УДК 517.925.41

Ю.Л. БОНДАРЬ

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ДЛЯ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

In this paper there is given the full solution of the problem of isochronicity for the system $\dot{x}=y(1+Dx+Px^2)$, $\dot{y}=-x+Ax^2+Cy^2+Kx^3+Mxy^2$.

Проблема изохронности центра для некоторых классов кубических систем ранее уже анализировалась (см, например, [1-4]). В настоящей работе рассматривается кубическая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=y(1+Dx+Px^2)\equiv\rho,$$
$$\dot{y}=-x+Ax^2+Cy^2+Kx^{ъ}+Mxy^2\equiv\mu, \qquad (1)$$

где A, C, D, K, M, P - комплексные постоянные. Начало координат системы (1) является особой точкой типа центра. Найдем условия, при которых $O(0, 0)$ является изохронным центром.

Определение 1. Особая точка $O(0, 0)$ системы

$$\dot{x}=P(x,y), \dot{y}=Q(x,y), \qquad (2)$$

где P, Q - аналитические в окрестности $x=y=0$ функции вида $P(x, y)=$ $=y+\sum_{i+j=2}^{\infty}a_{i,j}x^iy^j$, $Q(x, y)=-x+\sum_{i+j=2}^{\infty}b_{i,j}x^iy^j$ называется центром, если система (2) имеет аналитический в окрестности $x=y=0$ интеграл $x^2+y^2+\sum_{i+j=3}^{\infty}c_{i,j}x^iy^j$.

Определение 2. Центр $O(0, 0)$ системы (2) называется изохронным, если существует аналитическое в окрестности x=y=0 преобразование $u=x+$ $+\sum_{i+j=2}^{\infty}\alpha_{i,j}x^iy^j$, $v=y+\sum_{i+j=2}^{\infty}\beta_{i,j}x^iy^j$, приводящее систему (2) к системе $\dot{u}=v$, $\dot{v}=-u$.

1. Для системы (1) существует ряд $h=x+\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}a_{j,i-j}x^jy^{i-j}$, для которого в силу (1) выполняется $\rho^2h''_{xx}+2\rho\mu h''_{xy}+\mu^2h''_{yy}+(\rho'_x\rho+\rho'_y\mu)h'_x+(\mu'_x\rho+\mu'_y\mu)h'_y+h=$ $=\sum_{i=1}^{\infty}g_ixy^{2i}$, где g_i, $i=1, 2, \ldots$ - изохронные величины. Образуем идеал [5, с. 46] $I=<g_1, \ldots, g_k, \ldots>$. Изохронная величина g_1 для системы (1) имеет вид: $g_1=A(10A+10C-D)+(C-D)(4C-D)+3(3K+M+P)$, g_2 содержит 55 слагаемых, g_3 -240, g_4 — 805, g_5 — 2291, g_6 - 5754. Программа для вычисления изохронных величин в компьютерном пакете MATHEMATICA 5.0 имеется в [6].

Изохронные величины g_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются полиномами из кольца $\mathbf{C}[q]$, где $q=(A, C, D, K, M, P)$, поэтому $I\subset\mathbf{C}[q]$. Многообразием идеала I является множество [5, с. 108] $V(I)=\{q\in\mathbf{C}^6:\forall f\in I\ f(q)=0\}$, которое будем называть многообразием изохронного центра системы (1). Особая точка $O(0, 0)$ является изохронным центром тогда и только тогда, когда $q\in V(I)$, т. е. решение проблемы изохронного центра сводится к нахождению многообразия $V(I)$.

