

И.В. МАТАТОВА, В.А. ПРОКАШЕВА

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ АВТОНОМНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The movable singular points of the solutions of the autonomus system $x'=P_2(x)$, $y'=Q_2(x, y)$, $z'=S_2(x, y, z)$ where P_2 , Q_2 , S_2 are quadratic polynomials of their arguments, have been investigated.

Рассмотрим автономную вырожденную систему вида

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A_0 + A_1 X + A_2 X^2, \\ \frac{dY}{dt} = B_0 + B_1 X + B_2 Y + B_3 X^2 + B_4 XY + B_5 Y^2, \\ \frac{dZ}{dt} = D_0 + D_1 X + D_2 Y + D_3 Z + D_4 X^2 + D_5 XY + D_6 XZ + D_7 Y^2 + D_8 YZ + Z^2, \end{cases} \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{C}$, $X, Y, Z \in \hat{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $A_0, \dots, D_8$ - комплексные постоянные.

Коэффициент при Z^2 в третьем уравнении системы с помощью замены $t = \alpha t$ всегда можно сделать равным 1. С помощью линейного преобразования $X = x + \mu y$, $Y = y$, $Z = z$, где μ - корень уравнения

$$B_3 \mu^2 + (B_4 - A_2) \mu + B_5 = 0, \quad (2)$$

система (1) приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy, \\ \frac{dy}{dt} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 x^2 + \gamma_5 xy + \gamma_6 xz + \gamma_7 y^2 + \gamma_8 yz + z^2, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha_0, \dots, \gamma_8$ определенным образом выражаются через коэффициенты исходной системы и параметр μ :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= A_0 - B_0\mu, \quad \alpha_1 = A_1 - B_1\mu, \quad \alpha_2 = (A_1 - B_2)\mu - B_1\mu^2, \\ \alpha_3 &= A_2 - B_3\mu, \quad \alpha_4 = (2A_2 - B_4)\mu - 2B_3\mu^2, \quad \beta_0 = B_0, \quad \beta_1 = B_1, \\ \beta_2 &= B_2 + B_1\mu, \quad \beta_3 = B_3, \quad \beta_4 = B_4 + 2B_3\mu, \quad \beta_5 = B_5 + B_4\mu + B_3\mu^2, \\ \gamma_0 &= D_0, \quad \gamma_1 = D_1, \quad \gamma_2 = D_2 + D_1\mu, \quad \gamma_3 = D_3, \quad \gamma_4 = D_4, \quad \gamma_5 = 2D_4\mu + D_5, \\ \gamma_6 &= D_6, \quad \gamma_7 = D_4\mu^2 + D_5\mu + D_7, \quad \gamma_8 = D_6\mu + D_8. \text{ Из}\end{aligned}$$

первого уравнения системы (3) имеем

$$y' = \frac{x' - \alpha_0 - \alpha_1 x - \alpha_3 x^2}{\alpha_2 + \alpha_4 x} = R(x, x'), \quad (4)$$

где R - рациональная функция относительно x и x' . Этот факт позволяет перейти от системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy, \\ \frac{dy}{dt} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \end{cases}$$

к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$x'' = \frac{\alpha_4 + \beta_5}{\alpha_2 + \alpha_4 x} (x')^2 + F_1(x)x' + F_2(x), \quad (5)$$

где F_1, F_2 - известные рациональные функции относительно x . Параметры $\alpha_2, \alpha_4, \beta_5$ выражаются через коэффициенты системы (1) и μ . Известно [1, 2], что с помощью дробно-линейных преобразований дифференциальное уравнение (5) можно привести к уравнению, в котором коэффициент при x'^2 имеет одну из

форм: 1) $F_0=0$; 2) $F_0 = \frac{1}{x}$; 3) $F_0 = \frac{m-1}{mx}$, где $m > 1$ - целое число. Сравним диф-

ференциальное уравнение (5) с каноническими уравнениями Пенлеве - Гамбье [1].

