_1,\ y)\right|P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(x+y)\right]dx\, dy+$$

$$+\frac{1}{L}\iint_{\Pi^2}\left|f(\lambda_2)\right|\left|f_2(y-\lambda_2)-f(\lambda_2)\right|\left|\Phi_{N,r}(x+\lambda_2-\lambda_1,\ x)\times\right.$$

$$\left.\times\Phi_{N,r}(y-\lambda_2+\lambda_1,\ y)\right|P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(x+y)\right]dx\, dy+$$

$$+\frac{1}{L}\iint_{\Pi^2}\left|f(\lambda_2)\right|\left|f_2(x+\lambda_2)-f(\lambda_2)\right|\left|\Phi_{N,r}(x+\lambda_2-\lambda_1,\ x)\times\right.$$

$$\left.\times\Phi_{N,r}(y-\lambda_2+\lambda_1,\ y)\right|P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(x+y)\right]dx\, dy.$$

Отсюда, учитывая, что спектральная плотность $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$, непрерывна в точках λ_1, $\lambda_2\in\Pi$ и ограничена на множестве Π, получаем, что $A_2\to 0$ при $N\to\infty$.

Аналогичным образом, как и для A_2, можно показать, что $A_3\to 0$ при $N\to\infty$ для точек λ_1, $\lambda_2\in\Pi$ и $\lambda_1+\lambda_2\neq 0 (\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

Если $\lambda_1-\lambda_2=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, то

$$A_2 = \frac{1}{L}\iint_{\Pi^2} f_2(x+\lambda_2)f_2(y-\lambda_2)\Phi_{N,r}(x)\Phi_{N,r}(y)P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(x+y)\right]dx\, dy.$$

Как показано в [1], функция $\Phi_{N,r}(x)\Phi_{N,r}(y)P_L(r(N-1)+1)(x+y)]$ является ядром на Π^2, $N=1, 2, \ldots, L=1, 2, \ldots$. Следовательно, в условиях теоремы

$A_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} \dfrac{1}{L}f^2(\lambda_2)$, если $\lambda_1-\lambda_2=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. Аналогичным образом, если

$\lambda_1+\lambda_2=0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, то

$$A_3 = \frac{1}{L}\iint_{\Pi^2} f_2(x-\lambda_2)f_2(y+\lambda_2)\Phi_{N,r}(x)\Phi_{N,r}(y)P_L\left[\left(r(N-1)+1\right)(x+y)\right]dx\, dy,$$

следовательно, $A_3 \xrightarrow[N\to\infty]{} \dfrac{1}{L}f^2(\lambda_2)$. Теорема доказана.

Следствие. Если спектральная плотность $f(x)$, $x\in\Pi$, непрерывна в точке $\lambda\in\Pi$ и ограничена на множестве Π, семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена на Π^3 и выполняется (6), тогда оценка спектральной плотности $\hat{f}_{N,r}(\lambda)$, задаваемая равенством (1), удовлетворяет соотношению

$$\lim_{N\to\infty} D\,\hat{f}_{N,r}(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{L}f^2(\lambda), & \text{если } \lambda\neq 0 \pmod{2\pi},\\ \dfrac{2}{L}f^2(\lambda), & \text{если } \lambda=0 \pmod{2\pi}.\end{cases}$$

Доказательство следствия вытекает из доказательства теоремы 3.

1. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.
2. Василенко Ж.В. // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: Материалы науч. конф., Минск, 22 апр. 2004 г. Мн., 2004. С. 11.
3. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. М., 1980.

Поступила в редакцию 04.06.04.

Жанна Витальевна Василенко - ассистент кафедры технологии программирования факультета прикладной математики и информатики.