Теорема. Радикал [5, с. 230] $\sqrt{I}$ идеала I имеет вид: $\sqrt{I}=\bigcap\limits_{k=1}^{11} I_k$, где

$I_1=\langle A, C, K, D^2+9M, 2D^2-9P\rangle$, $I_2=\langle A, C-D, K, M-P\rangle$,
$I_3=\langle A, 4C-D, K, M, P\rangle$, $I_4=\langle A+C, 2A+D, K, M-P\rangle$,
$I_5=\langle A+C, A+2D, A^2+4K, M, P\rangle$, $I_6=\langle A+2C, 3A+2D, A^2+2K, M, A^2-2P\rangle$,
$I_7=\langle 3A+4C, A+D, A^2+3K, M, P\rangle$,
$I_8=\langle 2A^2+6AC+5C^2, 4A+5C+D, A(2A+C)+5K, M, 2A(4A+7C)-5P\rangle$,
$I_9=\langle 7A^2+20AC+16C^2, 7A+8C+D, K, A(5A+8C)+4M, A(5A+8C)-P\rangle$,
$I_{10}=\langle 2A+C-D, K, 2A(4A+C)+M, A(4A+C)+P\rangle$,
$I_{11}=\langle 2A+C-D, A^2(4A+C)+K(15A+4C), 3A(4A+C)+9K+2M, A(4A+C)+3K+2P\rangle$,
I_k, $k=\overline{1, 11}$, - простые идеалы [5]. *Следствие.* Многообразие изохронного центра системы (1) имеет вид:

$$V(I)=\bigcup_{k=1}^{11} V(I_k)$$

Используя базисы Грёбнера, легко убедиться, что справедлива следующая
Лемма. Имеют место равенства:

$$\sqrt{I+\langle M\rangle}=I_3\cap\left(\bigcap_{k=5}^{8} I_k\right)\cap\left(\bigcap_{k=1}^{4}\hat I_k\right);\quad \sqrt{I+\langle K\rangle}=\left(\bigcap_{k=1}^{4} I_k\right)\cap I_9\cap I_{10};$$

$$\sqrt{I+\langle P\rangle}=I_3\cap I_5\cap I_7\cap\left(\bigcap_{k=1}^{4}\hat I_k\right);\quad \sqrt{I+\langle M-P\rangle}=\bigcap_{k=2}^{5} I_k\cap I_7\cap\hat I_3\cap\hat I_4;$$

$$\sqrt{I+\langle 2A+C-D\rangle}=I_2\cap I_{10}\cap I_{11};\quad \sqrt{I+\langle A\rangle}=\left(\bigcap_{k=1}^{3} I_k\right)\cap\hat I_5;$$

$$\sqrt{I+\langle A+C\rangle}=I_1\cap I_4\cap I_5\cap\hat I_5\cap\hat I_6\cap\hat I_7,$$

где $\hat I_1=\langle A, C-D, K, M, P\rangle$, $\hat I_2=\langle A+C, 2A+D, K, M, P\rangle$, $\hat I_3=\langle 3A+C, A+D, A^2+3K, M, P\rangle$, $\hat I_4=\langle 4A+C, 2A+D, K, M, P\rangle$, $\hat I_5=\langle A, C, D, 9K+2M, 3K+2\rangle$, $\hat I_6=\langle A+C, A-D, K, 6A^2+M, 3A^2+P\rangle$, $\hat I_7=\langle A+C, A-D, 3A^2+11K, 36A^2+11M, 12A^2+11P\rangle$, $\hat I_k$, $k=\overline{1, 7}$, – простые идеалы.

2. Доказательство теоремы. *Необходимость.* Образуем идеал $\tilde I=(I+\langle 2u+v-w-A, u-v+w+C, 3u-2v+w+D\rangle)\cap\mathbf{C}[K, M, P, u, v, w]$. Используя методбазисов Грёбнера, получаем, что радикал идеала

$$\tilde I_0=\tilde I+\langle Mu(3u-w)(6u-3v+2w)(9u^2+w^2)(21u^2+6uw+w^2)\times$$
$$\times(6k+24u^2-12uv+11uw)(972u^5-108u^3w^2-81u^2w^3+6uw^4+w^5)\times$$
$$\times[108u^2(4u-5v)(2u-v)+36uw(u-v)(11u-2v)-3w^2(39u^2-24uv-4v^2)-2w^3(u+10v)+8w^4]\rangle$$

имеет вид $\sqrt{\tilde I_0}=\bigcap\limits_{k=1}^{11}\tilde I_k$, где $\tilde I_k=(I_k+\langle 2u+v-w-A, u-v+w+C, 3u-2v+w+D\rangle)\cap\mathbf{C}[K, M, P, u, v, w]$, $k=\overline{1, 11}$. Таким образом, доказано, что $\sqrt{I}\subset\bigcap\limits_{k=1}^{11} I_k$. Покажем, что в случае $\tilde q\notin V(\tilde I_0)$ особая точка $O(0, 0)$ не является изохронным центром.

