

Б.С. КАЛИТИН

РЕГЛАМЕНТИРУЕМАЯ МОНОПОЛИЯ.  
МОДЕЛЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА

The non-linear differential model of the second order for the market of monitored monopoly is built on the basis of the registration of economical forces of the main participants of the free market: the monopolist, customers and government. The problem of stability of economical equilibrium is studied and the applicable case history of introduced outcomes is given.

Математические модели экономики первого порядка, т. е. содержащие только первую производную функции цены, традиционно используются в исследованиях динамики цен со времени основателей математических моделей свободного рынка Л. Вальраса и А. Маршалла. Модели второго порядка, появившиеся в научных публикациях последних лет, хотя и являются более сложными, но обладают рядом преимуществ. Они позволяют как потребителям, так и производителям учесть информацию о тенденциях изменения рыночных цен в прошлом и будущем и исследовать влияние обладания такой информацией на их динамику, в частности, понять механизмы возникновения инфляционных процессов [3].

Настоящая статья посвящена построению нелинейной дифференциальной модели второго порядка для рынка контролируемой монополии одного товара и исследованию на устойчивость экonomicкого равновесия. Основное отличие предлагаемого подхода от существующих методов конструирования экономических моделей (см., например, [1, 2]) состоит в возможности учета тенденций изменения рыночной цены при анализе поведения продавца и покупателей на рынке свободной торговли.

Пусть  $p$  - цена товара,  $[p^*, p^{**}]$  - предписанный правительством интервал изменения цены и  $[q^*, q^{**}]$  - соответствующий интервал объемов продаж. Предположим, что контролирующие органы руководствуются тем, что экстремальные значения цены  $p^*$  и  $p^{**}$  достижимы. Через  $p_0$  и  $q_0$  будем обозначать соответственно равновесную цену  $v$ , равновесный объем продаж. Они удовлетворяют неравенствам  $p^* \leq p_0 \leq p^{**}$ ,  $q^* \leq q_0 \leq q^{**}$ .

**1. Функция объема продаж.** Пусть объем продаж  $q(p)$  подчиняется закону спроса и предложения, т. е. является убывающей функцией цены. Предположим, что эта функция определяется по линейному закону так, что выполняются крайние значения  $q(p^*) = q^{**}$ ,  $q(p^{**}) = q^*$ . Следовательно,  $q(p) = q^{**} - Q(p-p^*)/P$ ,  $q_0 - q^{**} - Q(p_0 - p^*)/P$ , где  $Q = q^{**} - q^*$ ,  $P = p^{**} - p^*$ . Поэтому функция объема продаж принимает вид

$$q(p) = q_0 - Q(p-p_0)/P, \quad p^* \leq p \leq p^{**}. \quad (1)$$

**2. Экономические силы монополиста.** Сила  $F_m$  воздействия монополии на динамику цены [1] имеет две составляющие:  $F_{m0}$  (при отсутствии возможности предвидения изменения цены) и  $F_{m1}$  (с возможностью предвидения изменения цены). По линейному закону будем предполагать их зависимости пропорциональными равновесному объему продаж  $q_0$ , однако соответствующие коэффициенты будем считать функциями цены. Таким образом,  $F_m = F_{m0} + F_{m1}$ , где  $F_{m0} = -q_0 v_0(p)(p-p_0)$ ,  $F_{m1} = -q_0 v_1(p)p$ , где  $p$  - производная по времени от функции цены  $p(t)$  (рис. 1). Предположим, что обе эти функции линейные, убывающие и определяются равенствами

$$\begin{aligned} v_0(p) &= v_0(p^*) - (v_0(p^*) - v_0(p^{**}))(p-p^*)/P, \\ v_1(p) &= v_1(p^*) - (v_0(p^*) - v_0(p^{**}))(p-p^*)/P. \end{aligned}$$

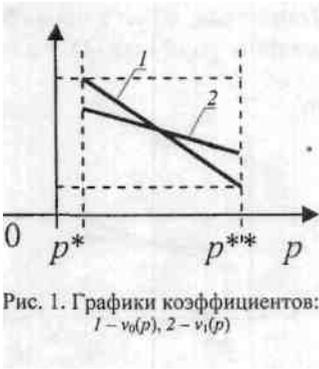


Рис. 1. Графики коэффициентов: 1 -  $v_0(p)$ , 2 -  $v_1(p)$

Выбор свойств монотонного изменения этих функций связан со следующими обстоятельствами. Величина  $v_0(p)$  соответствует уровню реакции монополиста на изменение цены без возможности предвидения ее изменения в будущем. Если цена близка к нижнему пороговому значению  $p=p^*$ , то предпринимаемые усилия продавца на скорейший ее подъем, т. е. приближение ее к равновесию, являются максимально возможными. Следовательно,  $v_0(p^*) = \max_{p^* \leq p \leq p^{**}} v_0(p)$ . Если же цена приближается к верхнему экстремальному значению  $p = p^{**}$ ,

то в этом случае реакция продавца являя, так как он относительно спокоен за состояние дел на рынке, т. е.  $v_0(p^{**}) = \min_{p^* \leq p \leq p^{**}} v_0(p)$ .

