УДК 517.58

А.А. КИЛБАС, Е.К. ЩЕТНИКОВИЧ

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ - РАЙТА И ВАТСОНА - РАЙТА

The properties of the Bessel-type functions such as the existence, analytic continuation and asymptotic behavior near zero and infinity are investigated.

Рассмотрим специальные функции $J_\eta^\mu(z)$ и $W_{\eta,\eta';\lambda}^{\mu,\mu'}(x)$, определенные для действительных $\mu,\ \mu',\ \lambda\in\mathbf{R}$ и комплексных $\eta,\ \eta'\in\mathbf{C}$ соответственно степенным рядом

$$J_\eta^\mu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(\mu k+\eta+1)}\ \frac{z^k}{k!}\ \ (z\in\mathbf{C}) \tag{1}$$

и несобственным интегралом

$$W_{\eta,\eta';\lambda}^{\mu,\mu'}(x)=x^{1/2}\int_0^\infty t^{\lambda-1}J_\eta^\mu(xt)J_{\eta'}^{\mu'}\left(\frac{1}{t}\right)dt\ \ (x>0). \tag{2}$$

В частности, при $\mu=0$ функция $J_\eta^0(z)$ совпадает с экспоненциальной функцией e^{-z} с точностью до постоянного множителя, а при $\mu=1$ и выборе $z^2/4$ вместо z - с функцией Бесселя первого рода $J_\eta(z)$ [1, с. 12] с точностью до множителя $(z/2)^{-\eta}$:

$$J_\eta^0(z)=\frac{1}{\Gamma(\eta+1)}\ e^{-z},\ \ J_\eta^1\left(\frac{z^2}{4}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\eta}J_\eta(z).$$

Функция $J_\eta^\mu(z)$, известная как функция Бесселя - Мейтленда [2, с. 110], [3, с. 794], является частным случаем обобщенной функции Райта ${}_p\Psi_q[z]$, определяемой для действительных $\alpha_i,\ \beta_j\in\mathbf{R}$ и комплексных $a_i,\ b_j\in\mathbf{C}$ $(i=1,\ \dots,\ p;\ j=1,\ \dots,\ q)$ обобщенным гипергеометрическим рядом

$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i k)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_j k)}\ \frac{z^k}{k!}\ \ (z\in\mathbf{C}), \tag{3}$$

при этом пустые произведения (если таковые имеются) считаются равными единице. Согласно (1) и (3)

$$J_\eta^\mu(z)={}_0\Psi_1\left[\begin{matrix}-\\(\eta+1,\mu)\end{matrix}\middle|-z\right], \tag{4}$$

и поэтому функцию (1) называют также обобщенной функцией Бесселя - Райта [4, с. 352]. На наш взгляд, это более правильно, так как Мейтленд (Maitland) - второе имя математика, более известного как Е.М. Райт (E.M. Wright).

Функция $W_{\eta,\eta';\lambda}^{\mu,\mu'}(x)$ была введена в [5] как ядро интегрального преобразования

$$\left(\mathbf{W}_{\eta,\eta';\lambda}^{\mu,\mu';\sigma}f\right)(x)=\int_0^\infty (xt)^\sigma W_{\eta,\eta';\lambda}^{\mu,\mu'}\left(x^2t^2\right)f(t)dt\ \ (x>0,\ \sigma\in\mathbf{C}). \tag{5}$$

Она является обобщением функции

$$W_{\eta,\eta'}(x)=x^{1/2}\int_0^\infty t^{-1}J_\eta(xt)J_{\eta'}\left(\frac{1}{t}\right)dt\ \ (x>0;\ \eta,\ \eta'\in\mathbf{C}), \tag{6}$$

введенной в 1931 г. Г. Ватсоном [6, с. 308]. В связи с этим функцию (2) называют обобщенной функцией Ватсона - Райта, а (5) - преобразованием Ватсона - Райта. Заметим, что формула обращения этого преобразования в пространстве $L_2(\mathbf{R}_+)$ была получена в [5], а условия ограниченности и описание образа оператора $\mathbf{W}^{\mu,\,\mu';\,\sigma}_{\eta,\,\eta';\,\lambda}$ в весовом пространстве r-суммируемых функций на $\mathbf{R}_+=(0,\infty)$ - в [7].

