*УДК 539.3*

*Ю.Е. НАГОРНЫЙ*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ТРЕЩИН В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛАХ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ НОМЕРОВ МКЭ

A new algorithm for the formation of a stiffness matrix and data input-output system based on the representation of the numbers of elements and degrees of freedom as integer coordinate functions has been proposed. The *Mathematica* package program has been written to compute a tensely-deformed state for axially symmetric elastic bodies with systems of linear circular cracks representing the infinitely thin continuity disturbances. The numerical experiments have been performed to calculate the stress fields for different load types and various combinations of the cracks.

Формирование матриц и векторов, используемых в методе конечных элементов, а также ввод-вывод данных предполагает знание зависимости номера глобальной степени свободы системы от номера элемента и номера локальной степени свободы. В работе [1] такая зависимость записана в параметрической форме для регулярных прямоугольных сеток, состоящих из прямоугольных элементов. Параметрами являются координаты узлов. Рис. 1 *а* и следующее выражение поясняют этот подход:

$$I_e = \mathbf{a}_e^T \cdot \mathbf{b}_e + 1 = [LM]\begin{pmatrix} 1 \\ L_0 \end{pmatrix} + 1,$$

$$L = \overline{0,\ L_0 - 1},\ M = \overline{0,\ M_0 - 1},$$

здесь $I_e$ - номер элемента, $\mathbf{a}_e$ - вектор координат узла элемента, ближайшего к началу отсчета, $\mathbf{b}_e$ - вектор шагов нумерации.

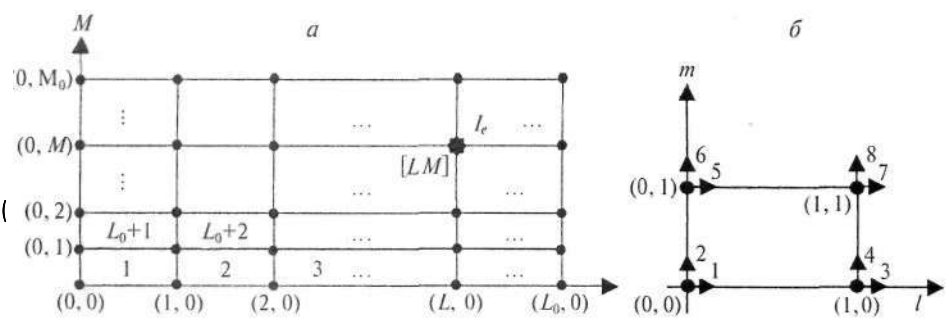


Рис. 1. Регулярная прямоугольная сетка, состоящая из прямоугольных элементов – *а*; элемент с четырьмя узлами – *б*

Подобным образом рассчитываются номера степеней свободы элемента с четырьмя узлами (рис. 1 б):

$$I_u = s_0 \cdot \mathbf{a}_u^T \cdot \mathbf{b}_u + s = 2[lm]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s,\quad l = \overline{0,\ 1},\ m = \overline{0,\ 1},\ s = \overline{1,\ 2},$$

где $\mathbf{a}_u$ - вектор координат узла элемента, $\mathbf{b}_u$ - вектор шагов нумерации, $s_0$ – число степеней свободы и $s$ - номер степени свободы в узле.

Для номера степени свободы системы, если ее узлы пронумерованы, как и элементы, получается зависимость:

$$I_s = s_0\ \left(\mathbf{a}_e^T \cdot \mathbf{b}_{se} + \mathbf{a}_u^T \mathbf{b}_{su} + c\right) + s = 2\left(\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ L_0 + 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ L_0 + 1 \end{bmatrix}\right) + s. \quad (1)$$

$$L = \overline{0,\ L_0 - 1},\ M = \overline{0,\ M_0 - 1},\ l = \overline{0,\ 1},\ m = \overline{0,\ 1},\ s = \overline{1,\ 2}$$

Здесь постоянная с задает начало отсчета.

На рис. 2 *а* изображена сетка, разбивающая прямоугольную область на одинаковые четырехузловые элементы. Для простоты и наглядности взято разбиение 4×6 КЭ. Будем рассматривать трещину как бесконечно тонкий промежуток между элементами, которые хотя и прилегают друг к другу, но не связаны между собой. На рисунке промежуток показан вертикальной линией, его концы лежат в узлах 8 и 31. В этом случае степени свободы совпадающих узлов, находящихся на разных берегах трещины, будут иметь различные номера. В то же время номера элементов и их степеней свободы не поменяются, так как количество элементов, расположение относительно друг друга и они сами останутся прежними.

