

СВОЙСТВА ОКОН ПРОСМОТРА ДАННЫХ

By the investigation of the time series to improve the statistic preferences of spectral density estimations the windows for data browsing are used. In this article some preferences of these windows are considered.

Данная работа согласуется с исследованиями [1], кроме того, в ней использованы некоторые результаты, полученные Н.Н. Трушем в работе [2].

Теорема. Пусть $L_s^{(N)}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ - функция с периодическим продолжением, равным 2π , такая, что

$$L_s^{(N)}(\alpha) = \begin{cases} \left(\frac{s}{e}\right)^N N, & |\alpha| \leq \frac{e^s}{N}, \\ \frac{\ln^s N |\alpha|}{|\alpha|}, & \frac{e^s}{N} < |\alpha| \leq \pi, \end{cases}$$

где $s \in N_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $N \in N$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если окно просмотра данных $h_N: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, где $h_N(t) = h\left(\frac{t}{N}\right)$ и $h_N(0) = h_N(1) = 0$,

имеет вариацию, ограниченную постоянной V , то существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{t=1}^N h\left(\frac{t}{N}\right) e^{-i\alpha t} \right| \leq C V L_0^{(N)}(\alpha)$$

для $\forall \alpha \in \Pi = [-\pi, \pi]$ и $\forall N \in N$.

2. Пусть $k \in (0, 1)$, тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\int_{\Pi} |\alpha|^k L_0^{(N)}(\alpha)^2 d\alpha \leq C N^{1-k}$$

для $\forall \alpha \in \Pi$ и $\forall N \in N$.

3. Для $\forall \beta$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ существуют постоянные $C = C_{r,s}$ такие, что

$$\int_{\Pi} L_r^{(N)}(\gamma + \alpha) L_s^{(N)}(\beta - \alpha) d\alpha \leq C L_{r+s+1}^{(N)}(\beta + \gamma)$$

для $\forall r, s \in N_0$, $\alpha \in \Pi$, $N \in N$.

Доказательство. Из определения функции $L_s^{(N)}(\alpha)$ нетрудно видеть, что она является четной, непрерывной, дифференцируемой и строго убывает при $|\alpha| > \frac{e^s}{N}$.

Для доказательства утверждения 1 воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{t=1}^N h\left(\frac{t}{N}\right) e^{-i\alpha t} = \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{m=1}^t e^{-i\alpha m} \left[h\left(\frac{t}{N}\right) - h\left(\frac{t+1}{N}\right) \right] + \sum_{m=1}^{N-1} e^{-i\alpha m} h\left(\frac{N}{N}\right).$$

С учетом того, что $\sum_{m=1}^{N-1} e^{-i\alpha m} h\left(\frac{N}{N}\right) = 0$, $\sum_{t=1}^{N-1} \left| h\left(\frac{t}{N}\right) - h\left(\frac{t+1}{N}\right) \right| \leq V$ и

$\left| \sum_{m=1}^t e^{-i\alpha m} \right| \leq \frac{C}{|\sin \alpha/2|}$ при $\alpha > 0$, получим $\left| \sum_{t=1}^N h\left(\frac{t}{N}\right) e^{-i\alpha t} \right| \leq \frac{V}{|\sin \alpha/2|}$. Далее, исполь-

зуя элементарное неравенство $|\sin x/2| \geq |x|/\pi$, $|x| \leq \pi$, получим утверждение 1.

Доказательство утверждения 2 следует из того, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} |\alpha|^k L_0^{(N)}(\alpha)^2 d\alpha &= 2 \left[\int_0^{\frac{1}{N}} \alpha^k N^2 d\alpha + \int_{\frac{1}{N}}^{\pi} \alpha^k \frac{1}{\alpha^2} d\alpha \right] = \\ &= 2 \left[\frac{N^{-k-1+2}}{k+1} - \frac{N^2}{k-1} + \frac{\pi^{k-1}}{k-1} - \frac{N^{1-k}}{k-1} \right] \leq CN^{1-k}, \end{aligned}$$

так как $k \in (0, 1)$.

Для доказательства утверждения 3 положим $s \leq r$ и сделаем замену переменных: $\alpha = z - \gamma$. Из [2] следует, что поскольку $L_s^{(N)}(\alpha)$ - четная, периодическая и интегрируемая функция, то для любого $\gamma > 0$ имеет место:

$$\int_{\Pi} L_r^{(N)}(\alpha + \gamma) L_s^{(N)}(\beta - \alpha) d\alpha = \int_{-\pi + \gamma}^{\pi + \gamma} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}((\beta + \gamma) - z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z - (\beta + \gamma)) dz. \quad (1)$$