Настоящая работа посвящена изучению вопросов существования функций (1) и (2), их аналитического продолжения и асимптотического поведения в нуле и на бесконечности. Наши исследования основаны на представлении обобщенных функций Бесселя - Райта $J^{\mu}_{\eta}(z)$ и Ватсона - Райта $W^{\mu,\,\mu'}_{\eta,\,\eta';\,\lambda}(z)$ в виде специальных случаев так называемой *H*-функции $H^{m,\,n}_{p,\,q}[z]$. Для целых неотрицательных *m, n, p, q* $(0\le m\le q,\ 0\le n\le p)$, комплексных $a_i,\ b_j\in\mathbf{C}$ и положительных $\alpha_i,\ \beta_j\in\mathbf{R}$ $(1\le i\le p,\ 1\le j\le q)$ такая функция определяется интегралом Меллина - Барнса

$$H^{m,\,n}_{p,\,q}[z]\equiv H^{m,\,n}_{p,\,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{H}^{m,\,n}_{p,\,q}(s)z^{-s}ds\,. \tag{7}$$

Здесь L - специально выбранный замкнутый контур, проходящий через бесконечно удаленную точку и разделяющий полюсы функций $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ $(j=1,\,\dots,\,m)$ и $\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)$ $(i=1,\,\dots,\,n)$, а

$$\mathcal{H}^{m,\,n}_{p,\,q}(s)=\mathcal{H}^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\,\middle|\,s\right]=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\ \prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\ \prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}, \tag{8}$$

при этом пустые произведения в (8) (если таковые имеются) считаются равными единице.

Отметим, что *H*-функция (7) является наиболее общей из известных специальных функций и включает в качестве частных случаев элементарные функции, специальные функции гипергеометрического и бесселева типа, а также G-функцию Мейера, получающуюся из $H^{m,\,n}_{p,\,q}[z]$ при $\alpha_1=\ \dots\ =\alpha_p=\beta_1=\ \dots\ =\beta_q=1$ (см. [4, п. 5.6], [8, п. 2.9]). (С теорией *H*-функции можно ознакомиться в [3, п. 8.3], [8, гл. 1-2], [9, гл. 1], [10, гл. 2].) Свойства *H*-функции (7) зависят от следующих параметров:

$$a^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j\,,\quad \Delta=\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\,, \tag{9}$$

$$\nu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{i=1}^{q}a_i+\frac{p-q}{2},\quad \delta=\prod_{i=1}^{p}\alpha_i^{-\alpha_i}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{\beta_j}\,, \tag{10}$$

$$a_1^*=\sum_{j=1}^{m}\beta_j-\sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i\,,\quad a_2^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j\,. \tag{11}$$

Важным свойством *H*-функции является то, что ее преобразование Меллина, определяемое равенством

$$\left(Mf\right)(s)=\int_0^{\infty}f(x)\,x^{s-1}dx\quad(s\in\mathbf{C}), \tag{12}$$

совпадает с функцией (8):

$$\left(MH^{m,\,n}_{p,\,q}[z]\right)(s)=\mathcal{H}^{m,\,n}_{p,\,q}\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\,\middle|\,s\right] \tag{13}$$

при определенных условиях на параметры [3, формула 8.4.51.11], [8, теорема 2.2].

Приведем также некоторые другие свойства *H*-функции (7), используемые нами в дальнейшем. Из [8, теорема 1.1] вытекает утверждение, дающее условия существования *H*-функции.

Теорема 1. Пусть $L=L_{-\infty}$ представляет собой левую петлю, которая расположена в некоторой горизонтальной полосе и начинается в точке $-\infty+i\varphi_1$, оставляя все полюсы гамма-функций $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ $(j=1,\,\dots,\,m)$ слева, а полюсы гамма-функций $\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)$ $(i=1,\,\dots,\,n)$ - справа от контура, и оканчивается в точке $-\infty+i\varphi_2$, где $\varphi_1<\varphi_2$. Пусть выполняется одно из следующих условий:

(i) $\Delta > 0,\ z \neq 0$;

(ii) $\Delta=0,\ 0<|z|<\delta$;

(iii) $\Delta = 0,\ |z|= \delta,\ \mathrm{Re}\ (\nu) < -1$.

Тогда функция $H^{m,\,n}_{p,\,q}[z]$ определена интегралом Меллина - Барнса (8).

В следующих двух утверждениях, дающих асимптотическое поведение *H*-функции на бесконечности и в нуле, считаем, что полюсы функций $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ (j=1, ..., m) и $\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)$ (i=1, ..., n) не совпадают. Эти утверждения следуют соответственно из [8, следствие 1.10.2], [8, следствия 1.11.1 и 1.12.1].

