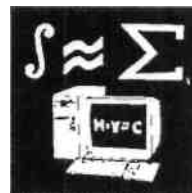


Математика и информатика



УДК 517.944

А.Г. АЛЕХНО

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА КОНТУРЕ ЛЯПУНОВА

The general solution is given for the Riemann problem with coefficient discontinuous of the second kind.

В комплексной плоскости дан простой гладкий контур L , выходящий из начала координат и являющийся в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки дугой Ляпунова, имеющей в ней параметрическое представление

$$L = \{t = r \exp(ikr^{-\alpha}) \mid r_0 < r < \infty\}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Решена однородная краевая задача Римана [1, с. 439], заключающаяся в нахождении всех ограниченных аналитических в области $D = \mathbb{C} \setminus L$ функций, непрерывно продолжимых на края разреза по L , граничные значения которых удовлетворяют соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

Заданные функции $G(t)$ и $g(t)$ подчинены условиям:

$$1) G(t) = \exp\{2\pi i \varphi(t) |t|^p\}, \quad t \in L, \quad 0 < p < 1/2, \quad \varphi \in H(\mu), \quad \varphi(\infty) = \lambda + i\nu \neq 0, \quad (3)$$

$$2) g(t) \in H, \quad g(\infty) = 0. \quad (4)$$

Из (3) следует, что при $t \rightarrow \infty$ к бесконечности стремится как $\arg G(t)$, так и $\ln|G(t)|$. Исследование задачи (1) основано на методе, разработанном Н.В. Говоровым [2] для решения задачи Римана с бесконечным индексом в случае одностороннего завихрения, когда $\nu = 0$. Задача для многостороннего завихрения изучена автором [3]. В настоящей работе выявлено влияние на разрешимость задачи параметров a, k из представления контура L и построено ее общее решение.

Теорема 1. Пусть L - простой гладкий контур, уходящий в бесконечность под углом $\beta = 0$.

1. Если $|\nu| < \lambda \operatorname{ctg} p\pi$, то однородная задача Римана

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

с коэффициентом, подчиненным условию (3), имеет в классе B ограниченных аналитических в D функций бесконечное множество решений, общая формула которых

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \quad (6)$$

где

$$X(z) = \exp \left\{ z \int_L \frac{\varphi(\tau) |\tau|^\rho d\tau}{\tau(\tau-z)} \right\} \quad (7)$$

- каноническая функция, а $F(z)$ - произвольная целая функция порядка $\rho_F \leq \rho$, удовлетворяющая на L асимптотическому соотношению

$$\ln |F(t)| < \left| \operatorname{Re} \left\{ \varphi(t) |t|^\rho \right\} \right| - \operatorname{Re} \left\{ t \int_L \frac{\varphi(\tau) |\tau|^\rho d\tau}{\tau(\tau-t)} \right\} + O(1), \quad L \in t \rightarrow \infty.$$

2. Если $|\nu| > \lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$, то однородная задача неразрешима в классе B .

Доказательство. Запишем каноническую функцию задачи в виде

$$\ln X(z) = (\lambda + i\nu) z \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{1-\rho}(\tau-z)} + z \int_0^\infty \frac{(\varphi(\tau) - (\lambda + i\nu)) \tau^\rho d\tau}{\tau(\tau-z)} \equiv (I_1 + I_2)(z). \quad (8)$$

Интеграл $I_1(z)$ вычисляется по теореме о вычетах [4, с. 245]

$$I_1(z) = -\frac{\pi(\lambda + i\nu)e^{-i\rho\pi}}{\sin \rho\pi} z^\rho, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

В силу условий на функцию $\varphi(t)$ справедливо соотношение [2, с. 118]

$$I_2(z) = o(|z|^\rho), \quad z \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\ln X(re^{i\theta}) = -\frac{\pi}{\sin \rho\pi} (\lambda + i\nu) e^{i\rho(\theta-\pi)} r^\rho + o(r^\rho).$$

Отсюда следует

$$\ln |X(re^{i\theta})| = -\frac{\pi}{\sin \rho\pi} (\lambda \cos \rho(\theta - \pi) - \nu \sin \rho(\theta - \pi)) r^\rho + o(r^\rho).$$

Значит, индикатор канонической функции имеет вид

$$h_X(\theta) = -\pi(\sin \rho\pi)^{-1} (\lambda \cos \rho(\theta - \pi) - \nu \sin \rho(\theta - \pi)), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (9)$$

Если $|\nu| > \lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$, то из (9) следует, что $h(\theta) < 0$ при $\theta \in [0, 2\pi]$ и согласно [2, с. 120] общее решение задачи задается равенством (6).

