УДК 519.872

В.В. МУШКО

СИСТЕМА *M/M/c* С АДРЕСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ И ИДЕНТИЧНЫМИ ПРИБОРАМИ

Multiserver markovian retrial model with identical servers is analyzed. Primary customers and customers from the orbit have exponential service time distribution. The intensity of retrials linearly depends on the number of the customers from the orbit. Sufficient condition for stationary state distribution of the number of customers in the orbit and the number of busy servers is given. Numerical results are presented.

В данной работе рассмотрен частный случай системы из [1]: первичные и повторные вызовы выбирают для обслуживания r-й прибор с вероятностью $1/c$, $r=\overline{1,c}$, где c - число приборов. Размерности векторов стационарных вероятностей цепей Маркова, описывающих поведение систем в [1] и в данной работе, равны 2^c и $(c+1)$ соответственно, что позволяет провести расчеты при больших значениях параметра с в последнем случае.

Рассматривается многоканальная система, имеющая с идентичных приборов. Время обслуживания на каждом приборе имеет экспоненциальное распределение с параметром μ, $\mu>0$. Входящий в систему поток является стационарным пуассоновским с интенсивностью λ, $\lambda>0$. В момент прибытия вызов выбирает для обслуживания r-й прибор с вероятностью $1/c$, $r=\overline{1,c}$. Если выбранный прибор свободен, то вызов занимает его и после обслуживания покидает систему. Если выбранный прибор занят, то вызов направляется в некоторую виртуальную динамическую область, называемую орбитой, и пытается получить обслуживание позже. Каждый вызов, находящийся на орбите, делает повторные попытки через интервалы времени, имеющие экспоненциально распределенную длину с параметром α, $\alpha>0$, независимо от других вызовов. В момент повтора вызов выбирает r-й прибор с вероятностью $1/c$, $r=\overline{1,c}$. Если прибор свободен, то вызов занимает его и покидает систему после обслуживания. Если прибор занят, то вызов возвращается на орбиту, даже если один или несколько других приборов свободны в этот момент. Вызовы с орбиты пытаются получить обслуживание до тех пор, пока им не удастся занять прибор, выбранный при соответствующей попытке.

Рассмотрим процесс $\zeta_t=\{i_t, \nu_t\}$, $t\geq 0$, где i_t - число вызовов на орбите в момент времени t, ν_t - число занятых приборов в момент времени t, $\nu_t=0, 1, ..., c$.

Очевидно, что процесс ζ_t, $t\geq 0$, язляется цепью Маркова с непрерывным временем. Обозначим стационарное рг определение этой цепи через

$$p(i, \nu) = \lim_{t\to\infty} P\{i_t = i, \nu_t = \nu\}. \tag{1}$$

Условие существования предел;: в (1) приведено ниже и далее предполагается выполненным. Занумеруем состояния цепи Маркова ζ_t, $t\geq 0$, в лексикографическом порядке возрастания компоненты ν_t и сформируем векторы-строки вероятностей p_i, соответствующие: состоянию i числа вызовов на орбите. Сформируем также макровектор $\mathbf{p}=(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_i, ...)$.

Лемма. Вектор **p** является единс гвенным решением системы:

$$\mathbf{p}Q=0,\ \mathbf{pe}=1,$$

где инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ζ_t, $t\geq 0$, имеет форму

$$Q=\begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & 0 & \cdots \\ 0 & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где блоки $Q_{i,j}$ вычисляются следующим образом:

$$Q_{i,i-1}=i\alpha E,\ i\geq 1,\ Q_{i,i}=A-i\alpha B,\ i\geq 0,\ Q_{i,i+1}=\lambda D,\ i\geq 0, \tag{3}$$

квадратные матрицы A,B,D,E размерности $(c+1)$ имеют вид

$$A=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \frac{c-1}{c}\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda+(c-1)\mu) & \frac{1}{c}\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c\mu & -(\lambda+c\mu) \end{pmatrix},$$

$$B=\mathrm{diag}\left(1; \frac{c-1}{c}; \frac{c-2}{c}; ...; \frac{1}{c}; 0\right),\quad D=\mathrm{diag}\left(0; \frac{1}{c}; \frac{2}{c}; ...; \frac{c-1}{c}; 1\right),$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c-1}{c} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь **0** - вектор-строка, состоящий из нулей, **e** - вектор-столбец, состоящий из единиц.

Для установления условий существования стационарного распределения и вычисления вектора **p** стационарных вероятностей применим аппарат многомерных асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова [2, 3]. С этой целью рассмотрим формальную цепь Маркова ξ_n, $n\geq 1$, с дискретным временем, которая характеризуется матрицей P одношаговых переходных вероятностей, имеющей следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & 0 & \cdots \\ 0 & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$P_{i,\,i-1}=i\alpha(F+i\alpha\hat{I})^{-1}E,\ i\geq 1,\ P_{i,\,i}=I+(F+i\alpha\hat{I})^{-1}(A-i\alpha B),\ i\geq 0, \tag{5}$$
$$P_{i,\,i+1}=\lambda(F+i\alpha\hat{I})^{-1}D,\ i\geq 0,$$
$$F=(\lambda+c\mu)I.$$

Здесь I - тождественная матрица размерности (c+1), матрица $\hat{I}$ получена из матрицы I заменой последнего элемента последней строки на 0. Формулы (4), (5) получены из (2), (3) умножением блоков (3) на матрицу R_i^{-1}, где $R_i=F+i\alpha\hat{I}$, и добавлением 1 к диагональным элементам.