Теорема 2. Пусть n=0 и x>0. Если $\Delta>0$ и $a^*\geq 0$, то справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$H^{m,\,0}_{p,\,q}[x] = O\left(x^{[\mathrm{Re}\ (\nu)+1/2]/\Delta} \exp\left[\cos\ (a_1^*\pi/\Delta)\,\Delta\,(x/\delta)^{1/\Delta}\right]\right)(x \to +\infty). \quad (14)$$

В частности,

$$H^{q,\,0}_{p,\,q}[x] = O\left(x^{[\mathrm{Re}\ (\nu)+1/2]/\Delta} \exp\left[-\Delta\left(x/\delta\right)^{1/\Delta}\right]\right)(x \to +\infty). \quad (15)$$

Теорема 3. Пусть $m\neq 0,\ \Delta\geq 0$, и $\rho^* = \min\limits_{1\leq j\leq m}\left[\mathrm{Re}\ (b_j)/\beta_j\right]$

(а) Если полюсы гамма-функций $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ (j=1, ..., m) являются простыми, то

$$H^{m,\,n}_{p,\,q}[z] = O\left(z^{\rho^*}\right)\ (z \to 0)$$

(б) Если некоторые полюсы гамма-функций $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ (j=1, ..., m) совпадают и N есть наибольший порядок общих полюсов, то

$$H^{m,\,n}_{p,\,q}[z] = O\left(z^{\rho^*}[\ln z]^{N-1}\right)\ (z \to 0).$$

Согласно (1) и (4) условия существования обобщенной функции Бесселя - Райта $J^{\mu}_{\eta}(z)$ вытекают из соответствующего результата, доказанного в [11, следствие 1.2] для функции Райта $\varphi(\alpha,\ \beta;\ z) = {}_0\Psi_1\left[\left.{}^{-}_{(\beta,\,\alpha)}\right|z\right]$

Теорема 4. Пусть $\mu\in\mathbf{R}$ и $\eta\in\mathbf{C}$. Ряд (1) абсолютно сходится для всех $z\in\mathbf{C}$ при μ>-1, для всех $|z|$<1 при μ=-1 и для всех $|z|$=1 при μ=-1, Re (η)>0.

Отсюда вытекает [11, следствие 1.4], что $J^{\mu}_{\eta}(z)$ есть целая функция от z при μ= -1 и любом $\eta\in$ **C**.

Известна формула преобразования Меллина (12) функции $J^{\mu}_{\eta}(z)$ [3, формула 8.4.51.4]:

$$\left(MJ^{\mu}_{\eta}\right)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\eta-\mu s)} \quad (16)$$

в предположении, что

$$|\mu|<1,\ \mathrm{Re}\,(s)>0 \quad \text{или} \quad \mu=1,\ 0<\mathrm{Re}\,(s)<3/4+\mathrm{Re}\,(\eta)/2. \quad (17)$$

Согласно (7), (8) и (13) мы получаем следующие представления обобщенной функции Бесселя - Райта (1) в виде Я-функции (7):

$$J^{\mu}_{\eta}(z) = H^{1,\,0}_{0,\,2}\left[z\left|{}^{-}_{(0,\,1),\,(-\eta,\,\mu)}\right.\right] \quad (18)$$

при $0<\mu\leq 1$ и

$$J^{\mu}_{\eta}(z) = H^{1,\,0}_{1,\,1}\left[z\left|{}^{(1+\eta,\,-\mu)}_{(0,\,1)}\right.\right] \quad (19)$$

при $-1<\mu<0$. Постоянные (9) - (11) для $H^{1,\,0}_{0,\,2}$-функции в (18) принимают вид

$$a^*=1-\mu,\ \Delta=1+\mu,\ \nu=-\eta-1,\ \delta=\mu^{\mu},\ a_1^* = 1 \quad (0<\mu\leq 1), \quad (20)$$

а для $H^{1,\,0}_{1,\,1}$ -функции в (19):

$$a^*=1+\mu,\ \Delta=1+\mu,\ \nu=-\eta-1,\ \delta=|\mu|^{\mu},\ a_1^*=1+\mu \quad (-1<\mu<0). \quad (21)$$

Из теоремы 1 получаем условия представимости функции $J_\eta^\mu(z)$ в виде интеграла Меллина - Барнса и *H*-функции.