Если $|\nu| > \lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$, то либо $h_X(0) > 0$, либо $h_X(2\pi) > 0$. Поскольку $\rho > 1/2$, то ограниченных решений не существует [2, с. 203]. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть L - контур Ляпунова с показателем Гельдера $\alpha > \rho$ и $\rho < \mu \leq 1$.

1. Если $-\lambda \operatorname{ctg} \rho\pi < \nu < 0$, то неоднородная задача Римана (2) - (4) безусловно разрешима, и ее общее решение задается формулой

$$\Phi(z) = X(z) \left\{ F(z) + \frac{F_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{X^*(\tau) F_0(\tau)(\tau-z)} \right\},$$

где $X(z)$ - каноническая функция (7), $F(z)$ - произвольная целая функция порядка $\rho_F < \rho$, для которой справедливо асимптотическое неравенство

$$|F(t)| < \pi(\lambda \operatorname{ctg} \rho\pi + \nu) |t|^\rho + O(1), \quad L \in t \rightarrow \infty,$$

$$F_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_n} \right), \quad r_n = \left(\frac{2|\lambda \cos \rho\pi + \nu \sin \rho\pi|}{2n-1} \right)^{1/\rho}. \quad (10)$$

2. Если $\lambda \cos \rho\pi < -\nu < 0$, то для разрешимости неоднородной задачи Римана (2) - (4) необходимо и достаточно выполнения счетного множества условий разрешимости

$$\int_L \frac{F_0(\tau) g(\tau) d\tau}{X^*(\tau)(\tau+r_n)} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

а $F_0(z)$ - целая функция вида

где $F_0(z)$, r_n определяются по формулам (10). Если эти условия выполнены, то единственное ограниченное решение задачи дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i F_0(z)} \int_L \frac{F_0(\tau) g(\tau) d\tau}{X^*(\tau)(\tau - z)}.$$

Теорема доказывается методом, предложенным Н.В. Говоровым [2], с использованием результатов автора [5].

Если $|\nu| = \lambda \operatorname{ctg} \rho\pi$, то $h_X(0) = h_X(2\pi) = 0$ и разрешимость однородной задачи Римана зависит как от показателя Гёльдера μ коэффициента $G(t)$, так и от свойств контура. Зависимость разрешимости задачи от свойств коэффициента проанализирована в работах М.Э. Толочко [6] и автора [3].

Установим теперь влияние контура на разрешимость задачи Римана в указанном случае, считая для простоты, что $\phi(t) \equiv \lambda(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi)$.

Теорема 3. Пусть L - простой гладкий контур, являющийся в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки дугой Ляпунова, имеющей в ней параметрическое представление (1), а $G(t) = \exp\{2\pi i \lambda(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi)|t|^\rho\}$, $0 < \rho < 1/2$, $\lambda > 0$. Тогда:

1) если $\alpha > \rho$, то единственное ограниченное решение однородной задачи Римана (2) дается формулой (6), где $F(z) \equiv \text{const}$;

2) пусть $\alpha = \rho$; если $k > 0$, то задача имеет $n = [k\lambda\rho \operatorname{ctg} \rho\pi] + 1$ линейно независимых решений вида (6), где $F(z)$ - многочлен степени не выше $n-1$; если $k < 0$, то ограниченных решений нет;

3) если $0 < \alpha < \rho$ и $k < 0$, то задача имеет в классе B бесконечное множество решений, которые представимы по формуле (6), где $F(z)$ - произвольная целая функция порядка $\rho_f \leq \rho - \alpha$, удовлетворяющая на L асимптотической оценке

$$\begin{aligned} \ln|F(t)| &< -\lambda\pi \sin^{-2}(\rho\pi) \sin\left(k|t|^{-\alpha}\right)|t|^\rho - \lambda\pi \operatorname{Im}\left\{(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi)\left(\exp(-i\rho k|t|^{-\alpha}) - 1\right)t^\rho\right\} - \\ &- \operatorname{Re}\left\{(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi)t \int_L \frac{\left(\exp(-i\rho k|\tau|^{-\alpha}) - 1\right)d\tau}{\tau^{1-\rho}(\tau - t)}\right\} + \text{const}; \end{aligned}$$

4) если $0 < \alpha < \rho$ и $k > 0$, то задача неразрешима в классе B . Доказательство.

