УДК 517.925.42

О.Б. КОРСАНТИЯ

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

The conditions which guarantee the center's strong isochronism for system $\dot{x}=-y-P_2(x,y)$, $\dot{y}=x+Q_3(x,y)$, where P_2 is the homogeneous form of the second degree of *x, y* and Q_3 is the homo geneous form of the third degree of *x, y,* are obtained.

Рассмотрим вещественную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=-y-P_2(x,y),\ \ \dot{y}=x+Q_3(x,y), \tag{1}$$

где P_2 - квадратичная форма относительно x и y, Q_3 - кубическая форма отно-сительно x и y.

В работе [1] доказана

Теорема 1. Для того чтобы система (1) имела в начале координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости изохронный центр первого порядка, необходимо и доста-точно, чтобы она имела вид

$$\dot{x}=-y+Ax^2, \quad \dot{y}=x+Kx^3, \tag{2}$$

где $K=\dfrac{4A^2}{9}$, $A\in\mathbb{R}$. (3)

В настоящей статье дается ответ на вопрос о сильной изохронности центра системы (1). Причем так как сильная изохронность предполагает наличие изохронности первого порядка, то в качестве исходной рассматривается система (2) с условием (3).

Исследование этого вопроса свяжем с рассмотрением системы (1) в полярных координатах ρ, φ, где $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, в которых система (2) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}&=A\rho^2\cos^3\varphi+K\rho^3\cos^3\varphi\sin\varphi,\\ \dot{\varphi}&=1-A\rho\cos^2\varphi\sin\varphi+K\rho^2\cos^4\varphi.\end{aligned} \tag{4}$$

Следуя результатам [2, с. 79], рассмотрим алгебраическую сумму $t+\varphi_0-\varphi$ в виде ряда по степеням ρ с коэффициентами, являющимися функциями от φ, т. е. в виде:

$$t+\varphi_0-\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(\varphi)\rho^k, \tag{5}$$

где

$$\varphi(0)=\varphi_0,\ \omega_k(\varphi_0)=0.$$

Дифференцируя левую и правую части (5) по t и используя дифференциальную систему (4), получаем равенство

$$A\rho\cos^2\varphi\sin\varphi-K\rho^2\cos^4\varphi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega_n'\rho^n\left(1-A\rho\cos^2\varphi\sin\varphi+K\rho^2\cos^4\varphi\right)+\omega_n n\rho^{n-1}\left(A\rho^2\cos^3\varphi+K\rho^3\cos^3\varphi\sin\varphi\right)\right).$$

А тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ, выводим следующие соотношения для определения функций $\omega_n(\varphi)$:

$$\omega_1'=A\cos^2\varphi\sin\varphi, \tag{6}$$

$$\omega_2'=A\omega_1'\cos^2\varphi\sin\varphi-A\omega_1\cos^3\varphi-K\cos^4\varphi, \tag{7}$$

....

$$\begin{gathered}\omega_n'=A\omega_{n-1}'\cos^2\varphi\sin\varphi-K\omega_{n-2}'\cos^4\varphi-\\-A\omega_{n-1}(n-1)\cos^3\varphi-K\omega_{n-2}(n-2)\cos^3\varphi\sin\varphi,\end{gathered} \tag{8}$$

где $n\geq 3$.

В работе [3] доказана

Лемма 1. Если для некоторого s

$$\omega_s'(\varphi)=a\cos^2\varphi\sin\varphi,$$

где a - некоторая отличная от нуля вещественная постоянная, то для нелинейной системы

$$\dot{x}=-y+P(x,\ y),\ \ \dot{y}=x+Q(x,\ y),$$

где функции P и Q не содержат в своих разложениях в степенные ряды по переменным x и y линейных и свободных членов, в начале координат $O(0,\ 0)$ фазовой плоскости может иметь место сильная изохронность только второго порядка с $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$

Лемма 2. Для системы (2) с условием (3) в начале координат $O(0,\ 0)$ фазовой плоскости может иметь место сильная изохронность только второго порядка с $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$ -

Справедливость леммы 2 очевидна, поскольку $\omega_1'(\varphi)=A\cos^2\varphi\sin\varphi$.