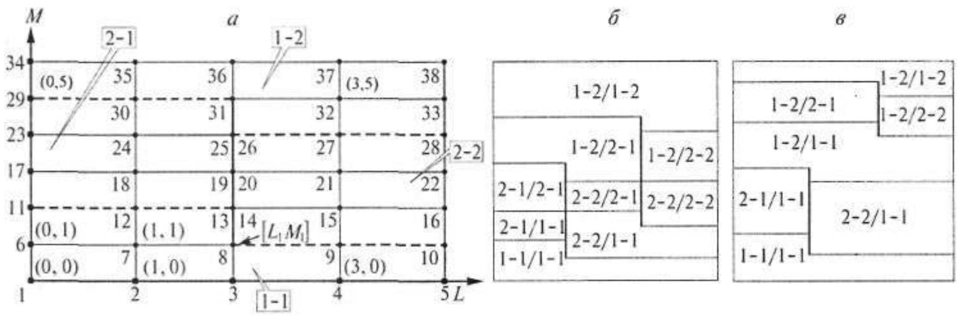

Рис. 2. Сетка из одинаковых четырехузловых элементов, содержащая вертикальную трещину – *а*; тело с двумя вертикальными трещинами, перекрывающими друг друга в горизонтальном направлении – *б*; тело с двумя вертикальными трещинами, лежащими в разных слоях – *в*

Трещину будем задавать при помощи трех параметров: двух координат ее начала $[L_1M_1]$ и длины $T_1$, выраженной в элементах. В качестве начала трещины выберем ее нижний узел.

Из-за возникшей неоднородности образуется несколько подобластей, в каждой из которых будет действовать своя формула определения номера степени свободы системы. Их можно объединить в группы по признаку сохранения вида векторов $\mathbf{b}_{se}$ и $\mathbf{b}_{su}$ (см. рис. *2 а)*.

В первую группу включим подобласти 1-1 и 1-2. В них все векторы шагов нумерации останутся такими же, как и для случая сплошного тела. Подобласть 1-1 состоит из элементов, расположенных ниже трещины, где $L=\overline{0,\ L_0-1}$, $M=\overline{0,\ M_1-1}$, и элементов слева от нее в первом горизонтальном слое, примыкающем к ее началу, где $L=\overline{0,\ L_1-1}$, $M=M_1$. Таким образом:

$$I_s=2\left([LM]\begin{bmatrix}1\\ L_0+1\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\ L_0+1\end{bmatrix}\right)+s. \qquad (2)$$

$$\left(L=\overline{0,\ L_0-1},\ M=\overline{0,\ M_1-1}\right)\cup\left(L=\overline{0,\ L_1-1},\ M=M_1\right),\ \ l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ 2}$$

Подобласть 1-2 содержит элементы, лежащие в последнем слое справа от верхнего края трещины и выше нее. Естественно, здесь будут другими пределы изменения параметров *LM.* Из-за дополнительных степеней свободы, появляющихся в узлах на берегах трещины, изменится аддитивная постоянная, определяющая начало отсчета. Она увеличится на число узлов, равное длине трещины без единицы. Итак, получаем:

$$I_s=2\left([LM]\begin{bmatrix}1\\ L_0+1\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\ L_0+1\end{bmatrix}+T_1-1\right)+s.$$

$$\left(L=\overline{0,\ L_0-1},\ M=\overline{M_1+T_1,\ M_0-1}\right)\cup\left(L=\overline{L_1,\ L_0-1},\ M=M_1+T_1-1\right),$$

$$l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ 2}.$$

Оставшиеся элементы, лежащие слева и справа от трещины, образуют еще две подобласти, которые обозначим 2-1 и 2-2 соответственно. В обеих разность номеров ближайших узлов, лежащих на одной вертикали, будет $L_0+2$, а не $L_0+1$, как в случае сплошного тела, так как появился дополнительный узел (см. рис. 2 *а)*. Эта разность является второй компонентой векторов шагов нумерации. Значит, для подобласти 2-1 имеем:

$$I_s=2\left([LM]\begin{bmatrix}1\\ L_0+2\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\ L_0+2\end{bmatrix}-M_1-1\right)+s.$$

$$L=\overline{0,\ L_1-1},\ M=\overline{M_1+1,\ M_1+T_1-1},\ l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ 2}.$$