Функция  $v_1(p)$  отражает уровень реакции монополиста на информацию о тенденции поведения цены в будущем, т. е. на ее изменение. Если при этом цена близка к минимальному значению  $p = p^*$ , то монополист, предчувствуя грозящее разорение, будет максимально возможным способом содействовать увеличению скорости роста цены. В этом случае  $v_1(p^*) = \max_{p^* \leq p \leq p^{**}} v_1(p)$ . Если же цена близка к максимальному значению  $p=p^*$ , то беспокойства монополиста по поводу угрозы разорения будут наименьшими и  $v_1(p^{**}) = \min_{p^* \leq p \leq p^{**}} v_1(p)$ .

Введем обозначения  $p' = p_0 - p^*$ ,  $q' = q_0 - q^*$ ,  $p'' = p^{**} - p_0$ ,  $q'' = q^{**} - q_0$  и с учетом этого положим  $Q = q^{**} - q^* = q' + q''$ ,  $P = p^{**} - p^* = p' + p''$ . Преобразуем функции для  $v_0(p)$  и  $v_1(p)$ , вводя постоянные

$$v_i = (v_i(p^*)p' - v_i(p^{**})p'')/P - V_i p', \quad V_i = p_0(v_i(p^{**}) - v_i(p^*))/P, \quad i = 0, 1.$$

В результате получим следующие выражения:  $v_i(p) = v_i - V_i(p-p_0)/p_0$ ,  $V_i > 0$ ,  $i = 0, 1$ . Таким образом, экономические силы монополиста выражаются суммой  $F_m = -q_0(v_0 - V_0(p - p_0)/p_0)(p - p_0) - q_0(v_1 - V_1(p - p_0)/p_0) \dot{p}$ ,  $v_i > 0$ ,  $V_i > 0$ ,  $i = 0, 1$ . (2)

**3. Экономические силы потребителей.** Для описания сил влияния покупателей на изменение цены используем, как и в п. 2, функции сил  $F_{d0}$  и  $F_{d1}$ , соответствующие ситуациям с или без возможности предвидения изменения цены. Точнее говоря, можем записать сумму экономических сил как  $F_d = F_{d0} + F_{d1}$ , где  $F_{d0} = -q_0 d_0(p)(p - p_0)$ ,  $F_{d1} = q_0 d_1(p) \dot{p}$  (рис. 2). Заметим, что обе эти функции являются возрастающими по параметру цены. Считаем, что они имеют следующий вид:

$$d_i(p) = d_i + D_i(p - p_0)/p_0, \quad d_i = (d_i(p^*)p'' + d_i(p^{**})p')/P;$$

$$D_i = p_0(d_i(p^{**}) - d_i(p^*))/P, \quad i = 0, 1. \text{ В результате эффект действия}$$

экономических сил потребителей выражается суммой слагаемых

$F_d = -q_0(d_0 + D_0(p-p_0)/p_0) + q_0(d_1 + D_1(p-p_0)/p_0) p$ ,  $d_i > 0$ ,  $D_i > 0$ ,  $i = 0, 1$ . (3) Опираясь на графики функций  $d_i(p)$  (см. рис. 2), можно дать соответствующие экономические интерпретации и пояснения относительно выбора типов зависимости коэффициентов  $d_i(p)$  аналогично пояснениям для сил монополиста.

**4. Экономическая сила правительства.** Эффект действия правительства на изменение цены (помимо установления правил торговли и допустимого интервала цен) можно выразить следующей функцией:  $F_g = r(qp - q_0 p_0)$ . Здесь предполагается, что экономическая сила  $F_g$  есть функция от выручки  $qp$  моно-

полиста, а коэффициент  $r > 0$  отражает уровень взимаемых с него налогов (см. [1]). Преобразовывая выражение для  $F_g$  на основании формулы (1), получим

$$F_g = r(p-p_0)(q_0 - Qp/P). \quad (4)$$

5. Математическая модель. В соответствии с определением экономических сил рынка (покупателей, продавцов и государства [1]) суммарное действие выражается функцией

$$F = F_d + F_v + F_g. \quad (5)$$

Для построения математической модели экономики монопольного рынка воспользуемся аналогом уравнения Ньютона для изменения количества движения  $q\dot{p}$ , предлагаемого на рынке товара, а именно положим

$$\frac{d}{dt}(q\dot{p}) = F(p, q, \dot{p}), \quad p^* < p < p^{**},$$

где  $F$  определяется формулами (1) - (5).