Наличие сильной изохронности центра некоторого порядка n для системы (2) в начале координат 0(0, 0) фазовой плоскости означает [2]: существует по крайней мере один угол $\varphi=\varphi_0$ и натуральное число n такие, что выполняются равенства

$$\omega_k\left(\varphi_0+\frac{2\pi l}{n}\right)=0,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l=\overline{1,\ n}, \tag{9}$$

$$\omega_k(\varphi_0)=0,\ \ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{10}$$

Согласно лемме 2 система (2) может иметь сильную изохронность только второго порядка с $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$. Серии условий (9), (10) примут следующий вид:

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{2}+\pi l\right)=0,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\quad l=1,\ 2, \tag{11}$$

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{12}$$

При l=1 (11) принимает вид

$$\omega_k\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{13}$$

При l=2 (11) означает условие обычной изохронности. С учетом (3) этот факт следует из теоремы 1.

Итак, наша задача - установить истинность (13) при выполнении условий (3), (12). Покажем сначала, что из рекуррентных соотношений (6) - (8) вытекают равенства

$$\omega_{2n-1}=\frac{A^{2n-1}}{(2n-1)3^{2n-1}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i 4^{i-1}\left(\tilde{C}_{n+i}^{2i}-\tilde{C}_{n+i-2}^{2i}\right)\cos^{4n+2i-3}\varphi, \tag{14}$$

$$\omega_{2n}=\frac{A^{2n}}{n3^{2n}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i 4^{i-1}\tilde{C}_{n+i-1}^{2i-1}\cos^{4n+2i-1}\varphi\sin\varphi, \tag{15}$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\tilde{C}_a^b=\begin{cases}C_a^b, \text{ если } a\geq b,\ b\geq 0,\\ 0, \text{в противном случае,}\end{cases}$ где C_a^b - число сочетаний из a по b,

т. е. $C_a^b=\dfrac{a!}{(a-b)!b!}$.

Доказательство справедливости соотношений (14), (15) проведем методом математической индукции. При s=1 из соотношения (6) с учетом условия (12) получаем, что

$$\omega_1(\varphi)=-\frac{A}{3}\cos^3\varphi, \tag{16}$$

а из соотношения (7) с учетом (12) и соотношения (16) - $\omega_2(\varphi)=-\dfrac{A^2}{9}\cos^5\varphi\sin\varphi$

Значит, при s=1 (14) и (15) верно. Пусть (14) и (15) верно для всех $s\leq n$. Покажем, что и при s=n+1 (14) верно. Вычисляя значения производных выражений (14) и (15), находим

$$\omega_{2n-1}'=\frac{A^{2n-1}}{(2n-1)3^{2n-1}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}4^{i-1}(4n+2i-3)\left(\tilde{C}_{n+i}^{2i}-\tilde{C}_{n+i-2}^{2i}\right)\cos^{4n+2i-4}\varphi\sin\varphi, \tag{17}$$

$$\omega_{2n}'=\frac{A^{2n}}{n3^{2n}}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{i-1}4^{i-2}\left((4n+2i-2)\tilde{C}_{n+i-2}^{2i-3}+4(4n+2i-1)\tilde{C}_{n+i-1}^{2i-1}\right)\cos^{4n+2i-2}\varphi. \tag{18}$$

Подставляя значения ω_{2n-1} из (14), ω_{2n} из (15), ω_{2n-1}' из (17) и ω_{2n}' из (18) в рекуррентное соотношение (8) и учитывая (3), имеем:

$$\begin{gathered}\omega_{2n+1}'=A\omega_{2n}'\cos^2\varphi\sin\varphi-K\omega_{2n-1}'\cos^4\varphi-\\ -A\omega_{2n}2n\cos^3\varphi-K\omega_{2n-1}(2n-1)\cos^3\varphi\sin\varphi=\end{gathered}$$

$$=\frac{A^{2n+1}}{3^{2n+1}}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}4^{i-1}\left(\begin{array}{l}\dfrac{3(n+i-1)}{2n}\tilde{C}_{n+i-2}^{2i-3}+\dfrac{3(4n+2i-1)}{n}\tilde{C}_{n+i-1}^{2i-1}-\\ -\dfrac{8(n+i-1)}{2n-1}\tilde{C}_{n+i}^{2i}+\dfrac{8(n+i-1)}{2n-1}\tilde{C}_{n+i-2}^{2i}\end{array}\right)\cos^{4n+2i}\varphi\sin\varphi.$$

