

УДК 518. 61

А.И. ШВАКЕЛЬ

ЦИКЛИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОГОНКА ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

The paper presents the construction and justification of the universal cyclical orthogonal sweep method enabling one to extend the class of the solved net boundary problems with periodic solutions and to provide the stability of the method under the restrictions more weak than traditional.

1. Разностные схемы для вычисления периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а также приближенных решений уравнений с частными производными в цилиндрических и сферических координатах могут быть записаны в стандартной форме [1,2]:

$$a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1, \quad (1)$$

$$a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i=2, 3, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 = -f_N. \quad (3)$$

При этом для коэффициентов и правых частей уравнений обычно выполняются условия периодичности $y_{i+N}=y_i$, $a_{i+N}=a_i$, $b_{i+N}=b_i$, $c_{i+N}=c_i$, $f_{i+N}=f_i$. Эффективное численное решение сеточных граничных задач вида (1) - (3) возможно по методу циклической прогонки (МЦП) и сводится к последовательному решению сеточных задач Коши [1-4]:

$$\alpha_{i+1} = b_i / \varepsilon_i, \quad \beta_{i+1} = (f_i + a_i \beta_i) / \varepsilon_i, \quad \gamma_{i+1} = a_i \gamma_i / \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = c_i - a_i \alpha_i, \quad i = \overline{2, N},$$

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad i = \overline{N-2, 1},$$

$$\alpha_2 = b_1 / c_1, \quad \beta_2 = f_1 / c_1, \quad \gamma_2 = a_1 / c_1, \quad p_{N-1} = \beta_N, \quad q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_N,$$

$$y_N = (\beta_{N+1} + \alpha_{N+1} p_1) / (1 - \alpha_{N+1} q_1 - \gamma_{N+1}), \quad y_i = p_i + \alpha_N q_i, \quad i = \overline{2, N-1}.$$

Для устойчивости МЦП достаточно выполнения ограничений $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$, $|a_i| > 0$, $|b_i| > 0$, причем для некоторого i первое неравенство выполняется строго. Такие ограничения на параметры (1) - (3) являются довольно жесткими, что позволяет применять МЦП лишь для узкого класса задач с периодическими решениями [1, 2].

В этой связи возникает необходимость построения и обоснования новых вариантов МЦП [1-4] с целью улучшения его вычислительных свойств и существенного расширения класса решаемых задач. Разработанная автором более универсальная вычислительная схема метода циклической ортогональной прогонки (МЦОП), в отличие от МЦП, для обеспечения корректности и устойчивости не использует монотонность разностных операторов и последующее их обращение. Она основана на применении ортогональных преобразований, связывающих искомую сеточную функцию со вспомогательными функциями, которые определяются как решения сеточных задач Коши, свойства которых согласованы с искомыми значениями решения сеточной задачи, и содержит особый механизм циклического замыкания вычислений путем поочередного использования обоих граничных условий и установления рекурсионных связей между значениями сеточного решения. Переход от основных функций к вспомогательным и обратно в силу ортогональности преобразующей матрицы является всегда невырожденным и не требует выполнения дополнительных ограничений на параметры a_i , b_i , c_i , необходимых, например, в МЦП для существования (должно быть $|\varepsilon_i| = |c_i - a_i \alpha_i| > 0$) решения разностного аналога уравнения Риккати: $\alpha_{i+1} = b_i / \varepsilon_i$ [1, 2].

2. Рассмотрим систему двухточечных сеточных уравнений второго порядка общего вида:

$$z_{i+1} = A_i z_i + f_i, \quad i = \overline{2, N-1}, \quad (4)$$

$$A_1 z_2 + B_N z_N = \gamma_1, \quad (5)$$

$$A_N z_N + B_1 z_2 = \gamma_2, \quad (6)$$

где $A_i = (a_{ij}^{(i)})_{k,j=1}^2$, $z_i = (z_i^{(1)}, z_i^{(2)})^T$, $f_i = (f_i^{(1)}, f_i^{(2)})^T$, $i = \overline{2, N-1}$, $A_1 = (a_{11}^{(1)}, a_{12}^{(1)})$, $(a_{11}^{(1)})^2 + (a_{12}^{(1)})^2 > 0$, $B_1 = (\beta_1, 0)$, $\beta_1 \neq 0$, $A_N = (a_{11}^{(N)}, a_{12}^{(N)})$, $(a_{11}^{(N)})^2 + (a_{12}^{(N)})^2 > 0$, $B_N = (0, \beta_N)$, $\beta_N \neq 0$.

