Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 2

УДК 517.926.4

С.А. МАЗАНИК, Т.Г. КРАСОВСКАЯ

E-АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СИСТЕМАМ С БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

It is proved that for any linear system with piece-wise continuous bounded coefficients there exists an *E*-asymptotic equivalent linear system with infinitely differentiable bounded coefficients. The existence of linear systems which have not the C-asymptotic equivalent linear system with continuously differentiable bounded coefficients with bounded derivatives is proved.

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,,\ t \in \mathbb{R}_+ = [0,+\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной ($\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|A(t)\| \le a$) на $\mathbb{R}_+$ матрицей коэффициентов $A(t)=(a_{ij}(t)),\ i,j=\overline{1,n}$. Пусть $\mathcal{C}$ - группа постоянных невырожденных действительных $n\times n$-матриц C, а $\mathcal{L}$ - группа абсолютно непрерывных невырожденных на $\mathbb{R}_+$ действительных $n\times n$-матриц $L(t)$, E - единичная $n\times n$-матрица. Положим

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}}=\{L|L\in\mathcal{L},\ \ \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\|\dot{L}(t)\right\|<+\infty,\ L(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}C\in\mathcal{C}\},$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{E}}=\{L|L\in\mathcal{L},\ \ \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\|\dot{L}(t)\right\|<+\infty,\ L(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}E\}.$$

Определение. Систему

$$\dot{y} = B(t)y\,,\ y \in \mathbb{R}^n\,,\ t \in \mathbb{R}_+,\ B(t) = (b_{ij}(t)),\ i,j = \overline{1,n}\,, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывными ограниченными на $R+$ коэффициентами назовем C-асимптотически (E-асимптотически) эквивалентной системе (1), если существует переводящее систему (1) в систему (2) линейное преобразование $x=L(t)y$, матрица L которого принадлежит $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}\,(\mathcal{L}_{\mathcal{E}})$.

Поскольку легко проверить, что $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ является подгруппой группы $\{L|L\in\mathcal{L},$ $\max\{\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\|L(t)\right\|,\ \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\|L^{-1}(t)\right\|,\ \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\left\|\dot{L}(t)\right\|\}<+\infty\}$ матриц Ляпунова, то C-асимптотически и E-асимптотически эквивалентные системы являются также и асимптотически эквивалентными [1]. В [2-4] было показано существование для систем (1) таких систем (2) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, что заданные асимптотические свойства решений систем (1) и (2) совпадают. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. Для любой системы (1) существует E-асимптотически эквивалентная ей система (2) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми на $\mathbf{R}_+$ коэффициентами.

Доказательство. Обозначим $I(f,\ s,\ t)=\int_s^t f(u)du.$ Построим такую неограниченно возрастающую последовательность точек (t_k), что $t_0=0$ и для $t_k\in[m,\ m+1)$, $m\in N_0=N\cup\{0\}$,

$$t_{k+1} = t_k + \Delta(m),\ \ 0 < \Delta(m) \le e^{-(c+1)(m+1)} \le 1,\ \ c > 4\alpha. \tag{3}$$

В [5] было показано, что для каждой из функций a_{ij} существует такая принимающая только два значения a и $-a$ кусочно-постоянная функция $\overline{a}_{ij}$, что $\sup_{t\in R_+} |\, e^{ct} I(a_{ij} - \overline{a}_{ij}; t,+\infty)\,| < +\infty$, причем последовательность (t_k^{ij}) точек разрыва функции $\overline{a}_{ij}$ является подпоследовательностью построенной последовательности (t_k). Поэтому система (1) E-асимптотически эквивалентна [6] системе

$$\dot{z} = \overline{A}(t)z,\ \ z \in \mathbb{R}^n,\ \ t \in \mathbb{R}_+,\ \ \overline{A}(t) = (\overline{a}_{ij}(t)),\ \ i,j = \overline{1,\ n}. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $e(t,\ t_1,\ t_2)$, равную 0 при $t\in(-\infty,\ t_1]$, равную $\exp(-(t-t_1)^{-2}\exp(-(t-t_2)^{-2}))$ при $t\in(t_1,\ t_2)$, $t_1<t_2$, и равную 1 при $t\in[t_2,\ +\infty)$, которая является бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функцией [7, с. 54]. Пусть функции m^{ij}: $N_0\to N_0$ таковы, что $m^{ij}(k)=m$, если $t_k^{ij}\in[m,m+1)$. Коэффициенты искомой бесконечно дифференцируемой системы (2) определим на $\mathbb{R}_+$ следующим образом: $b_{ij}(t) = \gamma a(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e(t, t_k^{ij}, t_k^{ij} + 0{,}5\Delta^2(m^{ij}(k))))$, где