В результате имеем следующую нелинейную модель монопольного рынка

$$\frac{d}{dt}(q\dot{p}) = -q_0v_0(p)(p-p_0) - q_0v_1(p)\dot{p} - \zeta_0d_0(p)(p-p_0) + q_0d_1(p)\dot{p} + r(p-p_0)(q_0 - Qp/P) \quad (6)$$

для значений  $p^* \leq p \leq p^{**}$ .

С целью исследования задачи устойчивости экономического равновесия  $p = p_0$  осуществлена замена переменной  $x = p - p_0$ . В этом случае (6) преобразуется в уравнение

$$\ddot{x} = f(x) + g(x)\dot{x} + h(x)\dot{x}^2, \quad -p' < x < p'', \quad (7)$$

$$\text{где } f(x) = -x(v_0 + d_0 - r(1 - Qp_0/Pq_0) - (V_0 - D_0 - rQp_0/Pq_0)x/p_0)/(1 - Qx/Pq_0), \quad g(x) = -(v_1 - d_1) - (V_1 + D_1)x/p_0)/(1 - Qx/Pq_0), \quad h(x) = Q/Pq_0(1 - Qx/Pq_0).$$

Заметим, что знаменатель  $(1 - Qx/Pq_0)$  в выражениях для  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  допускает разложение в ряд Тэйлора. Можно показать, что в силу принятых обозначений открытый интервал  $]-Pq_0/Q, Pq_0/Q[$  существования этого разложения содержит интервал  $-p' \leq x \leq p''$  определения модели. Поэтому разложение Тэйлора можно использовать на законных основаниях для исследования модели в рамках предопределенного интервала а цен.

Линейное приближение (7) дает дифференциальное уравнение  $\ddot{x} = -(v_1 - d_1)\dot{x} - ax$ , где  $a = v_0 + d_0 - r(1 - Qp_0/Pq_0)$ . Отсюда по теореме об устойчивости по первому приближению получаем следующее утверждение.

Теорема 1. Если для модели регламентируемой монополии (7) выполняются неравенства 1)  $v_1 > d_1$  2)  $v_0 + d_0 > r(1 - Qp_0/Pq_0)$ , то равновесие  $p = p_0$  асимптотически устойчиво. При этом, если рынок устойчив при неизменных объемах продаж, то он сохраняет свойство устойчивости и в том случае, когда объемы продаж изменяются в соответствии с: законом спроса и предложения.

6. Экономическая интерпретация условий устойчивости. Первое из условий устойчивости в теореме 1 характеризует ответственность монополиста за возникновение инфляции. В случае намечаемого роста цен (положительная инфляция) для поддержания стабильности дел на рынке он должен активнее тормозить продажи своего блага и всячески способствовать росту объемов продаж при появлении информации о предстоящем снижении цен (отрицательная инфляция).

Дадим экономическое толкование второго условия асимптотической устойчивости. С этой целью рассмотрим сначала произведение  $q_0P = q_0p' + q_0p'' =$

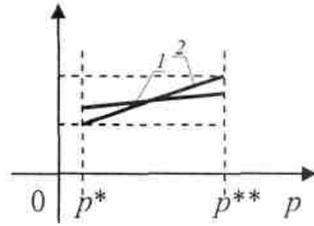


Рис. 2. Графики коэффициентов: 1 -  $d_0(p)$ , 2 -  $d_1(p)$

$= q_0(p^{**} - p^*) = q_0p^{**} - q_0p^*$ . Заметим, что величины  $q_0p^{**}$  и  $q_0p^*$  можно трактовать соответственно как максимально и минимально возможную выручку от продажи  $q_0$  единиц товара на рынке. Поэтому  $q_0P$  является оценкой потенциальных возможностей продавца при реализации  $q_0$  единиц товара. В то же время  $q_0p' = q_0(p_0 - p^*) = q_0p_0 - q_0p^*$ , что является разностью между полученной выручкой от продажи  $q_0$  единиц товара и минимально возможной выручкой от продажи этого же количества товара на данном рынке. Следовательно, величину  $q_0p'$  можно трактовать как *выигрыш продавца по цене*. Этот выигрыш тем больше, чем больше равновесная цена  $p_0$ . Кроме того,  $q_0p'' = q_0(p^{**} - p_0) =$

$= q_0p^{**} - q_0p_0$ , что является разностью между максимально возможными и осуществляемыми расходами покупателей при покупке  $q_0$  единиц товара. Следовательно, величину  $q_0p''$  можно трактовать как *выигрыш покупателей по цене*. Чем меньше  $p_0$ , тем больше выигрыш покупателей по цене. Таким образом, приходим к следующему:  $q_0p$  - это *суммарный выигрыш по цене покупателей и продавцов* при осуществлении сделки купли-продажи  $q_0$  единиц товара.