Эта система содержит $2N-2$ уравнения и столько же неизвестных $z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}$ $i = \overline{2, N-1}$, и, по сути, является сеточной граничной задачей с неразделенными двухточечными граничными условиями.

Заметим, что в задаче (4) - (6) содержится как частный случай задача (1) - (3), которая может быть получена из (4) - (6) с помощью замены переменных $z_i^{(1)} = y_{i-1}$, $z_i^{(2)} = y_i$. Тогда для $i+1$ будет $z_{i+1}^{(1)} = y_i = z_i^{(2)}$, $z_{i+1}^{(2)} = y_{i+1}$, и, если $b_i \neq 0$, $i = 2, N-1$, имеют место следующие соответствия между коэффициентами задач (4) - (6) и (1) - (3): $a_{11}^{(i)} = 0$, $a_{12}^{(i)} = 1$, $a_{21}^{(i)} = -a_i/b_i$, $a_{22}^{(i)} = c_i/b_i$, $f_i^{(1)} = 0$, $f_i^{(2)} = -f_i/b_i$, $a_{11}^{(i)} = -c_1$, $a_{12}^{(i)} = b_1$, $a_{11}^{(N)} = a_N$, $a_{12}^{(N)} = -c_N$, $\beta_N = a_1$, $\beta_1 = b_N$, $\gamma_1 = -f_1$, $\gamma_2 = -f_N$.

3. В предлагаемой схеме МЦОП для решения задачи (4) - (6) вводятся сеточная функция α_i и вспомогательные сеточные функции $s_i^{(1)}$, $s_i^{(2)}$, связанные с искомыми значениями $z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}$ формулой [5]:

$$s_i = U_i z_i, \quad (7)$$

где $s_i = (s_i^{(1)}, s_i^{(2)})^T$, $U_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix}$ - ортогональная матрица перехода от переменных $s_i^{(1)}$, $s_i^{(2)}$ к переменным $z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}$, $U_i^T U_i \equiv E$. При любых α_i в силу ортогональности U_i из (7) получим:

$$z_i = U_i^T s_i. \quad (8)$$

Запишем систему сеточных уравнений для s_i . Для $i+1$ в (7) $s_{i+1} = U_{i+1} z_{i+1}$ заменим z_{i+1} по (4), а затем z_i - по (8), получим:

$$s_{i+1} = \Psi_i s_i + p_i, \quad i = 2, N-1, \quad (9)$$

где

$$\Psi_i = U_{i+1} A_i U_i^T, \quad p_i = U_{i+1} f_i. \quad (10)$$

Желая выполнить разделение переменных в (9) так, чтобы уравнение для $s_i^{(1)}$ содержало в правой части только значения этой функции и $p_i^{(1)}$, приведем матрицу Ψ_i к виду нижней треугольной, положив $\Psi_{12}^{(i)} = 0$. Учитывая представление $\Psi_{12}^{(i)}$ из (10), выполнение этого условия можно обеспечить за счет выбора $\cos \alpha_{i+1}$ и $\sin \alpha_{i+1}$

Обозначим: $t_1^{(i)} = a_{11}^{(i)} \sin \alpha_i - a_{12}^{(i)} \cos \alpha_i$, $t_2^{(i)} = a_{22}^{(i)} \cos \alpha_i - a_{21}^{(i)} \sin \alpha_i$, $m_i = \left[(t_1^{(i)})^2 + (t_2^{(i)})^2 \right]^{1/2}$, $\pi_i = 1/m_i$, если $m_i > 0$, $i = 2, N-1$.

Лемма 1. Если $\det A_i \neq 0$, $i = 2, N-1$, то $m_i > 0$, а при

$$\cos \alpha_{i+1} = \pi_i t_2^{(i)}, \quad \sin \alpha_{i+1} = \pi_i t_1^{(i)} \quad (11)$$

