

УДК 519.10

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, К.Г. КУЗЬМИН

**ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ АНАЛОГЕ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ
ПО ХАУСДОРФУ ОПТИМАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ
В ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧЕ**

A multiple criteria lexicographic problem of Boolean programming is considered. Its partial criteria are positive excessions of linear functions. Necessary and sufficient conditions of stability are obtained to perturbations of the problem's parameters, at which all the lexicographic optima of the initial problem are preserved and new lexicographic optima may appear.

Введем оператор проектирования вектора $a=(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$ на неотрицательный ортант: $a_i^+=[a]^+=(a_1^+, a_2^+, \dots, a_m^+)$, где $a_i^+=[a_i]^+=\max\{0, a_i\}$, $i \in N_m=\{1, 2, \dots, m\}$. Тем самым такой оператор - это положительная срезка проектируемого вектора. Отметим, что операции проектирования на простейшие выпуклые множества, такие как неотрицательный ортант, гиперплоскость, полупространство, линейное многообразие и др., лежат в основе различных вариантов фейеровских итерационных процессов, применяемых для численного анализа собственных и несобственных задач линейного программирования, а также совместных и несовместных систем линейных неравенств [1-3].

Далее рассмотрим класс m -критериальных лексикографических булевых задач с частными критериями, являющимися проекциями линейных функций на $\mathbf{R}^+$. Пусть $m \geq 1$, $n \geq 2$, A_i - i -я строка матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{R}^{mn}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbf{R}^m$, $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ - множество допустимых решений (булевых векторов) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $|X| \geq 2$. В критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ введем бинарное отношение лексикографического порядка « $\prec$ » между различными векторами $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)^T$, полагая $y \prec y' \Leftrightarrow y_k < y'_k$, где $k = \min \{i \in N_m : y_i \neq y'_i\}$, $N_m = \{1, 2, \dots, m\}$.

Под лексикографической булевой задачей $Z^m(A, b)$, $m \geq 1$,

$$[Ax + b]^+ \rightarrow \text{lex min}_{x \in X},$$

будем понимать задачу поиска множества лексикографических оптимумов [4, 5]. Такое множество, являясь подмножеством множества Парето, задается формулой:

$$L^m(A, b) = \{x \in X : L^m(x, A, b) = \emptyset\},$$

где $L^m(x, A, b) = \{x' \in X : [Ax' + b]^+ \prec [Ax + b]^+\}$.

Заметим, что множество $L^m(A, b)$ может быть определено и как результат решения последовательности m скалярных задач минимизации (см., например, [4-7]), поэтому это множество не пусто при любых $A \in \mathbf{R}^{mn}$, $b \in \mathbf{R}^m$.

Отметим, что векторная функция $[Ax + b]^+$ характеризует меру несовместности (уклонений) следующей системы линейных булевых неравенств

$$Ax + b_i \leq 0, \quad i \in N_m, \quad x \in X. \quad (1)$$

Тем самым минимизация проекций $[Ax + b_i]^+$, $i \in N_m$, на множестве решений X равносильна минимизации невязок системы (1). Поэтому наша задача $Z^m(A, b)$ представляет собой задачу отыскания множества всех решений системы (1) при условии, если эта система совместна. Ясно, что эта система совместна тогда и только тогда, когда

$$\{y \in \mathbf{R}^m : y = [Ax + b]^+, \quad x \in L^m(A, b)\} = 0_{(m)} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^m.$$

Для всякого натурального числа q в q -мерном действительном пространстве $\mathbf{R}^q$ зададим норму l_∞ : $\|z\| = \max \{|z_i| : i \in N_q\}$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_q)$. Под нормой $\|A\|$ матрицы $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathbf{R}^{mn}$ будем понимать норму вектора $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn-1}, a_{mn}) \in \mathbf{R}^{mn}$. Пусть $\varepsilon > 0$, $\Omega(\varepsilon)$ - множество таких пар (A', b') что $A' \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\|A'\| < \varepsilon$, $b' \in \mathbf{R}^m$,

$\|b'\| < \varepsilon$. В дальнейшем пару $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ будем называть возмущающей. По аналогии с [8, 9] задачу $Z^m(A, b)$ назовем квазиустойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \quad (L^m(A, b) \subseteq L^m(A + A', b + b')). \quad (2)$$

Таким образом, квазиустойчивость задачи $Z^m(A, b)$ является свойством сохранения всех ее лексикографических оптимумов при «малых» возмущениях параметров матрицы A и вектора b , т. е. является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного (точечно-множественного) отображения, задающего лексикографическую функцию выбора (см., например, [10-12]).