Поясним подробнее, как получается значение постоянной $c=-M_1-1$. Так как одна и та же степень свободы может принадлежать различным элементам, то ее номер можно вычислить несколькими способами. Рассмотрим узел, лежащий у левого края сетки на границе подобластей 1-1 и 2-1. Как узел элемента из подобласти 1-1 он имеет следующие параметры: $L=0$, $M=M_1$, $l=0$, $m=1$. Подставив их в формулу (1), мы получим номера степеней свободы этого узла. Этот же узел, отнесенный к подобласти 2-1, будет иметь уже другие параметры: $L=0$, $M=M_1+1$, $l=0$, $m=0$. При подстановке их в формулу для этой подобласти опять получим те же номера. Следовательно, мы можем приравнять два выражения:

$$2\left([0\ M_1+1]\begin{bmatrix}1\\ L_0+2\end{bmatrix}+[0\ 0]\begin{bmatrix}1\\ L_0+2\end{bmatrix}+c\right)+s=2\left([0\ M_1]\begin{bmatrix}1\\ L_0+1\end{bmatrix}+[0\ 1]\begin{bmatrix}1\\ L_0+1\end{bmatrix}\right)+s.$$

Отсюда $c=-M_1-1$.

Аналогично для подобласти 2-2 получается:

$$I_s=2\left([LM]\begin{bmatrix}1\\ L_0+2\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\ L_0+2\end{bmatrix}-M_1\right)+s.$$

$$L=\overline{L_1,\ L_0-1},\ \ M=\overline{M_1,\ M_1+T_1-2},\quad l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ 2}$$

Рассмотрим тело с двумя вертикальными трещинами, перекрывающими друг друга в горизонтальном направлении (см. рис. 2 *б)*. Каждая из них по отдельности разбивает область на четыре подобласти. Подобласти, обусловленные разными трещинами, пересекаются между собой. Пересечения образуют новые подобласти, которые будем обозначать двумя парами чисел. Первая пара относится к первой трещине, а вторая - ко второй.

Как и ранее, выделим группы подобластей с одинаковыми векторами шагов нумерации. Первую группу образуют подобласти 1-1/1-1 и 1-2/1-2. В них векторы $\mathbf{b}_{se}$ и $\mathbf{b}_{su}$ такие же, как и в сплошном теле. Причем 1-1/1-1 совпадает с 1-1 из предыдущего случая, поэтому остается справедливой формула (2). Что касается подобласти 1-2/1-2, то для нее

$$\left(L=\overline{L_2,\ L_0-1},\ M=M_2+T_2-1\right)\cup\left(L=\overline{0,\ L_0-1},\ M=\overline{M_2+T_2,\ M_0-1}\right),\quad l=\overline{0,\ 1},$$

$$m=\overline{0,\ 1},\ \ s=\overline{1,\ 2}\ \text{ и } c=T_1+T_2-1,$$

так как удвоение номеров происходит на двух трещинах. Естественно, в выражения для $LM$ входят величины с индексом 2, характеризующие вторую трещину.

Вторая группа состоит из подобластей 2-1/1-1, 2-2/1-1, 1-2/2-1, 1-2/2-2. Здесь вторые компоненты векторов $\mathbf{b}_{se}$ и $\mathbf{b}_{su}$ равны $(L_0+1)+1=L_0+2$ из-за удвоения номеров либо на первой трещине (2-1/1-1, 2-2/1-1), либо на второй (1-2/2-1, 1-2/2-2). Начала отсчета $c$ в 2-1/1-1 и 2-2/1-1 равны, как и ранее, $-M_1-1$, $-M_1$ соответственно. В двух оставшихся подобластях сказывается влияние двух трещин. Поэтому $c=-M_2+T_1-1$ в 1-2/2-1 и $c=-M_2+T_1$ в 1-2/2-2.

В последнюю группу входят подобласти 2-2/2-1, 2-2/2-2 и 2-1/2-1. Вторые компоненты векторов $\mathbf{b}_{se}$ и $\mathbf{b}_{su}$ из-за удвоения номеров на обеих трещинах оказываются равными $(L_0+1)+1+1=L_0+3$. Окончательные формулы имеют вид:

$$2\text{-}1/2\text{-}1: I_s = s_0\left([LM]\begin{bmatrix}1\\L_0+3\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\L_0+3\end{bmatrix}-M_1-M_2-2\right)+s,$$

$$L=\overline{0,\ L_1-1},\ M=\overline{M_2+1,\ M_1+T_1-1},\ l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ 2}$$

$$2\text{-}2/2\text{-}1: I_s = s_0\left([LM]\begin{bmatrix}1\\L_0+3\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\L_0+3\end{bmatrix}-M_1-M_2-1\right)+s,$$

$$L=\overline{L_1,\ L_2-1},\ M=\overline{M_2+1,\ M_1+T_1-2},\ l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ s_0}$$

$$2\text{-}2/2\text{-}2: I_s = s_0\left([LM]\begin{bmatrix}1\\L_0+3\end{bmatrix}+[lm]\begin{bmatrix}1\\L_0+3\end{bmatrix}-M_1-M_2\right)+s.$$

$$L=\overline{L_2,\ L_0-1},\ M=\overline{M_2,\ M_1+T_1-2},\ l=\overline{0,\ 1},\ m=\overline{0,\ 1},\ s=\overline{1,\ s_0}$$