Нетрудно подсчитать, что в рассматриваемом случае

для угла $\beta(r)$, составленного касательной к L в точке $re^{ikr^{-\alpha}}$ и осью Ox , справедливо соотношение $\beta(r) = y'_x(r) \sim k(1 - \alpha)r^{-\alpha}$. Это означает, что L является контуром Ляпунова с показателем Гёльдера α .

Изучим поведение канонической функции

$$\begin{aligned} \ln X(z) &= \lambda(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi)z \int_L \frac{|t|^\rho dt}{t(t - z)} = z\lambda(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi) \left(\int_L \frac{dt}{t^{1-\rho}(t - z)} + \right. \\ &\left. + \int_L \frac{(e^{-i\rho \arg t} - 1)t^\rho dt}{t(t - z)} \right) \equiv \lambda(1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi)(I_1 + I_2)(z). \end{aligned}$$

Интеграл $I_1(z)$ точно вычисляется с помощью теоремы о вычетах [4, с. 245]

$$I_1(z) = -\pi \sin^{-1}(\rho\pi) e^{-i\rho\pi} z^\rho, \quad z \in C \setminus L,$$

где ветвь однозначной аналитической функции z^ρ фиксирована с помощью условия $\arg z = \pi$ при достаточно больших по модулю $z = x < 0$. Для исследования $I_2(z)$ представим ее в виде

$$I_2(z) = z \int_l \frac{(e^{-i \arg t} - 1)t^\rho dt}{t(t - z)} + z \int_{L \setminus l} \frac{(e^{-i\rho \arg t} - 1)t^\rho dt}{t(t - z)} \equiv (I_2^1 + I_2^2)(z),$$

где $l = L \cap \{|z| \leq 1\}$.

Тогда согласно [1, с. 18]

$$I_2^1(z) = O(1), \quad z \rightarrow \infty.$$

Для выяснения поведения $I_2^2(z)$ перейдем с помощью преобразований $\zeta = z^{-1}$ и $\tau = \zeta^{-1}$ к конечному контуру l_1 , касающемуся оси Ox в начале координат. Будем иметь

$$I_2^2(\zeta^{-1}) = \int_{l_1} \frac{(e^{i\rho \arg \tau} - 1) d\tau}{\tau^\rho (\tau - \zeta)}.$$

Так как l_1 есть контур Ляпунова с показателем Гёльдера α , то [7, с. 29] $\arg \tau \in H(\alpha)$. Применяя формулу Тейлора, получаем представление

$$\psi(\tau) = (e^{i\rho \arg \tau} - 1) \tau^{-\rho} = (e^{-i\rho k |\tau|^\alpha} - 1) \tau^{-\rho} = -i\rho k \tau^{-\rho} |\tau|^\alpha + o(|\tau|^{\alpha-\rho}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Отсюда следует, что при $\alpha > \rho$ будет $\psi(\tau) \in H$, $\psi(0) = 0$ и, следовательно, согласно [7, с. 53] $I_2^2(\zeta^{-1}) = O(1)$. Значит, в этом случае $I_2^2(z) = O(1)$.

Если $\alpha < \rho$, то перепишем $I_2^2(\zeta^{-1})$ в виде

$$I_2^2(\zeta^{-1}) = -i\rho k \int_{l_1} \frac{d\tau}{\tau^{\rho-\alpha} (\tau - \zeta)} - i\rho k \int_{l_1} \frac{(e^{-i\rho \arg \tau} - 1) d\tau}{\tau^{\rho-\alpha} (\tau - \zeta)} + o(|\zeta|^{\alpha-\rho}), \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Тогда, используя для функции $(e^{-i\rho \arg \tau} - 1)$ представление, аналогичное (11), и поведение интеграла типа Коши в окрестности конца контура интегрирования [7, с. 75], будем иметь

$$I_2^2(\zeta^{-1}) = \begin{cases} \frac{i\rho k \pi e^{-i(\rho-\alpha)\pi}}{\sin(\rho-\alpha)\pi} \zeta^{-(\rho-\alpha)} + o(\zeta^{\alpha-\rho}), & \alpha < \rho, \\ -ik\rho \ln \zeta + O(1), & \alpha = \rho. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$I_2^2(z) = \begin{cases} O(1), & \alpha > \rho, \\ ik\rho \ln z + O(1), & \alpha = \rho, \\ \frac{i\rho k \pi e^{-i(\rho-\alpha)\pi}}{\sin(\rho-\alpha)\pi} z^{\rho-\alpha} + o(z^{\rho-\alpha}), & \alpha < \rho. \end{cases}$$