Можем записать равенства  $Qp_0 = p_0q' + p_0q'' = p_0q^{**} - p_0q^*$ , где правая часть - разность между выручкой от продажи максимально возможного и минимально возможного количества товара по равновесной цене  $p = p_0$ . При этом  $p_0q' = p_0(q_0 - q^*) = p_0q_0 - p_0q^*$ , что в конечном итоге является разностью между получаемой выручкой по равновесной цене  $p = p_0$  и минимально возможной по этой же цене. Следовательно, величину  $p_0q'$  можно назвать *выигрышем продавца по объему продаж*. Этот выигрыш тем больше, чем больше равновесный объем продаж  $q_0$ . Аналогично имеем равенства  $p_0q'' = p_0(q^{**} - q_0) = p_0q^{**} - p_0q_0$ , где правая часть представляет собой разность между максимально возможными расходами покупателей при покупке товара по равновесной цене  $p = p_0$  и их реальными расходами при покупке товара по этой же цене. Поэтому величину  $p_0q''$  можно трактовать как *выигрыш покупателей по объему продаж*. Очевидно, чем меньше  $q_0$ , тем больше выигрыш покупателей по объему продаж. Таким образом, можно сформулировать следующее экономическое понятие: величина  $Qp_0$  есть *суммарный выигрыш покупателей и продавцов по объему продаж*: при осуществлении сделки купли-продажи по равновесной цене  $p = p_0$ .

Отметим, что равенство выигрышей по объему продаж для продавцов и покупателей означает условие  $q' = q''$ . В соответствии с вновь введенными определениями приходим к следующему экономическому эффекту, вытекающему из условий устойчивости рынка: *если суммарный выигрыш по объему продаж превосходит суммарный выигрыш по цене, то устойчивость равновесия не зависит от уровня налогов; если же суммарный выигрыш по цене превосходит суммарный выигрыш по объему продаж, то увеличение налогового пресса может нарушить стабильность рынка*.

**7. Частный случай модели.** Предположим, что объемы продаж неизменны, т. е.  $q(p) \equiv q_0$ , а коэффициенты модели подчинены условиям (2), (3), описанным в рамках исходной общей модели. В этом случае уравнение (7) записывается в виде  $\ddot{x} = f(x) + g(x)\dot{x}$ ,  $f(x) = -x(v_0 + d_0 - r - (V_0 - D_0)x/p_0)$ ,  $g(x) = -(v_0 - d_0 + (V_1 - D_1)x/p_0)$ . (8)

Исследование условий устойчивости равновесия  $x = 0$  (или экономического равновесия  $p = p_0$ ) уравнения (8) методами качественной теории дифференциальных уравнений как в основном, так и в критических случаях дает следующий результат.

**Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 2**

Теорема 2. Равновесие  $x = 0$  ( $p = p_0$ ) модели (8) асимптотически устойчиво, если

$$v_1 > d_1, v_0 + d_0 > r \text{ или } v_1 = d_1, v_0 + d_0 > r \text{ и } (V_0 - D_0)(V_1 - D_1) > 0.$$

При выполнении условий

$$v_1 = d_1, a_0 > 0, (V_0 - D_0)(V_1 - D_1) = 0 \\ \text{либо } v_1 > d_1, V_0 - D_0 = 0$$

равновесие (8) устойчиво не асимптотически.

Если же имеют место условия

$$v_1 = d_1, a_0 > 0, (V_0 - D_0)(V_1 - D_1) < 0 \\ \text{либо 1) } v_1 \neq d_1, V_0 - D_0 \neq 0, 2) v_1 < d_1, V_0 - D_0 = 0 \\ \text{либо } v_1 = d_1, a_0 = 0,$$

то равновесие модели (8) неустойчиво.

1. К а л и т и н Б.С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 1. С. 68.
2. Slop S., Stiglitz J. // Review of Economic Studies. 1977. Vol. 44. P. 493.
3. К а л и т и н Б.С., Люц Р. // Бел. экон. журн. 1999. № 1. С. 120.

Поступила в редакцию 30.01.04.

***Борис Сергеевич Калитин*** - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.