матрица Ψ_i имеет вид нижней треугольной с $\Psi_{22}^{(i)} = m_i > 0$

Доказательство. От противного. Предположим, что $\det A_i \neq 0$, а $m_i = 0$. Такое возможно лишь в случае $t_1^{(i)} = t_2^{(i)} = 0$. Поскольку $\det A_i = a_{11}^{(i)} a_{22}^{(i)} - a_{21}^{(i)} a_{12}^{(i)} \neq 0$, то для того, чтобы $t_1^{(i)} = t_2^{(i)} = 0$, необходимо выполнение равенств $\sin \alpha_i = 0$, $\cos \alpha_i = 0$, что невозможно. Значит, при $\det A_i \neq 0$ всегда выполняется условие $m_i > 0$. Далее подставим $\cos \alpha_{i+1}$, $\sin \alpha_{i+1}$ по (11) в (10), для $\Psi_{12}^{(i)}$ и $\Psi_{22}^{(i)}$ получим $\Psi_{12}^{(i)} = 0$, $\Psi_{22}^{(i)} = m_i > 0$. Лемма доказана.

Замечание 1. Если при некотором i условие $\det A_i \neq 0$ не выполняется и $m_i = 0$, то $\Psi_{12}^{(i)} = 0$, $\Psi_{22}^{(i)} = 0$. В этом случае матрица Ψ_i уже имеет вид нижней треугольной, переменные $s_{i+1}^{(1)}$ и $s_{i+1}^{(2)}$ в рекуррентной формуле (9) выражаются только через $s_i^{(1)}$, а выбор значений $\cos \alpha_{i+1}$ и $\sin \alpha_{i+1}$ может быть осуществлен относительно произвольно. Например, можно взять

$$\cos \alpha_{i+1} = \cos \alpha_i, \quad \sin \alpha_{i+1} = \sin \alpha_i. \quad (12)$$

Замечание 2. Для задачи (1)-(3) при упомянутых ранее ограничениях $|a_i| > 0$, $|b_i| > 0$ условие $\det A_i \neq 0$ выполняется всегда, так как в этом случае $\det A_i = a_i/b_i$.

Таким образом, после приведения матрицы Ψ_i к виду нижней треугольной будет

$$\begin{cases} s_{i+1}^{(1)} = \psi_{11}^{(i)} s_i^{(1)} + p_i^{(1)}, \\ s_{i+1}^{(2)} = \psi_{21}^{(i)} s_i^{(1)} + \psi_{22}^{(i)} s_i^{(2)} + p_i^{(2)}, \end{cases} \quad i = \overline{2, N-1}.$$

Далее определим начальные значения для сеточных функций $\sin \alpha_i$, $\cos \alpha_i$ и $s_i^{(1)}$. Нормировав (5) и обозначив $\lambda_1 = a_{11}^{(1)}/m_1$, $\lambda_2 = a_{12}^{(1)}/m_1$, $\pi_1 = 1/m_1$, $m_1 = [(a_{11}^{(1)})^2 + (a_{12}^{(1)})^2]^{1/2} > 0$, получим

$$\lambda_1 z_2^{(1)} + \lambda_2 z_2^{(2)} = \gamma_1 \pi_1 - \beta_N \pi_1 z_N^{(2)}. \quad (13)$$

В то же время из (7) для $i=2$ имеем:

$$s_2^{(1)} = z_2^{(1)} \cos \alpha_2 + z_2^{(2)} \sin \alpha_2. \quad (14)$$

Сопоставляя (13) и (14), получим $s_2^{(1)} = \gamma_1 \pi_1 - \beta_N \pi_1 z_N^{(2)}$

$$\cos \alpha_2 = \lambda_1, \quad \sin \alpha_2 = \lambda_2. \quad (15)$$

Тогда для $i = \overline{2, N}$ значения $\cos \alpha_i$, $\sin \alpha_i$ могут быть вычислены по (11), (12), (15), а сеточная функция $s_i^{(1)}$, формально говоря, найдена как решение сеточной задачи Коши, где $z_N^{(2)}$ пока неизвестно:

$$\begin{cases} s_{i+1}^{(1)} = \psi_{11}^{(i)} s_i^{(1)} + p_i^{(1)}, \\ s_2^{(1)} = \gamma_1 \pi_1 - \beta_N \pi_1 z_N^{(2)}, \end{cases} \quad i = \overline{2, N-1}. \quad (16)$$

4. Представим $s_i^{(1)}$ в виде:

$$s_i^{(1)} = h_i^{(1)} + c_0 g_i^{(1)}, \quad i = \overline{2, N}, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

где

$$\begin{cases} h_{i+1}^{(1)} = \psi_{11}^{(i)} h_i^{(1)} + p_i^{(1)}, \\ h_2^{(1)} = \gamma_1 \pi_1, \end{cases} \quad \begin{cases} g_{i+1}^{(1)} = \psi_{11}^{(i)} g_i^{(1)}, \\ g_2^{(1)} = 1, \end{cases} \quad i = \overline{2, N-1}. \quad (18)$$