$\gamma = \operatorname{sign}_{u\in(0,t_1^{ij})}\overline{a}_{ij}(u)$, $i, j = 1, n$. Действительно, в силу такого определения при любом $t\in\mathbb{R}_+$ в состав бесконечной суммы входит не более двух ненулевых слагаемых. Поэтому коэффициента $b_{ij}(t)$, $i,j=\overline{1,n}$, принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}_+$ функций как сумма конечного числа функций из того же класса. Кроме того, в силу леммы работы [8] при всех $t\in\mathbb{R}_+$ выполнены неравенства $-a\le b_{ij}(t)\le a$. Следовательно, функции $b_{ij}(t)$, $i, j=\overline{1,n}$, ограничены на $\mathbb{R}_+$

Докажем, что построенная система (2) E-асимптотически эквивалентна системе (4). В силу (3) для любого $t\in\mathbb{R}_+$ имеем

$$I\left(\left|\overline{a}_{ij}-b_{ij}\right|e^{cu};\ t,+\infty\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}a\Delta^2\left(m^{ij}(k)\right)e^{c\left(m^{ij}(k)+2\right)}\le$$
$$\le ae^{c-1}\sum_{s=0}^{\infty}e^{-s}\sum_{m^{ij}(k)=s}\Delta\left(m^{ij}(k)\right)\le 2ae^{c-1}\sum_{s=0}^{\infty}e^{-s}<+\infty,$$

что гарантирует [6] E-асимптотическую эквивалентность систем (2) и (4). В силу транзитивности отношения E-асимптотической эквивалентности системы (1) и (2) также E-асимптотически эквивалентны. Теорема доказана.

В [9] показано, что любая система (1) асимптотически эквивалентна системе с бесконечно дифференцируемыми и ограниченными вместе со всеми своими производными коэффициентами. Подобное утверждение уже не имеет места для С-асимптотической эквивалентности. Имеет место

Теорема 2. Существуют такие лгнейные системы (1), что среди С-асимп-тотически эквивалентных им с непре рывно дифференцируемыми коэффициентами систем нет таких, коэффициенты которых обладают ограниченными на R_+ производными.

Доказательство. Пусть (t_k) - такая неограниченно возрастающая последовательность, что $t_0=0$, $t_{k+1}-t_k\ge\Delta>0$ для всех. $k\in\mathbb{N}_0$ Рассмотрим систему $\dot{x}=p(t)x,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}_+$, где $p(t)=a$ при $t\in[t_{2m}, t_{2m+1})$ и $p(t)=-a$ при $t\in[t_{2m+1}, t_{2m+2})$, $m\in\mathbb{N}_0$, $a>0$. Предположим, что этой системе C-асимптотически эквивалентна система $\dot{y}=q(t)y,\ \ y\in\mathbb{R},\ \ t\in\mathbb{R}_+$, с непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией $q(t)$. Тогда $I(p-q;\,0,\,t)\to c\ne0$ при $t\to+\infty$. В силу теоремы Больцано - Коши [10, с. 161] имеем

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists T(\varepsilon)\ge0\quad\forall\tau_1,\tau_2\ge T(\varepsilon)\quad|I(p-q;\tau_1,\tau_2)|\le\varepsilon. \tag{5}$$

Из (5) при $\varepsilon=\varepsilon_0=0{,}5a\Delta$ следует существование такого k_0, что при всех $k\ge k_0$ выполнено неравенство $I(p\text{-}q;\ t_k,\ t_{k+1})\le\varepsilon_0$. Поэтому для всех четных $k=2m>k_0$ существует такое $\tau_{2m}\in[t_{2m}, t_{2m+1}]$, что $-\varepsilon_0\le(a-q(\tau_{2m}))(t_{2m+1}-t_{2m})\le\varepsilon_0$. Следовательно,

$$0{,}5a\le q(\tau_{2m})\le1{,}5a. \tag{6}$$

Аналогично для всех нечетных $k=2m+1>k_0$ существует такое τ_{2m+1} e $[t_{2m+1}, t_{2m+2}]$, что

$$-1{,}5a\le q(\tau_{2m+1})\le-0{,}5a. \tag{7}$$

Рассмотрим множество $X_m^+=\{t\,|\,t\in[\tau_{2m},\tau_{2m+1}],\ q(t)\ge0{,}5a\}$. В силу (6) точка $\tau_{2m}\in X_m^+$, т. е множество $X_m^+\ne\phi$, и так как оно ограйичено сверху, то существует $\sigma_m^+=\sup X_m^+$. Из определения супремума и непрерывности функции q следует, что $\sigma_m^+<\tau_{2m+1}$ и $q(\sigma_m^+)=0{,}5a$. Аналогично из (7) для множества

$X_m^- = \{t \mid t \in [\sigma_m^+, \tau_{2m+1}],\ q(t) \le -0{,}5a\}$ существует такое $\sigma_m^- = \inf X_m^-$, что $\sigma_m^+ < \sigma_m^-$ и $q(\sigma_m^-) = -0{,}5a$. Заметим, что при этом $|q(t)| \le 0{,}5a$ для всех $t \in [\sigma_m^+, \sigma_m^-]$.