В случае, когда $F_0=0$, возможно сравнение с уравнениями:

$$\text{I. } x'' = 0, \quad \text{II. } x'' = 6x^2, \quad \text{III. } x'' = 6x^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{VII. } x'' = 2x^3, \quad \text{IX. } x'' = 2x^3 + \beta x + \gamma.$$

Рассмотрим более подробно сравнение дифференциального уравнения (5) с уравнением $x''=6x^2$. При выполнении условий

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= 0, \quad \alpha_4 = 0, \quad \beta_4 = 0, \quad \beta_5 = 0, \quad \alpha_1 + \beta_2 = 0, \quad \alpha_2\beta_3 = 6, \\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 &= 0, \quad \alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0,\end{aligned} \quad (6)$$

(5) совпадает с уравнением $x''=6x^2$, которое интегрируется в эллиптических функциях [1, 2]. Известно [3], что

$$x = \frac{1}{(t - C_1)^2} + \frac{C_2}{28}(t - C_1)^4 + \dots, \quad (7)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. Используя формулу (4), получим ряд Лорана для второй компоненты:

$$y = -\frac{2}{\alpha_2}(t - C_1)^{-3} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(t - C_1)^{-2} - \frac{\alpha_0}{\alpha_2} + \frac{C_2}{7\alpha_2}(t - C_1)^3 + \dots, \quad (8)$$

$\alpha_2 \neq 0$. Подставляя ряды Лорана (7) и (8) в третье уравнение системы (3), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & \frac{4\gamma_7}{\alpha_2^2}(t-C_1)^{-6} + \frac{4\alpha_1\gamma_7 - 2\alpha_2\gamma_8}{\alpha_2^2}(t-C_1)^{-5} + \left(\gamma_4 - \frac{\alpha_1\gamma_5}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1^2\gamma_7}{\alpha_2^2} \right)(t-C_1)^{-4} + \\ & + \frac{4\alpha_0\gamma_7 - 2\alpha_2\gamma_2}{\alpha_2^2}(t-C_1)^{-3} + \left(\gamma_1 - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha_0\gamma_5}{\alpha_2} + \frac{2\alpha_0\alpha_1\gamma_7}{\alpha_2^2} \right)(t-C_1)^{-2} + \dots + \\ & + \left[\frac{-2\gamma_8}{\alpha_2}(t-C_1)^{-3} + \left(\gamma_6 - \frac{\alpha_1\gamma_3}{\alpha_2} \right)(t-C_1)^{-2} + \left(\gamma_3 - \frac{\alpha_0\gamma_8}{\alpha_2} \right) + \dots \right] z + z^2. \end{aligned}$$

Пусть $N_0(t)$ - свободный член, а $N_1(t)$ - коэффициент при z последнего уравнения, которое запишется так:

$$\frac{dz}{dt} = N_0(t) + N_1(t)z + z^2. \quad (9)$$

С помощью преобразования

$$z = -\frac{\xi'}{\xi}, \quad (10)$$

где $\xi = \xi(t)$ - новая искомая функция, переходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\xi'' - N_1(t)\xi' + N_0(t)\xi = 0 \quad (11)$$

Предположим, что в особой точке $t=C_1$ условия теоремы Фукса [1, 2] выполняются. Это будет, если

$$\gamma_2=0, \gamma_4=0, \gamma_5=0, \gamma_6=0, \gamma_7=0, \gamma_8=0. \quad (12)$$

С учетом формул (12) дифференциальное уравнение (11) запишется следующим образом:

$$\xi'' - (\gamma_3 + \dots)\xi' + \frac{\gamma_1 + \dots}{(t-C_1)^2}\xi = 0. \quad (13)$$

Определяющее уравнение в особой точке $t=C_1$ таково: $\rho^2 - \rho + \gamma_1 = 0$. Одно решение в виде обобщенного степенного ряда дифференциального уравнения (13) существует всегда и имеет вид

$$\xi = (t-C_1)^{\rho_1} f(t), \quad (14)$$

где $f(t)$ - голоморфная в точке $t=C_1$ функция, причем $f(C_1) \neq 0$. Используя формулу

$$(10), \text{ получим } z_1 = -\frac{\rho_1}{t-C_1} - \frac{f'(t)}{f(t)} \quad (\text{решение дифференциального уравнения}$$