Теорема 5. Пусть $\mu\in\mathbf{R}$, $\mu\geq-1$, $\mu\neq0$, $\eta\in\mathbf{C}$ и пусть $L=L_{-\infty}$ - левосторонняя петля, расположенная в горизонтальной полосе, начинающаяся в точке $-\infty+i\varphi_1$, оставляющая все полюсы гамма-функции $\Gamma(s)$ слева от контура и заканчивающаяся в точке $-\infty+i\varphi_2$, где $\varphi_1<\varphi_2$. Пусть выполнено одно из следующих условий:

(i) $\mu>-1$ $(\mu\neq0)$, $z\neq0$;

(ii) $\mu=-1$, $0<|z|<1$;

(iii) $\mu=-1$, $|z|=1$, $\operatorname{Re}(\eta)>0$.

Тогда обобщенная функция Бесселя - Райта представима интегралом Меллина - Барнса

$$J_\eta^\mu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\eta-\mu s)}z^{-s}ds.$$

При этом для $J_\eta^\mu(z)$ верны представления в виде *H*-функции, задаваемые формулами (18) и (19) при $\mu>0$ и $-1\leq\mu<0$ соответственно.

Замечание 1. При $\mu>0$ представление $J_\eta^\mu(z)$ в виде *H*-функции (18) дано в [3, формула 8.4.51.4], [8, формула 2.9.23].

Из (1) вытекает асимптотическая оценка $J_\eta^\mu(z)$ в нуле:

$$J_\eta^\mu(z)=O(1)\ \ (z\to0,\ \mu>-1). \tag{22}$$

Асимптотическое представление для нее на бесконечности непосредственно выводится из теоремы 2 с учетом соотношений (20) и **(21).**

Теорема 6. Пусть $-1<\mu\leq1$, $\mu\neq0$, $x>0$ и пусть постоянная A дается формулой

$$A=\begin{cases}\cos[\pi/(\mu+1)](\mu+1)\mu^{-\mu/(\mu+1)} & \text{при }\ 0<\mu\leq1;\\ -(\mu+1)|\mu|^{-\mu/(\mu+1)} & \text{при }\ -1<\mu<0.\end{cases}$$

Тогда для $J_\eta^\mu(x)$ имеет место следующая асимптотическая оценка на бесконечности:

$$J_\eta^\mu(x)=O\left(x^{-[\operatorname{Re}(\eta)+1/2]/(\mu+1)}\exp\left[Ax^{1/(\mu+1)}\right]\right)(x\to+\infty). \tag{23}$$

В частности, если $\mu=1$

$$J_\eta^1(x)=O\left(x^{-[\operatorname{Re}(\eta)+1/2]/2}\right)(x\to+\infty). \tag{24}$$

Замечание 2. Если $0<\mu<1$, то $-1<\cos[\pi/(\mu+1)]<0$. Поэтому из (23) следует, что функция $J_\eta^\mu(x)$ имеет экспоненциально-степенное убывание на бесконечности.

Из соотношений (22) - (24) можно получить асимптотические разложения для функции $J_{\eta'}^{\mu'}(1/x)$ на бесконечности (вида (22)) и в нуле (вида (23) или (24)) с заменой x на $1/x$, μ – на μ' и η – на η'. Отсюда с учетом замечания 2 приходим к условиям сходимости интеграла в правой части (2).

Теорема 7. Пусть μ, μ', $\lambda\in\mathbf{R}$ и η, $\eta'\in\mathbf{C}$ будут такими, что выполнено одно из следующих условий:

(i) $-1<\mu<1$, $-1<\mu'<1$;

(ii) $-1<\mu<1$, $\mu'=1$, $\lambda+\operatorname{Re}(\eta')/2+1/4>0$;

(iii) $\mu=1$, $-\lambda+\operatorname{Re}(\eta)/2+1/4>0$, $-1<\mu'<1$;

(iv) $\mu=\mu'=1$, $-\lambda+\operatorname{Re}(\eta)/2+1/4>0$, $\lambda+\operatorname{Re}(\eta')/2+1/4>0$.

Тогда обобщенная функция Ватсона - Райта $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)$ существует при любых значениях $x>0$.

Для аналитического продолжения $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)$ с положительной полуоси $\mathbf{R}_+$ на комплексную плоскость z дадим ее представление в виде H-функции (7).

Следующее утверждение, дающее преобразование Меллина обобщенной функции Ватсона - Райта (2), доказывается непосредственно применением (12) с использованием соотношений (16) и (17).

