УДК 539.3

Д.Г. МЕДВЕДЕВ, С.М. БОСЯКОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

Formulas for the components of a discontinuity vector are deduced. Based on these formulas, the influence exerted by the winding angle of a fiberglass string on the angle of inclination of the discontinuity vector to the normal to the characteristic surface is investigated. The distributions of the stresses arising at propagation of quasilongitudinal and quasitransvesal waves in single-layered anisotropic fiberglass are obtained.

Данная работа продолжает исследования распространения колебаний в конструкционных стеклопластиках, начатые в [1]. Ниже приведены результаты расчета напряжений, возникающих при распространении квазипродольной и квазипоперечной упругих волн в стекловолокнистых материалах в условиях плоской деформации. Соответствующая система уравнений имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} &C_1\partial_1^2u_1 + 2C_3\partial_1\partial_2u_1 + C_5\partial_2^2u_1 + C_3\partial_1^2u_2 + \\ &+(C_2 + C_5)\partial_1\partial_2u_2 + C_4\partial_2^2u_2 = \rho\ddot{u}_1, \\ &C_3\partial_1^2u_1 + (C_2 + C_5)\partial_1\partial_2u_1 + C_4\partial_2^2u_1 + \\ &+C_6\partial_2^2u_2 + 2C_4\partial_1\partial_2u_2 + C_5\partial_1^2u_2 = \rho\ddot{u}_2, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ - вектор перемещений; $\partial_i=\partial/\partial x_i$, $i=1,2$; ρ - плотность; точкой обозначается дифференцирование по времени; константы C_k, $k=\overline{1,6}$, выражаются через основные модули упругости ортотропного тела m_l, $l=\overline{1,4}$, следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} C_1 &= m_1\cos^4\varphi + m_2\sin^4\varphi + (m_3 + m_4/2)\sin^2 2\varphi, \\ C_2 &= (m_1 + m_2 - 4m_3)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + m_4(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi), \\ C_3 &= (m_2\sin^2\varphi - m_1\cos^2\varphi)\sin 2\varphi/2 + (m_4 + 2m_3)\sin 4\varphi/4, \\ C_3 &= (m_2\cos^2\varphi - m_1\sin^2\varphi)\sin 2\varphi/2 - (m_4 + 2m_3)\sin 4\varphi/4, \\ C_5 &= (m_1 + m_2 - 2m_4)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + m_3\cos^2 2\varphi, \\ C_6 &= m_1\sin^4\varphi + m_2\cos^4\varphi + (m_3 + m_4/2)\sin^2 2\varphi. \end{aligned}$$

Решение (1) представим в виде [2]

$$\mathbf{u}=\mathbf{h}f(B), \qquad (2)$$

Авторы статьи - сотрудники кафедры теоретической и прикладной механики.

где $\mathbf{h}=(h_1, h2)$ - вектор прерывности; $B=g(n_1x_1+n_2x_2-Vt)$ - фаза; n_i - направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности; V - фазовая скорость распространения упругой волны, g - коэффициент пропорциональности.

Подставив (2) в (1), после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}\left(c_1n_1^2+2c_3n_1n_2+c_5n_2^2-v^2\right)h_1+\left(c_3n_1^2+\left(c_2+c_5\right)n_1n_2+c_4n_2^2\right)h_2=0,\\ \left(c_3n_1^2+\left(c_2+c_5\right)n_1n_2+c_4n_2^2\right)h_1+\left(c_6n_2^2+2c_4n_1n_2+c_5n_1^2-v^2\right)h_2=0,\end{aligned} \qquad (3)$$

где $c_k=C_k/m_4$, $\nu=V/\sqrt{m_4/\rho}$ - безразмерная скорость распространения упругой волны.