Исходя из (17), (18), получим, что $c_0 = -\beta_N \pi_1 z_N^{(2)}$

При $i=N$ из (17) имеем $s_N^{(1)} = h_N^{(1)} - \beta_N \pi_1 g_N^{(1)} z_N^{(2)}$, а из (7) $s_N^{(1)} = z_N^{(1)} \cos \alpha_N + z_N^{(2)} \sin \alpha_N$, учитывая это и правое граничное условие (6), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos \alpha_N z_N^{(1)} + (\sin \alpha_N + \beta_N \pi_1 g_N^{(1)}) z_N^{(2)} = h_N^{(1)}, \\ a_{11}^{(N)} z_N^{(1)} + a_{12}^{(N)} z_N^{(2)} = \gamma_2 - \beta_1 z_2^{(1)}. \end{cases} \quad (19)$$

Предположим, что определитель системы (19) отличен от нуля:

$$\Delta_N = \det \begin{vmatrix} \cos \alpha_N & \sin \alpha_N + \beta_N \pi_1 g_N^{(1)} \\ a_{11}^{(N)} & a_{12}^{(N)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда

$$z_N^{(1)} = \sigma_{12} z_2^{(1)} + \sigma_{11}, \quad z_N^{(2)} = \sigma_{22} z_2^{(1)} + \sigma_{21}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \Delta_N^{-1} [a_{12}^{(N)} h_N^{(1)} - \gamma_2 (\sin \alpha_N + \beta_N \pi_1 g_N^{(1)})], \quad \sigma_{22} = -\Delta_N^{-1} \beta_1 \cos \alpha_N, \\ \sigma_{12} &= \Delta_N^{-1} [\beta_1 (\sin \alpha_N + \beta_N \pi_1 g_N^{(1)})], \quad \sigma_{21} = \Delta_N^{-1} [\gamma_2 \cos \alpha_N - a_{11}^{(N)} h_N^{(1)}]. \end{aligned} \quad (21)$$

5. Теперь вернемся к рекуррентному соотношению для переменной $s_i^{(2)}$ и определим $s_N^{(2)}$ через $z_2^{(1)}$. Учитывая (7) при $i=N$ и подставляя $z_N^{(1)}$, $z_N^{(2)}$ из (20), пред-

ставим $s_N^{(2)}$ в виде: $s_N^{(2)} = \sigma_2 z_2^{(1)} + \sigma_1$, где $\sigma_1 = \sigma_{21} \cos \alpha_N - \sigma_{11} \sin \alpha_N$, $\sigma_2 = \sigma_{22} \cos \alpha_N - \sigma_{12} \sin \alpha_N$. Тогда окончательно сеточная задача Коши для $s_i^{(2)}$ примет вид:

$$\begin{cases} s_i^{(2)} = s_{i+1}^{(2)} / \psi_{22}^{(i)} - \psi_{21}^{(i)} s_i^{(1)} / \psi_{22}^{(i)} - p_i^{(2)} / \psi_{22}^{(i)}, & i = \overline{N-1, 2}. \\ s_N^{(2)} = \sigma_2 z_2^{(1)} + \sigma_1, \end{cases} \quad (22)$$

Для нахождения $z_2^{(2)}$ воспользуемся (5): $a_{11}^{(1)} z_2^{(1)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(2)} + \beta_N z_N^{(2)} = \gamma_1$ и заменим здесь $z_N^{(2)}$ по (20), $z_2^{(2)}$ по (8), а затем $\cos \alpha_2$, $\sin \alpha_2$ по (15). Так как по своему смыслу $s_2^{(1)} = s_2^{(1)}(z_2^{(1)})$ и $s_2^{(2)} = s_2^{(2)}(z_2^{(1)})$, получим:

$$\Phi(z_2^{(1)}) \equiv a_{11}^{(1)} z_2^{(1)} + a_{12}^{(1)} (\lambda_2 s_2^{(1)} + \lambda_1 s_2^{(2)}) + \beta_N (\sigma_{22} z_2^{(1)} + \sigma_{21}) - \gamma_1 = 0. \quad (23)$$