Для каждой пары решений $x, x' \in X$ введем индекс $p(x, x') \in N_m$ по формуле

$$p(x, x') = \begin{cases} \min \{i \in M(x, x')\}, & \text{если } M(x, x') \neq \emptyset, \\ m, & \text{если } M(x, x') = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$M(x, x') = \{i \in N_{m-1} : h_i(x, x', A_i, b_i) < \gamma_{m-i}(x, x', A, b)\}, \quad N_0 = \emptyset,$$

$$h_i(x, x', A_i, b_i) = \begin{cases} [-A_i x - b_i]^+, & \text{если } N(x, x') \neq \emptyset, \\ [-A_i x - b_i]^+ + [-A_i x' - b_i]^+ - [-A_i x' - b_i]^+, & \text{если } N(x, x') = \emptyset, \end{cases}$$

$$N(x, x') = \{j \in N(x) : x_j = 1, x'_j = 0\},$$

$$\gamma_{i+1}(x, x', A, b) = g_{m-i}^+(x, x', A_{m-i}, b_{m-i}) + \min\{h_{m-i}(x, x', A_{m-i}, b_{m-i}), \gamma_i(x, x', A, b)\}, \quad i \in N_{m-1},$$

$$\gamma_1(x, x', A, b) = g_m^+(x, x', A_m, b_m) + h_m(x, x', A_m, b_m),$$

$$g_i(x, x', A_i, b_i) = [A_i x' + b_i]^+ - [A_i x + b_i]^+, \quad i \in N_m.$$

В этих обозначениях справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Если $p = p(x, x') \geq 2$, то $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, $i \in N_{p-1}$.

Свойство 2. Если $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, то $A_i x + b_i < 0$.

Свойство 3. Если $A_i x + b_i < 0$, то $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$ при любом решении $x' \neq x$.

Свойство 4. Пусть $h_p(x, x', A_p, b_p) > 0$, где $p = p(x, x')$. Тогда либо $g_i(x, x', A_i, b_i) = 0$ при любом i с условием $p \leq i \leq m$, либо $g_k(x, x', A_k, b_k) > 0$, где $k = \min\{i \in N_m : g_i(x, x', A_i, b_i) \neq 0, i \geq p\}$.

Из свойств 1 и 2 вытекает

Свойство 5. Если $p = p(x, x') \geq 2$, то $g_i(x, x', A_i, b_i) \geq 0$, $i \in N_{p-1}$.

Через $Q^m(A, b)$ обозначим множество таких решений $x \in X$, что для всякого решения $x' \in X \setminus \{x\}$ выполняется хотя бы одно из условий:

$$(i) \quad A_{p(x, x')} x + b_{p(x, x')} < 0, \quad (ii) \quad \exists s \in N_{p(x, x')} \quad (g_s(x, x', A_s, b_s) > 0).$$

Отсюда и из свойств 3-5 получаем следующее включение, справедливое при любых $A \in \mathbf{R}^{mn}$, $b \in \mathbf{R}^m$:

$$Q^m(A, b) \subseteq L^m(A, b). \quad (3)$$

Теорема. При любом $m \geq 1$ необходимым и достаточным условием квазиустойчивости задачи $Z^m(A, b)$ является равенство

$$L^m(A, b) = Q^m(A, b). \quad (4)$$

Доказательство. Достаточность. Поскольку для любого индекса $i \in N_m$ функции $A_i x + b_i$, $g_i(x, x', A_i, b_i)$, $h_i(x, x', A_i, b_i)$, $\gamma_i(x, x', A, b)$ непрерывны по параметрам $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn-1}, a_{mn}, b_i$, то неравенства (i) и (ii), а также индекс $p(x, x')$ будут сохраняться при «малых» возмущениях этих параметров. Поэтому справедлива формула

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall (A', b') \in \Omega(\varepsilon) \quad (Q^m(A, b) \subseteq Q^m(A + A', b + b')),$$

которая с учетом соотношений (4) и $Q^m(A + A', b + b') \subseteq L^m(A + A', b + b')$ (ввиду (3)) ведет к (2). Следовательно, задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива.