Дополняя одно из уравнений (3) условием нормировки [3], получим систему уравнений для нахождения компонент вектора прерывности

$$\begin{aligned}\left(c_1n_1^2+2c_3n_1n_2+c_5n_2^2-v^2\right)h_1+\left(c_3n_1^2+\left(c_2+c_5\right)n_1n_2+c_4n_2^2\right)h_2=0,\\ h_1^2+h_2^2=1.\end{aligned}$$

Отсюда будем иметь

$$h_1^{(i)}=-\left(c_3n_1^2+n_2\left(n_1\left(c_2+c_5\right)+c_4n_2\right)\right)\left|A\right|\Big/B\sqrt{A},\ h_2^{(i)}=\left|A\right|\Big/B, \qquad (4)$$

$$A=c_1n_1^2+2c_3n_1n_2+c_5n_2^2-v^2,\quad B=v_i^4-v_i^2\left(2c_5n_2^2+4c_3n_1n_2+2c_1n_1^2\right)+n_1^4\left(c_1^2+c_3^2\right)+$$

г

$$+n_2^4\left(c_4^2+c_5^2\right)+n_1n_2\left(n_1^2\left(2c_2c_3+2c_3c_5+4c_1c_3\right)+n_2^2\left(2c_2c_4+2c_4c_5+4c_3c_5\right)+\right.$$

$$\left.+n_1n_2\left(c_2^2+2c_2c_5+c_5^2+4c_3^2+2c_3c_4+2c_1c_5\right)\right),$$

$$v_i=\sqrt{\left(\overline{B}\pm\sqrt{\overline{B}^2-4\overline{A}}\right)\Big/2},\quad \overline{B}=\left(c_1+c_5\right)n_1^2+\left(c_5+c_6\right)n_2^2+2\left(c_3+c_4\right)n_1n_2,$$

$$\overline{A}=\left(c_1c_6-c_2^2+2c_3c_4-2c_2c_5\right)n_1^2n_2^2+\left(c_1c_5-c_3^2\right)n_1^4+\left(c_5c_6-c_4^2\right)n_2^4+$$

$$+2\left(\left(c_1c_4-c_2c_3\right)n_1^2+\left(c_3c_6-c_2c_4\right)p_2^2\right)n_1n_2,\qquad i=1,2.$$

Формулы (4) позволяют определить составляющие вектора прерывности $\mathbf{h}^{(i)}=\left(h_1^{(i)},h_2^{(i)}\right)$ для волн, распространяющихся со скоростями v_i, и исследовать зависимости углов γ_i между вектором прерывности и нормалью к характеристической поверхности от угла намотки стекловолокна. Выражение для $\mathrm{tg}\gamma_i$ представим в следующем виде:

$$tg\gamma_i=\left(\frac{n_2}{n_1}-\frac{h_2^{(i)}}{h_1^{(i)}}\right)\Big/\left(1+\frac{n_2}{n_1}\frac{h_2^{(i)}}{h_1^{(i)}}\right),\quad i=1,2. \qquad (5)$$

На рис. 1 отражены зависимости $\mathrm{tg}\gamma_i$ от угла намотки φ для стеклопластика, характеризующегося константами упругости m_1=183 ГПа, m_2=252, m_3=35, m_4=27,7 ГПа; c_2=3870 м/с [4].

Из рис. 1 видно, что волна, распространяющаяся со скоростью v_1, является квазипродольной, со скоростью v_2 - квазипоперечной. Изменение угла намотки стекловолокна φ не влияет на максимальное и минимальное по абсолютной величине значение углов γ_1 и γ_2 соответственно. Это означает, что угол φ не оказывает влияния на природу упругих волн и не изменяет характер анизотропии стеклопластика.