Так как $[L_s^{(N)}(\alpha)]' = -[L_s^{(N)}(-\alpha)]'$ для $-\pi \leq \alpha < 0$, то с учетом (1) для любых β, γ таких, что $(\beta + \gamma) \geq 0$, справедливо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(\beta + \gamma)} \int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z - (\beta + \gamma)) dz &= - \int_{\Pi} L_r^{(N)}(u + (\beta + \gamma)) [L_s^{(N)}(u)]' du = \\ &= - \int_{\frac{e'}{N}}^{\pi} L_r^{(N)}(u + (\beta + \gamma)) [L_s^{(N)}(u)]' du - \int_{\frac{e'}{N}}^{\pi} L_r^{(N)}(-x + (\beta + \gamma)) [L_s^{(N)}(-x)]' du = \\ &= \int_{\frac{e'}{N}}^{\pi} [L_s^{(N)}(x)]' [L_r^{(N)}(x - (\beta + \gamma)) - L_r^{(N)}(x + (\beta + \gamma))] dx \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z - (\beta + \gamma)) dz \leq \int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z) dz$, и достаточно показать, что:

- 1) $\int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z) dz \leq C \left(\frac{r+s+1}{e} \right)^{r+s+1} N \quad \forall (\beta + \gamma) \leq \frac{e^{r+s+1}}{N}$ и
- 2) $\int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z - (\beta + \gamma)) dz \leq C \frac{1}{\beta + \gamma} \ln^{r+s+1} N (\beta + \gamma) \quad \forall (\beta + \gamma) \geq \frac{e^{r+s+1}}{N}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} I_{[-\pi; \pi]} &= \int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z) dz = 2 \left[I_{\left[0, \frac{e'}{N}\right]} + I_{\left[\frac{e'}{N}, \frac{e'}{N}\right]} + I_{\left[\frac{e'}{N}, \pi\right]} \right]; \\ I_{\left[0, \frac{e'}{N}\right]} &= \int_0^{\frac{e'}{N}} \left(\frac{s}{e} \right)^s N \left(\frac{r}{e} \right)^r N dz = \frac{e'}{N} \left(\frac{s}{e} \right)^s N^2 \left(\frac{r}{e} \right)^r \leq N e^{-r} (s+r+1)^{s+r+1}; \\ I_{\left[\frac{e'}{N}, \frac{e'}{N}\right]} &= \int_{\frac{e'}{N}}^{\frac{e'}{N}} \frac{\ln^s N z}{z} \left(\frac{r}{e} \right)^r N dz \leq \frac{1}{s+1} N e^{-r} (r+s+1)^{r+s+1}. \end{aligned}$$

Из [3] следует, что для любых $0 \leq \alpha \leq \infty$ и $n=0, 1, \dots$ имеет место:

$$\int_{\alpha}^{\infty} v^n e^{-v} dv = e^{-\alpha} \sum_{j=0}^n \frac{\alpha^j}{j!} n! \quad (2)$$

Для оценки $I_{\left[\frac{e^r}{N}; \pi\right]}$ сделаем замену переменных $v = \ln Nz$, тогда с учетом (2)

$$I_{\left[\frac{e^r}{N}; \pi\right]} = \int_{\frac{e^r}{N}}^{\pi} \frac{\ln^s Nz}{z} \frac{\ln^r Nz}{z} dz = N \int_r^{\pi} v^{s+r} e^{-v} dv \leq N e^{-r} (s+r+1)^{s+r+1}.$$

Окончательно имеем: $\int_{\Pi} L_r^{(N)}(z) L_s^{(N)}(z) dz \leq C \left(\frac{s+r+1}{e} \right)^{s+r+1} N.$

Далее

$$\begin{aligned} I_{[-\pi; \pi]} &= \int_{\Pi} L_r^N(z) L_s^{(N)}(z - (\beta + \gamma)) dz = \\ &= I_{\left[-\pi; -\frac{e^r}{N}\right]} + I_{\left[-\frac{e^r}{N}; \frac{e^r}{N}\right]} + I_{\left[\frac{e^r}{N}; \beta + \gamma - \frac{e^r}{N}\right]} + I_{\left[\beta + \gamma - \frac{e^r}{N}; \beta + \gamma + \frac{e^r}{N}\right]} + I_{\left[\beta + \gamma + \frac{e^r}{N}; \pi\right]}, \end{aligned}$$

где $(\beta + \gamma) \geq \frac{e^{r+s+1}}{N}.$

Оценивая каждый интеграл, получим, что $I_{[-\pi; \pi]} \leq C \frac{1}{\beta + \gamma} \ln^{r+s+1} N (\beta + \gamma).$

Для β, γ таких, что $(\beta + \gamma) < 0$, утверждение 3 теоремы доказывается аналогично.

1. Dahlhaus K. // Stochastic Processes and Their Applications. 1988. Vol. 30. P. 69.
2. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов. Мн., 1999.
3. Бенткус Р.Ю. Исследования по непараметрическому спектральному анализу стационарных случайных процессов // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. 1984. С. 78.

Поступила в редакцию 02.09.04.

Наталья Владимировна Семенчук - аспирант кафедры теории функций, вероятностей, функционального анализа и прикладной математики ГрГУ им. Я. Купалы. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Н.Н. Труш.