Идеал $\tilde{I}$ имеет вид $\tilde{I}=<\tilde{g}_1,\ \tilde{g}_2, \dots >$, где $\tilde{\boldsymbol{g}}_i=(g_i+<2u+v-w-A,\ u-v+w+C,\ 3u-2v+w+D>)\cap \boldsymbol{C}[K, M, P, u, v, w]$, $i = 1,2, \dots$. Из условия $\tilde{g}_1 = 0$ имеем

$$P=3K+M+u(8u-4v+3w)+w^2/3. \qquad (3)$$

Считая, что условие (3) для системы (1) выполняется, исключим из $\tilde{g}_i$, $i=\overline{2,\ 6}$, переменную P. Получаем: $\tilde{g}_i=\alpha_i f_i$ где $\alpha_i \neq 0$, $f_i \in \boldsymbol{C}[K, M, u, v, w]$, $i=\overline{2,\ 6}$. Заметим, что f_2 содержит переменную M в первой степени. Решая уравнение $f_2=0$, имеем:

$$M=[2w^4+w^3(38u-5v)+3w^2(76u^2-19uv+v^2)+18uw(32u^2-19uv+v^2)+81K^2+$$
$$+27u^2(8u-5v)(2u-v)+K(21w^2+9w(27u-2v)+54u(7u-3v))]/[3(6K+24u^2-12uv+11uw)].$$

Поскольку $\tilde{q}\notin \boldsymbol{V}(\tilde{I}_0)$, то $6K+24u^2-12uv+11uw\neq 0$. Тогда будут верны соотношения: $f_i=\beta_i F_i/(6K+24u^2-12uv+11\ uw)^{i-1}$, $i=\overline{3,\ 6}$, где $\beta_i\neq 0$, $F_i \in \boldsymbol{C}[K, u, v, w]$, $i=\overline{3,\ 6}$. Далее через $R_x(Q_1, Q_2)$ будем обозначать результант [5, с. 209] полиномов Q_1 и Q_2 по переменной x. Вычислим два результанта: $R_1=R_K(O_3, sO_4+O_5)$ и $R_2=R_K(O_3, sO_4+O_6)$, где $O_i=F_i|_{w=1}$, $i=\overline{3,\ 6}$. Имеем $R_1=\sum_{i=1}^{5} s^{i-1}Y_i$, где Y_i, $i=\overline{1,\ 5}$, - полиномы от переменных u, v вида:

$$Y_i=\gamma_i(2+6u-3v)^2[108u^2(4u-5v)(2u-v)+36u(u-v)\times$$
$$\times(11u+2v)-3(39u^2-24uv-4v^2)-2(u+10v)+8]^{n_i}Z_i,\quad i=\overline{1,4},$$
$$Y_5=\gamma_5(2+6u-3v)^2(1260u^2-3225u+2436v-576v^2-389)^2[108u^2(4u-5v)\times$$
$$\times(2u-v)+36u(u-v)(11u+2v)-3(39u^2-24uv-4v^2)-2(u+10v)+8]^6Z_5,$$ при этом $\gamma_i\neq 0$, $i=\overline{1,\ 5}$, $n_1=8$, $n_2=7$, $n_3=n_4=6$, $Z_1, \dots, Z_5$ - взаимно простые полиномы от u, v, состоящие из 1423, 1413, 1413, 1214 и 847 слагаемых соответственно.