Найдем распределения напряжений $\sigma_{kl}^{(i)}$, k, l=1,2, возникающих при распространении упругих волн в однослойном стеклопластике (верхний индекс указывает на тип волны). Воспользуемся законом Гука для стеклопластиков, предложенным в [4]:

$$\sigma_{11} = C_1 e_{11} + C_2 e_{22} + 2C_3 e_{12},\ \sigma_{22} = C_2 e_{11} + C_6 e_{22} + 2C_4 e_{12},$$
$$\sigma_{12} = C_3 e_{11} + C_4 e_{22} + 2C_5 e_{12}, \qquad (6)$$

где $e_{kl}=(\partial_l u_k+\partial_k u_l)/2$ – деформации.

Из (6) с учетом (2) получим

$$\sigma_{11}^{(i)} = c_1 h_1^{(i)} n_1 + c_2 h_2^{(i)} n_2 + c_3 \left(h_1^{(i)} n_2 + h_2^{(i)} n_1 \right),$$
$$\sigma_{22}^{(i)} = c_2 h_1^{(i)} n_1 + c_6 h_2^{(i)} n_2 + c_4 \left(h_1^{(i)} n_2 + h_2^{(i)} n_1 \right), \qquad (7)$$
$$\sigma_{12}^{(i)} = c_3 h_1^{(i)} n_1 + c_4 h_2^{(i)} n_2 + c_5 \left(h_1^{(i)} n_2 + h_2^{(i)} n_1 \right),$$

где $\sigma_{kl}^{(i)} = \sigma_{kl}/m_4$ - безразмерные напряжения, максимальное значение производной $f'(g(n_1x_1+n_2x_2-Vt))$ условно принято за единицу, i, k, l=1, 2.

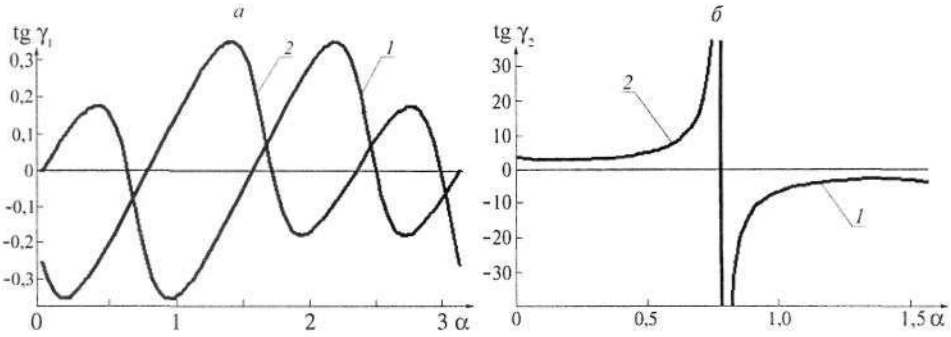

Рис. 1. Зависимости $\mathrm{tg}\,\gamma_1$ (*а*) и $\mathrm{tg}\,\gamma_2$ (*б*) от угла α для различных углов намотки нити стекловолокна: *1* – φ=0; *2* – $\varphi=\pi/4$, i=1, 2

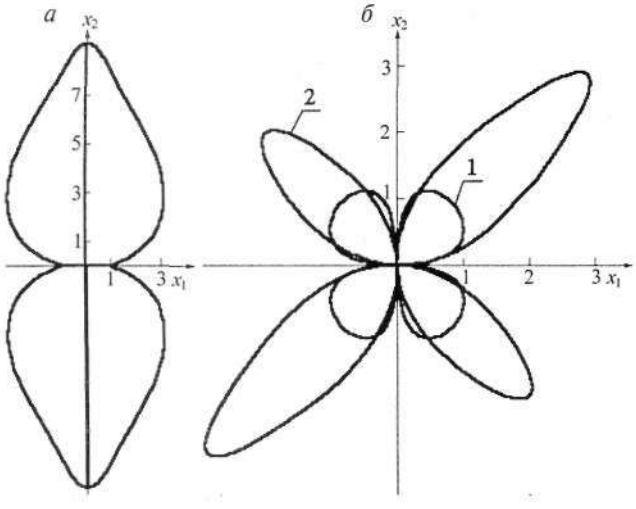

Рис. 2. Распределение напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$ (*а*) и $\sigma_{12}^{(1)}$ (*б*) в стеклопластике для различных углов намотки: *1* – φ=0; *2* – $\varphi=\pi/4$