Упростив выражение, стоящее в скобках, получим

$$\omega'_{2n+1} = \frac{A^{2n+1}}{3^{2n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} 4^{i-1} \frac{2i(4n+2i+1)}{(n+i)(n-i+1)} \tilde{C}_{n+i}^{2i} \cos^{4n+2i} \varphi \sin \varphi ,$$

или, ч $$\omega'_{2n+1} = \frac{A^{2n+1}}{3^{2n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} 4^{i-1} \frac{(4n+2i+1)\left(\tilde{C}_{n+i+1}^{2i} - \tilde{C}_{n+i-1}^{2i}\right)}{2n+1} \cos^{4n+2i} \varphi \sin \varphi .$$

Таким образом,

$$\omega'_{2n+1} = \frac{A^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)3^{2(n+1)-1}} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} 4^{i-1} \left(4(n+1)+2i-3\right)\left(\tilde{C}_{(n+1)+i}^{2i} - \tilde{C}_{(n+1)+i-2}^{2i}\right) \cos^{4(n+1)+2i-4} \varphi \sin \varphi. \tag{19}$$

Выражение (19) имеет вид (17), следовательно, интегрируя соотношение (19) с учетом (12), получим требуемое равенство.

Рассуждая аналогично, получаем

$$\omega'_{2n+2} = A\omega'_{2n+1} \cos^2 \varphi \sin \varphi - K\omega'_{2n} \cos^4 \varphi -$$
$$-A\omega_{2n+1}(2n+1)\cos^3 \varphi - K\omega_{2n} 2n \cos^3 \varphi \sin \varphi = \frac{A^{2n+2}}{3^{2n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} =$$
$$= (-1)^{i-1} 4^{i-1} \left(\begin{array}{l} \frac{12(4n+2i+1)}{2n+1}\left(\tilde{C}_{n+i+1}^{2i} - \tilde{C}_{n+i-1}^{2i}\right) + \frac{6(n+i-1)}{2n+1}\left(\tilde{C}_{n+i}^{2i-2} - \tilde{C}_{n+i-2}^{2i-2}\right) - \\ -\frac{8(n+i-1)}{n}\tilde{C}_{n+i-2}^{2i-3} - \frac{16(2n+2i-1)}{n}\tilde{C}_{n+i-2}^{2i-1} \end{array} \right) \cos^{4n+2i+2} \varphi.$$

Упростив выражение, стоящее в скобках, получим

$$\omega'_{2n+2} = \frac{A^{2n+2}}{(n+1)3^{2n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} 4^{i-2} \frac{8(4n^2+2ni+7n+4i+1)i}{(n-i+2)(n-i+1)(n+i)} \tilde{C}_{n+i}^{2i} \cos^{4n+2i+2} \varphi =$$
$$= \frac{A^{2n+2}}{(n+1)3^{2n+2}} \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^{i-1} 4^{i-2} \left((4n+2i+2)\tilde{C}_{n+i-1}^{2i-3} + 4(4n+2i+3)\tilde{C}_{n+i}^{2i-1}\right) \cos^{4n+2i+2} \varphi. \tag{20}$$

Интегрируя соотношение (20) с учетом (12), получим искомое равенство.

Итак, справедливость (14) и (15) установлена. Непосредственная же подстановка в (14) и (15) угла $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ доказывает истинность и (13). Следовательно, верна следующая

Теорема 2. Для системы (1) в начале координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости имеет место сильная изохронность центра только второго порядка с $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

Условие сильной изохронности для системы (1) совпадает с условием изохронности центра первого порядка.

1. Ле Ван Линь// Вестн. Белорус, ун-та. Сер. 1. 2003. № 3. С. 90.

2. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.

3. Амелькин В.В., Касим Мухаммед Аль-Хайдер // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 867.

Поступила в редакцию 23.12.2003.

Ольга Борисовна Корсантия - аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.В. Амелькин.