Результант R_2 можно представить в виде $R_2=\sum_{i=1}^{5} s^{i-1}W_i$, где

$$W_i=\delta_i(2+6u-3v)^2[108u^2(4u-5v)(2u-v)+36u(u-v)\times$$
$$\times(11u+2v)-3(39u^2-24uv-4v^2)-2(u+10v)+8]^{k_i}\ \xi_i,\ i=\overline{1,4},$$
$$W_5=\delta_5(2+6u-3v)^2(1260u^2-3225u+2436v-576v^2-389)^4[108u^2(4u-5v)\times$$
$$\times(2u-v)+36u(u-v)(11u+2v)-3(39u^2-24uv-4v^2)-2(u+10v)+8]^6\xi_5,$$ при этом $\delta_i\neq 0$, $i=\overline{1,5}$, $k_1=10$, $k_2=8$, $k_3=k_4=6$, $\xi_i, \dots, \xi_5$ - взаимно простые полиномы от u, v, имеющие 2141, 2131, 2117, 1643 и 847 слагаемых соответственно.

Поскольку $\tilde{q}\notin V(\tilde{I}_0)$, то $(2+6u-3v)^2[108u^2(4u-5v)(2u-v)+36u(u-v)(11u+2v)-3(39u^2-24uv-4v^2)-2(u+10v)+8]\neq 0$. Особая точка $O(0,\ 0)$ может быть центром, если выполняются условия $Z_i=0$, $\xi_i=0$, $i=\overline{1,5}$. Вычислим следующие результанты: $r_i=R_v(Z_5, Z_{5-i})$, $i=\overline{1,4}$, а также $r_0=R_v(\xi_5,\ \xi_4)$. При этом r_i, $i=\overline{1,4}$, - полиномы от одной переменной v соответственно 1812, 2051, 2051, 2064-й степени, коэффициенты которых - взаимно простые числа порядков 10^{697} - 10^{1957}, 10^{914} - 10^{2331}, 10^{975}- 10^{2402}, 10^{1005}- 10^{2435} соответственно, r_0 - полином от u 2215-й степени, коэффициенты которого - взаимно простые числа порядка 10^{1050} - 10^{2531}.

Наибольший общий делитель полиномов; $r_0, \dots, r_5$ равен $u^{32}(3u-1)^{14}(1+9u^2)^2\times$ $\times(1+6u+21u^2)(1+6u-81u^2-108u^3+972u^5)^4$. Но $\tilde{q}\notin \boldsymbol{V}(\tilde{I}_0)$, поэтому $u(3u-1)(1+9u^2)\times$ $\times(1+6u+21u^2)(1+6u-81u^2-108u^3+972u^5)\neq 0$, значит, в этом случае особая точка $O(0,\ 0)$ не является изохронным центром.

Достаточность условий теоремы 1 была доказана в [3] с учетом преобразования типа Дарбу [4], коммутирующих систем [7, 8], эквихронных систем [9]. Заметим, что включение $V(I_2)\cup V(I_{10})\cup V(I_{11})\subset V(I)$ следует из теоремы 3 работы [10]. D

1. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.
2. Chavarriga J., Sabatini M. // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 1999. Vol. 1. P. 1.
3. Пыжкова Н.В., Садовский А.П., Хомбак М.Л. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 120.
4. Mardesic P., Moser-Jauslin L., Rousseau C. // J. Differential Equations. 1997. Vol. 134. P. 216.
5. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М., 2000.
6. Бондарь Ю. Л., Садовский А.П.// Еругинские чтения - XI : Тез. докл. междунар. мат. конф. (Витебск, 20-22 мая 2003 г.). Витебск, 2003. С. 174.
7. Ладис Н.Н. Коммутирующие векторные поля и изохронность // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1976. № 1.С. 21.
8. Villarini M. // Nonlinear Anal. 199:». Vol. 19. №8. P. 787.
9. Пыжкова Н. В. // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 5. С. 397.
10. Sabatini M. // J. of Differential Equations. 2004. № 196. P. 151.

Поступила в редакцию 29.10.04.

Юлия Леонидовна Бондарь - аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений А.П. Садовский.