Лемма 1. Пусть $\mu, \mu', \lambda \in \mathbf{R}$ и $\eta, \eta' \in \mathbf{C}$ удовлетворяют условиям:

(i) $|\mu|<1$, $\mathrm{Re}\,(s)>-1/2$ или $\mu=1$, $-1/2<\mathrm{Re}\,(s)<\mathrm{Re}\,(\eta)/2+1/4$;

(ii) $|\mu'|<1$, $\mathrm{Re}\,(s)>\lambda-1/2$ или $\mu'=1$, $\lambda-1/2<\mathrm{Re}\,(s)<\lambda+\mathrm{Re}\,(\eta')/2+1/4$.

Тогда преобразование Меллина функции $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)$ дается формулой

$$\left(MW^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}\right)(s)=\frac{\Gamma(s+1/2)\,\Gamma(s-\lambda+1/2)}{\Gamma[1+\eta-\mu(s+1/2)]\ \Gamma[1+\eta'-\mu'(s-\lambda+1/2)]}.$$

Отсюда в силу (7), (8) и (13) мы получаем следующие представления обобщенной функции Ватсона - Райта (2) в виде H-функции:

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=H^{2,0}_{0,4}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}-\\(1/2,1),(1/2-\lambda,1),(\mu/2-\eta,\mu),(\mu'/2-\mu\lambda-\eta',\mu')\end{matrix}\right] \tag{25}$$

при $0<\mu\le 1$ и $0<\mu'<1$;

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=H^{2,0}_{1,3}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1+\eta'+\mu\lambda-\mu'/2,-\mu')\\(1/2,1),(1/2-\lambda,1),(\mu/2-\eta,\mu)\end{matrix}\right] \tag{26}$$

при $0<\mu\le 1$ и $-1<\mu'<0$.

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=H^{2,0}_{1,3}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1+\eta-\mu/2,-\mu).\\(1/2,1),(1/2-\lambda,1),(\mu'/2-\mu\lambda-\eta',\mu')\end{matrix}\right] \tag{27}$$

при $-1<\mu<0$ и $0<\mu'\le 1$.

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=H^{2,0}_{2,2}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1+\eta-\mu/2,-\mu),(1+\eta'+\mu\lambda-\mu'/2,-\mu')\\(1/2,1),(1/2-\lambda,1)\end{matrix}\right] \tag{28}$$

при $-1<\mu<0$ и $-1<\mu'<0$. Постоянные Δ и ν в (9) и (10) для всех H-функций в (25) - (28) одинаковы:

$$\Delta=2+\mu+\mu',\quad \nu=(\mu+\mu')/2-(\eta+\eta')-\lambda(1+\mu')-1, \tag{29}$$

а постоянные a^*, δ и a_1^* различны:

$$a^*=2-\mu-\mu',\ \delta=\mu^{\mu}\mu'^{\mu'},\ a_1^*=2 \text{ для } H^{2,0}_{0,4}\text{-функции в (25);} \tag{30}$$

$$a^*=2-\mu+\mu',\ \delta=\mu^{\mu}|\mu'|^{\mu'},\ a_1^*=2+\mu' \text{ для } H^{2,0}_{1,3}\text{-функции в (26);} \tag{31}$$

$$a^*=2+\mu-\mu',\ \delta=|\mu|^{\mu}\mu'^{\mu'},\ a_1^*=2+\mu \text{ для } H^{2,0}_{1,3}\text{-функции в (27);} \tag{32}$$

$$a^*=2+\mu+\mu',\ \delta=|\mu|^{\mu}|\mu'|^{\mu'},\ a_1^*=2+\mu+\mu' \text{ для } H^{2,0}_{2,2}\text{-функции в (28).} \tag{33}$$

Из теоремы 1 получаем условия представимости функции $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)$ в виде интеграла Меллина - Барнса и H-функции.

Теорема 8. Пусть $\mu\ge -1$ $(\mu\ne 0)$, $\mu'\ge -1$ $(\mu'\ne 0)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\eta, \eta'\in\mathbf{C}$, и пусть $L=L_{-\infty}$ – левосторонняя петля, расположенная в горизонтальной полосе, начинающаяся в точке $-\infty+i\varphi_1$, оставляющая все полюсы $c_k=-1/2-k$ и $c_l=\lambda-1/2-l$ $(k, l=0, 1, 2, \ldots)$ гамма-функций $\Gamma(s+1/2)$ и $\Gamma(s-\lambda+1/2)$ слева от контура и заканчивающаяся в точке $-\infty+i\varphi_2$, где $\varphi_1<\varphi_2$. Пусть также выполнено одно из условий:

(i) по крайней мере одно из чисел μ или μ' больше -1, $z\ne 0$;

(ii) $\mu=\mu'=-1$, $0<|z|<1$;

(iii) $\mu=\mu'=-1$, $|z|=1$, $\mathrm{Re}\,(\eta+\eta')>-1$.