Действительно, из (16) и (20) имеем:

$$s_2^{(1)} = s_2^{(1)}(z_2^{(1)}) = (\gamma_1 \pi_1 - \beta_N \pi_1 \sigma_{21}) - \beta_N \pi_1 \sigma_{22} z_2^{(1)}, \quad (24)$$

а из (22) следует, что $s_2^{(2)}$ есть также функция от $z_2^{(1)}$ и верна

Лемма 2. Пусть функция $s_i^{(2)}$ определяется по формуле (7) и для нее имеет место задача Коши (22), тогда

$$s_2^{(2)} = s_2^{(2)}(z_2^{(1)}) = \Omega_N z_2^{(1)} + Q_N, \quad (25)$$

где $\Omega_N = \sigma_2 R_2 \cdot R_3 \cdot \dots \cdot R_{N-1}$, $Q_N = \sum_{i=N-1}^2 \prod_{k=2}^{i-1} R_k t_i + \sigma_1 R_2 \cdot R_3 \cdot \dots \cdot R_{N-1}$, $R_i = 1/\psi_{22}^{(i)}$, $t_i = -\psi_{21}^{(i)} s_i^{(1)} / \psi_{22}^{(i)} - p_i^{(2)} / \psi_{22}^{(i)}$, $i = \overline{N-1, 2}$.

Следует отметить, что соотношение (25) используется лишь для дальнейшего обоснования МЦОП и реально находить значения Ω_N , Q_N не требуется, само же $s_2^{(2)}$ вычисляется как конечное значение решения сеточной задачи Коши (22).

Используя выражения (24) и (25), запишем (23) в виде $\Phi(x)=0$, где $\Phi(x)$ - линейная функция переменной x :

$$\begin{aligned} \Phi(x) \equiv & (a_{11}^{(1)} + \beta_N \sigma_{22} - a_{12}^{(1)} \beta_N \pi_1 \sigma_{22} \lambda_2 + a_{12}^{(1)} \lambda_1 \Omega_N) x + \\ & + \beta_N \sigma_{21} + a_{12}^{(1)} \lambda_1 Q_N + a_{12}^{(1)} \gamma_1 \pi_1 \lambda_2 - a_{12}^{(1)} \beta_N \pi_1 \sigma_{21} \lambda_2 - \gamma_1. \end{aligned}$$

Поскольку $\Phi(x)=ax+b$, $\Phi(0)=b$, $\Phi(1)=a+b$, верна запись $\Phi(x)=[\Phi(1)-\Phi(0)]x+\Phi(1)$, откуда, если $\Phi_{01}=\Phi(1)-\Phi(0) \neq 0$, получим:

$$z_2^{(1)} = -\Phi(0)/\Phi_{01}. \quad (26)$$

6. Приведем окончательную вычислительную схему МЦОП: 1) находим $\cos \alpha_2$, $\sin \alpha_2$ по (15) и вычисляем по (11) или (12) $\cos \alpha_i$, $\sin \alpha_i$, $i = \overline{3, N}$; 2) последовательно находим $\psi_{11}^{(i)}$, $\psi_{21}^{(i)}$, $\psi_{22}^{(i)}$, $p_i^{(i)}$, $i = \overline{2, N}$, используя (10), затем $h_i^{(1)}$, $g_i^{(1)}$, $i = \overline{2, N}$, по (18) и σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{22} по (21); 3) для значений $z_2^{(1)}=0$, $z_2^{(1)}=1$ по (22) вычисляем $s_2^{(2)}(0)$, $s_2^{(2)}(1)$, а по (24) находим $s_2^{(1)}(0)$, $s_2^{(1)}(1)$; 4) вычисляем значения линейной функции $\Phi(0)$, $\Phi(1)$ по (23) и определяем $z_2^{(1)}$ по (26); 5) зная $z_2^{(1)}$, $s_i^{(2)}$ вычисляем по (22), а $s_i^{(1)}$ - по (16); 6) искомые переменные $z_i^{(1)}$, $z_i^{(2)}$ находим по (8).

Теорема 1. Пусть $\sin \alpha_i$, $\cos \alpha_i$, $s_i^{(1)}$ и $s_i^{(2)}$ определяются по формулам (15), (11) и (16), (22). Если выполняются условия $\det A_i \neq 0$, $i = \overline{2, N-1}$, $\Delta_N \neq 0$ и $\Phi_{01} \neq 0$, то искомое решение граничной задачи (4) - (6) в МЦОП вычисляется по формуле (8).