Во всех формулах параметры по-прежнему изменяются так, чтобы перебрать все степени свободы в соответствующих подобластях.

Рассмотрим другой возможный случай, когда трещины не пересекаются, т. е. когда верхний край первой из них ниже начала второй (см. рис. 2 *в)*. Подобласти теперь объединяются в две группы: первую образуют подобласти 1-1/1-1, 1-2/1-1, 1-2/1-2, где векторы $\mathbf{b}_{se}$ и $\mathbf{b}_{su}$ такие же, как в сплошном теле; вторую - 2-1/1-1, 2-2/1-1, 1-2/2-1, 1-2/2-2, где шаги нумерации по вертикали равны.

Этот подход можно применять и в случае, когда в теле имеется более двух трещин. При этом увеличивается только число групп подобластей.

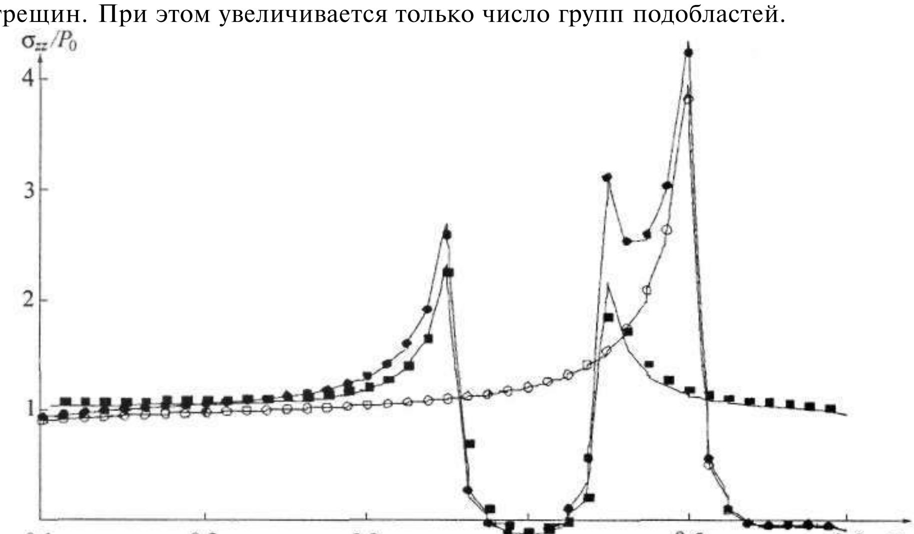


Рис. 3. Графики распределения осевых напряжений:
*1* – тело с внутренней трещиной; *2* – тело с трещиной, выходящей на поверхность; *3* – тело, содержащее обе трещины

Описанный алгоритм формирования матрицы жесткости системы использован при написании программы расчета НДС полого цилиндрического упругого тела с системой вертикальных и горизонтальных кольцевых трещин. Расчеты проводились с использованием пакета «Mathematica». На рис. 3 приведены графики распределения осевых напряжений в зависимости от расстояния от оси для случая одиночной трещины внутри тела, одиночной трещины, выходящей на поверхность, и случая, когда в теле присутствуют обе трещины. Тело подвергается растяжению вдоль оси, с плотностью поверхностной нагрузки $p_0$, внутренний радиус цилиндра $R_1$=0,1 см, внешний радиус $R_2$=0,6 см. В качестве материала использовалась сталь с модулем Юнга $E$=210 ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu$=0,26.

1. Репченков В.И., Нагорный Ю.Е., Репченкова Е.В. Векторная параметризация номеров степеней свободы и номеров элементов в МКЭ. Мн., 2003. 13 с. Деп. в БелИСА 14.06.2003 г., № 200344.

Поступила в редакцию 20.02.2004.

***Юрий Евгеньевич Нагорный*** - аспирант кафедры теоретической и прикладной механики. Научный руководитель - кандидат физико-математических наук, доцент В.И. Репченков.