Из полученных соотношений вытекает следующее представление канонической функции

$$X(z) = \exp\{-\pi \sin^{-1}(\rho\pi) \lambda (1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi) e^{-i\rho\pi} z^\rho + q(z)\},$$

где

$$q(z) = \begin{cases} O(1), & \alpha > \rho, \\ i\rho k \lambda (1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi) \ln z + O(1), & \alpha = \rho, \\ -i\rho k \lambda (1 + i \operatorname{ctg} \rho\pi) \sin^{-1}(\rho-\alpha) \pi e^{-i(\rho-\alpha)\pi} z^{\rho-\alpha} + o(z^{\rho-\alpha}), & \alpha < \rho. \end{cases}$$

Обозначив $z = re^{i\theta}$ и выразив из этих соотношений модуль канонической функции, получим

$$|X(re^{i\theta})| = \exp\{-\lambda \pi \sin^{-2}(\rho\pi) \sin \rho(2\pi - \theta) r^\rho + q_0(re^{i\theta})\},$$

$$q_0(re^{i\theta}) = \begin{cases} O(1), & \alpha > \rho, \\ -k\lambda\rho \operatorname{ctg}(\rho\pi) \ln r + O(1), & \alpha = \rho, \\ k\lambda\rho\pi \sin^{-1}(\rho\pi) \sin^{-1}(\rho - \alpha)\pi \cos((\rho - \alpha)\theta - (2\rho - \alpha)\pi) r^{\rho - \alpha} + o(r^{\rho - \alpha}), & \alpha < \rho. \end{cases}$$

Каноническая функция при $\theta \in [0, 2\pi)$ имеет экспоненциальное стремление к нулю порядка ρ , а $h_x^\rho(0) = 0$. Значит, разрешимость задачи зависит от поведения предельных значений $X(t)$ канонической функции на контуре L . Вычислив эти значения при $t = r \exp\{i(2\pi + kr^{-\alpha})\}$, получим

$$X^-(r) = \begin{cases} O(1), & \alpha > \rho, \\ -k\lambda\rho \operatorname{ctg}(\rho\pi) \ln r + O(1), & \alpha = \rho, \\ \exp\{k\lambda\pi \sin^{-2}(\rho\pi)(1 + \sin(\rho\pi) \cos(\alpha\pi) \sin^{-1}(\rho - \alpha)\pi) r^{\rho - \alpha} + o(r^{\rho - \alpha})\}, & \alpha < \rho. \end{cases}$$

Отсюда видно, что при $\alpha > \rho$ функция $X(t)$ отделена на L от нуля и бесконечности, и поэтому задача имеет единственное решение вида (6), где $F(z) \equiv \text{const}$.

Если $\alpha = \rho$, то $X(r) \sim Br^{-k\lambda\rho \operatorname{ctg}(\rho\pi)}$, $B \neq 0$, $r \rightarrow \infty$.

Значит, при $k > 0$ задача имеет ограниченные решения, а при $k < 0$ неразрешима.

Пусть $\alpha > \rho$. Тогда при $k > 0$ функция $X(t)$ не ограничена на L и задача не разрешима.

Если $k < 0$, то $X(t)$ имеет экспоненциальное убывание порядка $\rho - \alpha$, и поэтому существует бесконечное множество ограниченных решений. Общее решение задачи строится с помощью стандартных рассуждений. Теорема доказана.

Из теоремы 3 видно, что влияние свойств контура на разрешимость задачи в рассматриваемом случае более весомо, чем в задаче с бесконечным индексом [3]. При $\alpha < \rho$ картина разрешимости радикально меняется по сравнению со случаем $\alpha \geq \rho$, что отражено в заключениях 1)-3) теоремы.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Г о в о р о в Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М, 1986.
3. Алехно А. Г. // Изв. вузов. Математика. 1990. № 2. С. 29.
4. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин И. М. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1982.
5. Алехно А. Г. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1980. № 1. С. 51.
6. Т о л о ч к о М. Э. // Там же. 1972. № 5. С. 34.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М, 1968.

Поступила в редакцию 07.10.04.

Александр Григорьевич Алехно - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций.