

УДК 517.925.51

Н.Г. БУЛГАКОВ

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ НЕАСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

For autonomous differential systems with an isolated critical point the necessary and sufficient conditions of nonasymptotic stability in the terms of constant signs Lyapunov functions are established.

Рассмотрим n -мерную систему

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, \quad (1)$$

где $f \in C(R^n)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть $x(t, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$ - решение системы; $x^-(t)$ и $x^+(t)$ - ненулевые решения, определенные соответственно на R^- и R ; траекторию решения $x^-(t)$, для которой точка $\{0\}$ является α -предельной, будем называть нулевой α -траекторией; $V: R^n \rightarrow R^+$ - функция Ляпунова; $m = \{x \in R^n: V(x) = 0\}$ - множество нулей функции V ; $\text{int } m$ - внутренность m ; $\text{Fr } m$ - граница m ; $\|x\|$ - норма x ; $B_r = \{x \in R^n: \|x\| \leq r\}$, $r > 0$, - замкнутый шар; $B(x_0, r)$ - замкнутый шар с центром в точке $x_0 \in R^n$; множество m называется телесным, если $\forall x_0 \in \text{int } m, \exists r > 0$ такое, что $B(x_0, r) \subset m$; нуль системы называется устойчивым относительно m (m -устойчивым), если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, для которого $\forall x_0 \in m \cap B_\delta$ выполняется неравенство $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon, t \geq 0$.

Приведем формулировки двух теорем, относящихся к рассматриваемой проблеме.

Теорема 1 ([1, с. 184]; [2, лемма 8, с. 49]). Пусть для системы $\exists V: V \geq 0, \dot{V} \leq 0$, в шаре $x \in B_r$ и $\exists \sigma > 0$ такое, что множество $m \cap B_\sigma$ не содержит $x^\infty(t)$. Нуль системы устойчив тогда и только тогда, когда он устойчив относительно множества m или когда множество m не содержит нулевых α -траекторий.

Полагая в теореме 1 $V \equiv 0$, приходим к следующему заключению. Пусть $\exists \sigma > 0$ такое, что шар B_σ содержит целых траекторий $x^\infty(t) \notin B_\sigma$. Нуль системы устойчив тогда и только тогда, когда R^n не содержит нулевых α -траекторий. Этот результат иным путем впервые был получен В.И. Зубовым ([3, с. 42]).

Если множество m телесно и $\{0\} \in \text{Fr } m$, то теорема 1 допускает следующее усиление, установленное автором данной статьи.

Теорема 2 ([4, критерий устойчивости]). Пусть $\exists V: V \geq 0, \dot{V} \leq 0, x \in B_r$, и $\exists \sigma > 0$ такое, что множество $\text{Fr } m \cap B_\sigma$ не содержит $x^\infty(t)$. Нуль устойчив тогда и только тогда, когда он устойчив относительно множества m .

Автономные системы на плоскости с изолированной точкой покоя $\{0\}$, как известно, обладают рядом особых свойств. Опираясь на эти свойства, покажем,

что теоремы 1 и 2 можно усилить. Дальнейшее изучение системы (1) проводится для случая $n=2$, при этом предполагается, что $\{0\}$ является изолированной точкой покоя.

Лемма 1. Пусть для системы $\exists V: V \geq 0, \dot{V} \leq 0$, в круге B_r и нуль системы неустойчив, тогда множество m содержит нулевую α -траекторию.

Доказательство. Нуль неустойчив. Следовательно, $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{y_n\}, y_n \in B_{\varepsilon}, y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ такие, что $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty: \|x(t, y_n)\| < \varepsilon, 0 \leq t < t_n; \|x_n\| = \|x(t_n, y_n)\| < \varepsilon$. При этом $x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty, \|x^*\| < \varepsilon$. Так как $\forall \tau < 0$, при достаточно большом $n \geq 1$ выполняется неравенство $0 \leq t_n + \tau < t_n$, то согласно сказанному и условию леммы 1 имеем

$$\|x(t_n + \tau, y_n)\| = \|x(\tau, x(t_n, y_n))\| < \varepsilon, V(y_n) \geq V(x(t_n + \tau, y_n)) = V(x(\tau, x(t_n, y_n))) \geq 0.$$

Перейдя к пределу, получаем ([5, лемма 1])

$$x^-(t, x^*) \subset m \cap B_{\varepsilon}. \quad (2)$$

Отрицательная полутраектория (2) ограничена, и, следовательно, ее α -пре-дельное множество $A(x^*)$ непусто. Выясним структуру этого множества. *A priori* возможны два случая (ср. [6, теорема 1.1.1]).

1. Существует окрестность U точки $\{0\}$, в которой нет замкнутых траекторий системы. Но тогда и в круге $B_{\varepsilon} \subset U$ нет замкнутых траекторий (циклов). Для предельного множества $A(x^*)$ согласно [6, теорема 0.3.2] могут представиться следующие случаи: а) $A(x^*) = \{0\}$; б) $A(x^*)$ является замкнутой кривой, состоящей из точки $\{0\}$ и траекторий, каждая из которых любым своим концом примыкает к точке $\{0\}$. В обоих случаях полутраектория решения $x^-(t, x^*)$ является нулевой α -траекторией.