Если $\sigma_m^- > \sigma_m^+ \ge t_{2m+1}$, то $q(t) \ge -0{,}5a > -a = p(t)$ для всех $t \in [\sigma_m^+, \sigma_m^-]$. Поэтому $|I(p-q; \sigma_m^+, \sigma_m^-)| = I(p-q; \sigma_m^+, \sigma_m^-)$ и, следовательно,

$$|I(p-q; \sigma_m^+, \sigma_m^-)| \ge 0{,}5a(\sigma_m^- - \sigma_m^+). \tag{8}$$

Такое же неравенство получаем и в случае, когда $\sigma_m^+ < \sigma_m^- < t_{2m+1}$.

Если же $\sigma_m^+ < t_{2m+1} \le \sigma_m^-$, то аналогично получаем

$$|I(p-q; \sigma_m^+, t_{2m+1})| + |I(p-q; t_{2m+1}, \sigma_m^-)| \ge 0{,}5a(\sigma_m^- - \sigma_m^+). \tag{9}$$

Для m таких, что $2m > k_0$, рассмотрим последовательность (δ_m), $\delta_m = \sigma_m^- - \sigma_m^+$. Покажем, что $\delta_m \to 0$ при $m \to +\infty$. Предположим от противного, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $v > 0$ существует такое $m_v > v$, что $\delta_{m_v} > \varepsilon_1$. Положим в (5) $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0{,}2a\varepsilon_1$ и выберем v настолько большим, чтобы $\sigma_{m_v}^+ \ge T(\varepsilon_2)$. Тогда в зависимости от расположения $\sigma_{m_v}^+$ и $\sigma_{m_v}^-$ относительно t_{2m_v+1} получим противоречие либо из (5) и (8): $0{,}2a\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \ge |I(p-q;\ \sigma_{m_v}^+, \sigma_{m_v}^-)| \ge 0{,}5a\delta_{m_v} \ge 0{,}5a\varepsilon_1$, либо из (5) и (9): $0{,}4a\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 \ge |I(p - q;\ \sigma_{m_v}^+, t_{2m_v+1})| + |I(p - q;\ t_{2m_v+1}, \sigma_{m_v}^-)| \ge 0{,}5a\delta_{m_v} \ge 0{,}5a\varepsilon_1$.
Таким образом, действительно, $\delta_m \to 0$ при $m \to +\infty$.

В силу теоремы Лагранжа [10, с. 285] для всех достаточно больших m существует такая точка $з_m \in [\sigma_m^+, \sigma_m^-]$, что $q'(\sigma_m)\delta_m = q(\sigma_m^-) - q(\sigma_m^+) = -a$. Следовательно, $q'(\sigma_m) = -a\delta_m^{-1}$ и $|q'(\sigma_m)| \to +\infty$ при $m \to +\infty$, т. е. производная функции q не является ограниченной на $\mathbb{R}_+$ функцией, что и доказывает требуемое утверждение.

1. Богданов Ю.С. // Дифференц. уравнения. 1965.Т. 1.№6. С. 707.
2. Красовская Т.Г., Храмцов О.В . // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 2. С. 31.
3. Красовская Т. Г. // Весцi НАН Беларусь Сер. фiз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 45.
4. Красовская Т. Г. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 88.
5. Мазаник С. А. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 5. С. 399.
6. Красовская Т.Г. Асимптотические преобразования линейных дифференциальных систем с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 2004.
7. Гелбаум Б.Р., Олмстед Дж.М. Контрпримеры в анализе. Волгоград, 1997.
8. Изобов Н.А., Красовский С.Г. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 8. С. 1049.
9. Красовская Т.Г., Мазаник С. А. // Там же. 2005. Т.41.№2. С. 193.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.;Л., 1947. Т. 1.

Поступила в редакцию 09.12.04

Сергей Алексеевич Мазаник - доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики.

Татьяна Геннадьевна Красовская - аспирант кафедры высшей математики. Научный руководитель - С.А. Мазаник.