Риккати (9)). С помощью замены

$$z = z_1 + \frac{1}{u} \quad (15)$$

от дифференциального уравнения (9) переходим к линейному уравнению

$$u' + \left[\frac{-2\rho_1}{t-C_1} - \frac{2f'(t)}{f(t)} + \gamma_3 + \dots \right] u = -1.$$

Откуда

$$u = e^{-\int \left(\frac{-2\rho_1}{t-C_1} - \frac{2f'(t)}{f(t)} + \gamma_3 + \dots \right) dt} \left[C_3 - \int e^{\int \left(\frac{-2\rho_1}{t-C_1} - \frac{2f'(t)}{f(t)} + \gamma_3 + \dots \right) dt} dt \right],$$

где C_3 - произвольная постоянная. После интегрирования получим

$$u = (t-C_1)^{2\rho_1} f_1(t) \left[C_3 - \int (t-C_1)^{-2\rho_1} \cdot \frac{1}{f_1(t)} dt \right], \quad (16)$$

где $f_1(t)$ - голоморфная в точке $t=C_1$ функция, причем $f_1(C_1) \neq 0$. Пусть $-2\rho_1=m$, где $m \geq 0$ - целое число. Из определяющего уравнения имеем:

$$\rho_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma_1}}{2}, \text{ т. е. } 2\rho_1 = 1 + \sqrt{1 - 4\gamma_1}.$$

Отсюда следует, что $\gamma_1 = D_1 = -\frac{1}{4}(m^2 + 2m)$, $m \geq 0$ - целое. При этом условии

из формулы (16) вытекает, что функция u разлагается в ряд Лорана, причем в главной части этого ряда будет конечное число членов. Таким образом, функция z будет иметь только полярные подвижные особенности (15).

Теорема. Пусть выполняются условия (6), (12), где

$$\mu = \frac{A_2 - B_4 + \sqrt{(A_2 - B_4)^2 - 4B_3B_5}}{2}, \text{ а также } D_1 = -\frac{1}{4}(m^2 + 2m), \text{ } m \geq 0 - \text{ целое.}$$

Тогда система (1) является системой класса P , т. е. ее решения в $\mathbb{C}$ имеют подвижные особенности не сложнее полярных.

Замечание 1. Аналогично исследуется система (1) при сравнении дифференциального уравнения (5) с другими уравнениями из списка Пенлеве - Гамбье [1].

Замечание 2. Приведенная теорема дает достаточные условия того, что все решения системы (1) имеют в $\mathbb{C}$ подвижные особые точки не сложнее полярных.

Пример. Пусть дана система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 6x^2, \\ \frac{dz}{dt} = -6x + z + z^2, \end{cases}$$

в которой выполняются все условия теоремы. После необходимых выкладок получим:

$$x = (t - C_1)^{-2} + \frac{C_2}{28}(t - C_1)^4 + \dots,$$

$$y = -2(t - C_1)^{-3} + \frac{C_2}{7}(t - C_1)^3 + \dots,$$

$$z = \frac{2}{(t - C_1)} - \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{(t - C_1)^4}{f_1(t) \left[C_3 - \int f_1^{-1}(t)(t - C_1)^4 dt \right]},$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные, $f(t), f_1(t)$ - голоморфные в точке $t=C_1$ функции, причем $f(C_1) \neq 0, f_1(C_1) \neq 0$. Из последних формул видно, что x, y и z в качестве подвижных особых точек имеют полюсы.

1. Айне Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М; Л., 1950.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

Поступила в редакцию 26.03.04.

Ирина Валерьевна Мататова - аспирант кафедры математического анализа БГПУ им. М. Танка. Научные руководители - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ГрГУ им. Я. Купалы И.П. Мартынов, кандидат физико-математических наук, доцент В.А. Прокашева.

Вера Акимовна Прокашева - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики и информатики.