2. В любой окрестности точки $\{0\}$ существует замкнутая траектория L системы. Но тогда такая траектория существует и в круге $\{x \in R^2: \|x\| \leq 0,5\varepsilon\}$, и по теореме 0.3.1 [6] траектория L окружает точку $\{0\}$. Рассмотрим отрезок траектории $Q^n = x([-t_n, 0], x_n)$. Принимая во внимание тождество $x(-t_n, x_n) = y_n$, нетрудно видеть, что Q^n пересекает L при достаточно большом $n \geq 1$. Следовательно, этот случай невозможен. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает

Теорема 3. Пусть для системы $\exists V: V \geq 0, \dot{V} \leq 0$, в круге B_r Нуль системы устойчив тогда и только тогда, когда он устойчив относительно множества m или когда множество m не содержит нулевых α -траекторий.

Полагая в теореме 3 $V \equiv 0$, приходим к следующему утверждению: нулевое решение системы устойчиво тогда и только тогда, когда фазовая плоскость системы R^2 не содержит нулевых α -траекторий. Этот результат иным путем впервые был получен Ю.С. Богдановым ([7, с. 62]).

Лемма 2. Пусть для системы $\exists V: V \geq 0, \dot{V} \leq 0$, в круге B_r при этом $\{0\} \in \text{Fr } m$. Пусть, кроме того, нуль неустойчив относительно $R^2 \setminus \text{int } m$, но устойчив относительно $\text{int } m$. Тогда граница множества m содержит нулевую α -траекторию.

Доказательство. Нуль неустойчив относительно $R^2 \setminus \text{int } m$, но устойчив относительно $\text{int } m$. Следовательно, $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists \{y_n\}, y_n \in R^2 \setminus \text{int } m, y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, такие, что $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \exists \{t_n\}, t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty: \|x(t, y_n)\| < \varepsilon, 0 \leq t < t_n; \|x_n\| = \|x(t_n, y_n)\| = \varepsilon$, при этом $x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty, \|x^*\| = \varepsilon$.

Повторив рассуждения из доказательства леммы 1, получаем:

$$1) \quad x^-(t, x^*) \subset m \cap B_{\varepsilon};$$

2) полутраектория решения $x^-(t, x^*)$ является нулевой α -траекторией. Пусть $x^* \in \text{Fr } m$. В этом случае, как показано в [8], $x^-(t, x^*)$ не может покинуть $\text{Fr } m$. Пусть $x^* \in \text{int } m$. Поскольку нуль системы устойчив относительно $\text{int } m$, то

решение $x^*(t, x^*)$ в некоторый момент $t < 0$ попадет на границу множества m . Рассуждая снова, как в [8], заключаем, что и в этом случае граница множества m содержит нулевую α -траекторию. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 2 вытекает

Теорема 4. Пусть для системы $\exists V: V \geq 0, \dot{V} \leq 0$, в круге B_r , при этом $\{0\} \in \text{Fr } m$. Нуль системы устойчив тогда и только тогда, когда он $\text{int } m$ -устойчив и граница этого множества не содержит нулевых α -траекторий.

Примечания. 1. Теорема 3 выделяет класс систем, для которых из устойчивости нулевого решения относительно множества нулей функции $V(x)$ следует устойчивость относительно всей фазовой плоскости R^2 . Этот класс систем не является пустым. Действительно, рассмотрим систему

$\dot{x} = -x + y, \dot{y} = -2y + y(x^2 + y^2)$. Ясно, что нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову. Возьмем функцию $2V = y^2 \geq 0, \dot{V} = -y^2(2 - (x^2 + y^2)) \leq 0$. На множестве $m = \{(x, y) \in R^2 : y = 0\}$ система принимает вид $\dot{x} = -x$. Нетрудно убедиться, что все условия теоремы 3 выполняются.

2. Достаточные условия устойчивости в теореме 3 объединены с необходимыми условиями. Трудность такого объединения известна. О ней говорится и в работе [9, с. 126].

3. Метод знакопостоянных функций практически незаменим при исследовании квазилинейных систем с разрывными характеристиками нелинейности ([4, пример]).

Автор благодарит М.П. Богданову и А.Ф. Андреева за поддержку и внимание к работе.

1. Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Мн., 1983.
2. Булгаков Н.Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Мн., 1984.
3. Зубов В. И. Устойчивость движения. М., 1973.
4. Булгаков Н.Г. // Вестн. Белорус. гос. ун-та. 2004. Сер. 1. № 1. С. 92.
5. Гайшун И.В., Княжище Л.Б. // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1453.
6. Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. СПб., 2003.
7. Богданов Ю.С. Исследование динамических систем с помощью обобщенных характеристических чисел. Мн., 2001.
8. Груд о Э. И. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №5. С. 782.
9. Калитин Б.С. Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Мн., 2002.

Поступила в редакцию 19.02.04.

Николай Григорьевич Булгаков - кандидат физико-математических наук.