С помощью (7) построим графики динамических напряжений в однослойном стеклопластике, для чего будем откладывать значения $\sigma_{kl}^{(i)}$ на луче, проходящем через начало системы координат и точку среды с координатами $\left(x_1^{(j)},\ x_2^{(j)}\right)$ [1], до которой дошла энергия волнового возмущения. На рис. 2 показаны кривые динамических безразмерных напряжений $\sigma_{kl}^{(1)}$, возникающих при распространении квазипродольной волны в стеклопластике (константы упругости записаны выше) для различных углов намотки стекловолокна.

Из рис. 2 видно, что в стеклопластике, образованном намоткой нити под углом φ=0, напряжения $\sigma_{22}^{(1)}$ значительно превышают напряжения $\sigma_{12}^{(1)}$. При увеличении угла намотки φ на $\Delta\varphi$ кривая $\sigma_{22}^{(1)}$ также поворачивается на угол $\Delta\varphi$

практически не изменяя своего вида. При $\varphi=\pi/2$ кривая $\sigma_{22}^{(1)}$ аналогична кривой $\sigma_{11}^{(1)}$ для $\varphi=0$. Напряжения $\sigma_{12}^{(1)}$ при изменении угла φ от 0 до $\pi/4$ озрастают и меняют ориентацию в координатной плоскости ($x_1 0 x_2$), например, максимальные напряжения $\sigma_{12}^{(1)}$ при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/4$ составляют 1,224 и 4,05 соответственно. Это обстоятельство целесообразно учитывать при проектировании конструкций из стеклопластика, чтобы уменьшить значения напряжений, возникающих при динамических воздействиях.

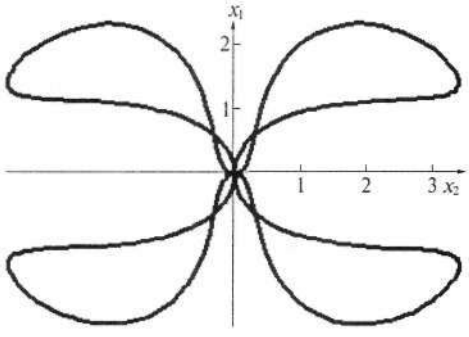

Рис. 3. Распределение безразмерных напряжений $\sigma_{22}^{(2)}$ для стеклопластика при $\varphi=0$

Распределение напряжений $\sigma_{11}^{(2)}$, возникающих в стеклопластике с углом намотки $\varphi=0$, при распространении квазипоперечной волны показано на рис. 3 (числовые данные прежние).

Сравнительный анализ кривых нормальных напряжений $\sigma_{22}^{(1)}$ (см. рис. 2) и $\sigma_{22}^{(2)}$ (см. рис. 3) показывает, что распределение последних имеет более сложный характер, что можно объяснить наличием лакун на волновом фронте квазипоперечной волны [1]. При изменении угла намотки φ ориентация напряжений $\sigma_{kl}^{(2)}$ также изменяется, однако значения напряжений при этом существенно не возрастают.

В заключение отметим, что распределения динамических напряжений, полученные для стеклопластиков с углом намотки $\varphi=0$, имеют тот же вид для ортотропных материалов.

1. Босяков С М., Медведев Д.Г.// Вестн. Белорус, гос. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1. С. 82.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.. 1964.
3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропной упругой среде. Л., 1980.
4. Пластинки и оболочки из стеклопластика / Под ред. И.И. Гольденблата. М., 1970.

Поступила в редакцию 05.03.2004.

Дмитрий Георгиевич Медведев - кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель декана механико-математического факультета.
Сергей Михайлович Босяков - кандидат физико-математических наук, доцент.