Обозначим через $\pi=(\pi_0, \pi_1, ..., \pi_i, ...)$ вектор-строку стационарных вероятностей цепи Маркова ξ_n, $n\geq 1$. Он удовлетворяет следующим уравнениям:

$\pi = \pi P$, $\pi\mathbf{e} = 1$. Тогда компоненты

вектора $\mathbf{p}$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{p}_i=\bar{c}\ \pi_i R_i^{-1},\quad i\geq 0,$$

где $\bar{c}$ находится из условия нормировки.

Проанализировав структуру блоков переходных вероятностей матрицы P, представим их искусственно в форме:

$$P_{i,\,l} = Q_1^{(i)}Y_{l-i+1}^{(1)} + Q_2^{(i)}Y_{l-i+1}^{(2)},\quad l=i-1,\ i,\ i+1, \tag{6}$$

где

$$Q_1^{(i)} = i\alpha\,\hat{I}(F+i\alpha\,\hat{I})^{-1},\quad Q_2^{(i)} = F(F+i\alpha\,\hat{I})^{-1},$$
$$\lim_{i\to\infty} Q_1^{(i)} = \hat{I},\quad \lim_{i\to\infty} Q_2^{(i)} = \bar{I} = I-\hat{I},\quad Y_0^{(1)} = E,\ Y_0^{(2)} = O, \tag{7}$$
$$Y_1^{(1)} = I-B,\ Y_1^{(2)} = I+F^{-1}A,\ Y_2^{(1)} = O,\ Y_2^{(2)} = \lambda F^{-1}D,$$

где O - нулевая матрица размерности (c+1).

Сравнивая (6), (7) с определением многомерной асимптотически квазитеп-лицевой цепи Маркова (AQTMC) в [3], заключаем, что цепь Маркова ξ_n, $n\geq 1$, принадлежит к классу AQTMC, поэтому результаты из [2, 3] могут быть применены для ее исследования.

Предельная (по отношению к AQTMC ξ_n, $n\geq 1$) квазитеплицева цепь Маркова $\tilde{\xi}_n$, $n\geq 1$, имеет блоки $\tilde{P}_{i,l}$, $l=i$-1, i, i+1, переходных вероятностей следующей формы:

$$P_{i,\,i-1} = \tilde{Y}_0 = \hat{I}E,\ i\geq 1,\quad P_{i,i} = \tilde{Y}_1 = I-\hat{I}B+\bar{I}F^{-1}A,\ i\geq 0,\quad P_{i,i+1} = \tilde{Y}_2 = \lambda\bar{I}F^{-1}D,\ i\geq 0.$$

Обозначим $\tilde{Y}(z) = \tilde{Y}_0 + \tilde{Y}_1 z + \tilde{Y}_2 z^2$, $|z|\leq 1$.

Как следует из [3], достаточное условие существования стационарного распределения цепи Маркова ξ_n, $n\geq 1$, совпадает с достаточным условием существования стационарного распределения цепи Маркова $\tilde{\xi}_n$, $n\geq 1$, и имеет следующую форму:

$$\mathbf{X}\tilde{Y}'(1)\mathbf{e} < 1,$$

где вектор $\mathbf{X}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\mathbf{X}\tilde{Y}(1) = \mathbf{X},\quad \mathbf{X}\mathbf{e}=1.$$

Используя это утверждение, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Стационарное распределение π существует, если выполнено следующее условие:

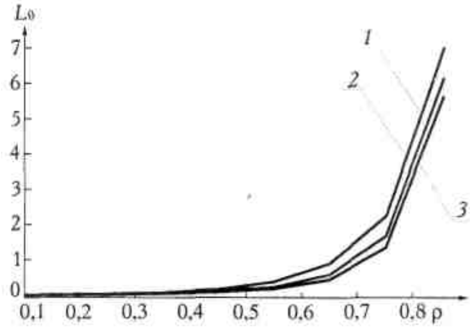
$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 .$$

Замечание. Очевидно (см. [2]), что данное условие является и достаточным для существования стационарного распределения **р**. Стационарные распределения π и **р** могут быть найдены с по-мощью алгоритма, предложенного в [2].

Пусть число приборов принимает значения 10, 20 и 30, интенсивность первичных вызовов равна 0,5, повторных -5.

На рисунке представлена зависимость среднего числа L_0 вызовов на орбите от загрузки системы, равной

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} .$$



Зависимость среднего числа вызовов на орбите от загрузки системы при различных величинах c: *1* – 10, *2* – 20, *3* – 30

1. Му шко В. В. // Массовое обслуживание. Потоки, системы, сети: Материалы Междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей», Гомель, 23-25 сент. 2003 г. Мн., 2003. С. 187.
2. Breuer L., Dudin A.N., Klimenok V.I. // Queueing Systems. 2002. Vol. 40. №. 4. P. 433.
3. Dudin A.N., Klimenok V.I. // Ibid. 2000. Vol. 34. №. 1-4. P. 47.

Поступила в редакцию 06.09.04.

Вилена Владимировна Мушко - аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор А.Н. Дудин.