Доказательство. Условие $\det A_i \neq 0$ обеспечивает корректность формулы (11) и отличие от нуля $\psi_{22}^{(i)}$ в (22). Условие $\Delta_N \neq 0$ обеспечивает корректность фор-

мул (20) - (22), а неравенство $\varphi_{01} \neq 0$ гарантирует отсутствие особенностей при вычислении $z_2^{(1)}$ по (26). Покажем, что $z_i^{(1)}, \alpha_i^{(2)}$, определенные по (8), удовлетворяют (4). Для этого рассмотрим значения $z_{i+1}^{(1)} = s_{i+1}^{(1)} \cos \alpha_{i+1} - s_{i+1}^{(2)} \sin \alpha_{i+1}$, $z_{i+1}^{(2)} = s_{i+1}^{(1)} \sin \alpha_{i+1} + s_{i+1}^{(2)} \cos \alpha_{i+1}$. Заменим здесь в правых частях $s_{i+1}^{(1)}, s_{i+1}^{(2)}$ по (16), (22), $\sin \alpha_i, \cos \alpha_i$ - по (11), а также, используя (10), получим:

$$z_{i+1}^{(1)} = s_i^{(1)} (a_{11}^{(i)} \cos \alpha_i + a_{12}^{(i)} \sin \alpha_i) + s_i^{(2)} (a_{12}^{(i)} \cos \alpha_i - a_{11}^{(i)} \sin \alpha_i) + f_i^{(1)}, \quad (27)$$

$$z_{i+1}^{(2)} = s_i^{(1)} (a_{21}^{(i)} \cos \alpha_i + a_{22}^{(i)} \sin \alpha_i) + s_i^{(2)} (a_{22}^{(i)} \cos \alpha_i - a_{21}^{(i)} \sin \alpha_i) + f_i^{(2)}. \quad (28)$$

Далее для $z_{i+1}^{(1)}, z_{i+1}^{(2)}$ из (4) заменим в правых частях $z_i^{(1)}, z_i^{(2)}$ по (8) и соберем подобные при $s_i^{(1)}, s_i^{(2)}$, полученные выражения в точности совпадут с (27), (28). Найденные по (8) $z_i^{(1)}, z_i^{(2)}$ удовлетворяют граничным условиям (5), (6), поскольку для замыкания вычислений в МЦОП гарантировалось их выполнение. Теорема доказана.

Замечание 3. МЦОП обладает устойчивостью в малом [5, 6], суть которой состоит в следующем. Пусть исходная задача (4) - (6) устойчива относительно малых изменений величин, определяющих ее, и $\tilde{z}_i^{(1)}, \tilde{z}_i^{(2)}$ - приближенные значения решения, полученные в результате численной реализации МЦОП. Тогда $\tilde{z}_i^{(1)}, \tilde{z}_i^{(2)}$ будут удовлетворять сеточной задаче вида (4) - (6), параметры которой будут мало отличаться от параметров исходной задачи. Это вытекает из того, что переход от переменных $\tilde{z}_i^{(1)}, \tilde{z}_i^{(2)}$ к $\tilde{s}_i^{(1)}, \tilde{s}_i^{(2)}$ и обратно в силу ортогональности преобразующей матрицы всегда невырожден и верно тождество $(s_i^{(1)})^2 + (s_i^{(2)})^2 \equiv (z_i^{(1)})^2 + (z_i^{(2)})^2$. Поскольку при вычислении $s_i^{(1)}, s_i^{(2)}$ отсутствуют особенности (деление на ноль) и эти функции имеют тот же порядок роста, что и искомое решение $z_i^{(1)}, z_i^{(2)}$, малые изменения $s_i^{(1)}, s_i^{(2)}$ влекут за собой малые изменения параметров задачи (4) - (6). Таким образом, из устойчивости исходной задачи (4) - (6) относительно малых изменений величин, определяющих ее, следует устойчивость в малом метода циклической ортогональной прогонки.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1989.
2. Самарский А.А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
3. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8. № 3. С. 679.
4. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. // Там же. 1969. Т. 9. № 1. С. 211.
5. Монастырный П.И. // Там же. 1967. Т. 7. № 2. С. 284.
6. Кремень Ю.А., Монастырный П.И. // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. №7. С. 589.

Поступила в редакцию 12.01.2004.

Анна Ивановна Швакель - аспирант кафедры численных методов и программирования. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор П.И. Монастырный.