Необходимость докажем методом от противного. Пусть задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива, но вопреки условию теоремы $Q^m(A, b) \neq L^m(A, b)$. Тогда, учитывая включение (3), можно выделить решение $x \in L^m(A, b) \setminus Q^m(A, b) \neq \emptyset$. Поэтому найдется такое решение $x' \neq x$, что

$$A_{p(x, x')} x + b_{p(x, x')} \geq 0, \quad (5)$$

$$g_i(x, x', A_i, b_i) \leq 0, \quad i \in N_{p(x, x')}. \quad (6)$$

Далее построим возмущающую пару специального вида $(A^*, b^*) \in \Omega(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Пусть $0 < \gamma < \varepsilon$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $N(x, x') \neq \emptyset$. Тогда положим $b^* = 0_{(m)}$ и, зафиксировав индекс $q \in N(x, x')$, элементы матрицы $A^* = [a_{ij}^*]_{m \times n}$ зададим следующим образом: $a_{ij}^* = \gamma$, если $i = p$ и $j = q$; $a_{ij}^* = 0$ в остальных случаях. Здесь и далее $p = p(x, x')$.

Случай 2: $N(x, x') = \emptyset$. Тогда $N(x', x) \neq \emptyset$. Зафиксировав индекс $q \in N(x', x)$, элементы возмущающей пары определим по правилам: $a_{ij}^* = -\gamma$, если $i = p$ и $j = q$; $b_i^* = \gamma$, если $i = p$; $a_{ij}^* = b_i^* = 0$ в остальных случаях.

Очевидно, что в случаях 1 и 2 для всякого индекса $i \in N_{p-1}$ благодаря (5) справедливо неравенство $g(x, x', A_i - A_i^*, b_i + b_i^*) \leq 0$, а при $i=p$ с учетом (5) и (6) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} g_p(x, x', A_p + A_p^*, b_p + b_p^*) &= [A_p x' + A_p^* x' + b_p + b_p^*]^+ - [A_p x + A_p^* x + b_p + b_p^*]^+ = \\ &= [A_p x' + b_p]^+ - [A_p x + b_p]^+ - \gamma = g_p(x, x', A_p, b_p) - \gamma \leq -\gamma < 0. \end{aligned}$$

Резюмируя, заключаем, что

$$\forall x \in L^m(A, b) \setminus Q^m(A, b) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (A^*, b^*) \in \Omega(\varepsilon) \quad (x \notin L^m(A + A^*, b + b^*)).$$

Полученное противоречие с (2) доказывает, что задача $Z_m(A, b)$ не является квазиустойчивой. Теорема доказана.

В случае, когда $m=1$, множество $L^1(A, b)$ ($A \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$) является множеством оптимальных решений скалярной задачи $Z^1(A, b)$ минимизации функций

$$\left[\sum_{j \in N_*} a_j x_j + b \right]^+ \text{ на множестве } X. \text{ Поэтому из теоремы вытекает}$$

Следствие. Скалярная булева задача $Z^1(A, b)$ устойчива тогда и только тогда, когда либо $|L^1(A, b)|=1$, либо для всякого оптимального решения $x^0 \in L^1(A, b)$ справедливо неравенство $\sum_{j \in N_*} a_j x_j^0 + b < 0$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры 29» (проект 913/28).

1. Еремин И.И., Мазуров И.Д. Нестационарные процессы математического программирования. М, 1979.
2. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. КН., 1983.
3. Бердникова Е.А., Еремин И.И., Попов Л. Д. // Автоматика и телемеханика. 2004. №2. С. 16.
4. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев, 1988.
5. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород, 2002.
6. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. // Докл. НАНБеларуси. 1999. Т. 43. № 3. С. 41.
7. Емеличев В.А., Янушкевич О.А. // Кибернетика и системный анализ. 2000. № 2. С. 54.
8. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. // Весці НАН Беларусі Сер. фіз.-мат. навук. 1999. №4. С. 119.
9. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. // Мат. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 38.
10. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М., 1987.
11. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. М., 1993.
12. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев, 1995.

Поступила в редакцию 03.11.04.

Владимир Алексеевич Емеличев - доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики.

Кирилл Геннадьевич Кузьмин - студент 5-го курса механико-математического факультета.