Тогда обобщенная функция Ватсона - Райта $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)$ представима интегралом Меллина - Барнса

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\Gamma(s+1/2)\,\Gamma(s-\lambda+1/2)}{\Gamma[1+\eta-\mu(s+1/2)]\ \Gamma[1+\eta'-\mu'(s-\lambda+1/2)]}\,z^{-s}ds.$$

При этом для $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)$ верны представления в виде H-функций, задаваемых формулами (25) - (28) при $\mu>0$, $\mu'>0$; $\mu>0$, $-1\le\mu'<0$; $-1\le\mu<0$, $\mu'>0$ и $-1\le\mu<0$, $-1\le\mu'<0$ соответственно.

Применяя теоремы 3 и 2 к Я-функциям в правых частях (25) - (28) и учитывая значения постоянных (9) - (11), задаваемых формулами (29) - (33), согласно которым $\Delta\ge 0$ при $\mu\ge -1$ и $\mu'\ge -1$, получаем следующие утверждения, устанавливающие асимптотическое поведение обобщенной функции Ватсона - Райта в нуле и на бесконечности.

Теорема 9. Пусть $\mu\ge -1$ $(\mu\ne 0)$, $\mu'\ge -1$ $(\mu'\ne 0)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, η, $\eta'\in\mathbf{C}$ и $\rho^*=\min[1/2,\ 1/2-\lambda]$.

(**а**) Если полюсы $c_k=-1/2-k$ и $c_l=\lambda-1/2-l$ $(k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ гамма-функций $\Gamma(s+1/2)$ и $\Gamma(s-\lambda+1/2)$ не совпадают, т. е. $\lambda-l\ne -k$ $(l,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, то обобщенная функция Ватсона - Райта имеет асимптотическую оценку в нуле

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=O\left(z^{\rho^*}\right)(z\to 0).$$

(**б**) Если $\exists\ k,\ l\in N_0=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ такие, что $\lambda-l=-k$, то

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(z)=O\left(z^{\rho^*}\ln z\right)(z\to 0).$$

Теорема 10. Пусть $\mu>-1$ $(\mu\ne 0)$, $\mu'>-1$ $(\mu'\ne 0)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, η, $\eta'\in\mathbf{C}$. Пусть Δ и ν задаются формулами (29), δ и a_1^* определены в равенствах (30) - (33) для H-функций (25) - (28) соответственно, и пусть выполнено одно из следующих условий:

(i) $2-\mu-\mu'\ge 0$ при $\mu>0$, $\mu'>0$;

(ii) $2-\mu+\mu'\ge 0$ при $\mu>0$, $-1<\mu'<0$;

(iii) $2+\mu-\mu'\ge 0$ при $-1<\mu<0$, $\mu'>0$;

(iv) $2+\mu+\mu'\ge 0$ при $-1<\mu<0$, $-1<\mu'<0$.

Тогда имеют место утверждения:

(а) Если по крайней мере одно из чисел μ или μ' больше нуля, то обобщенная функция Ватсона - Райта имеет экспоненциально-степенную асимптотику на бесконечности вида (14):

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)=O\left(x^{[\mathrm{Re}\,(\nu)+1/2]/\Delta}\exp\left[\cos\,(a_1^*\pi/\Delta)\,\Delta\left(x/\delta\right)^{1/\Delta}\right]\right)\ (x\to+\infty).$$

В частности, если $|\mu|+|\mu'|=2$, то

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)=O\left(x^{[\mathrm{Re}\,(\nu)+1/2]/\Delta}\right)\ (x\to+\infty).$$

(б) Если $-1<\mu<0$ и $-1<\mu'<0$, то $W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)$ имеет экспоненциально-степенную асимптотику на бесконечности вида (15):

$$W^{\mu,\mu'}_{\eta,\eta';\lambda}(x)=O\left(x^{[\mathrm{Re}\,(\nu)+1/2]/\Delta}\exp\left[-\Delta\left(x/\delta\right)^{1/\Delta}\right]\right)\ (x\to+\infty).$$

Данная работа выполнена в рамках темы «Специальные функции, интегральные преобразования и их применения», входящей в государственную программу фундаментальных исследований «Математические структуры».

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М, 1974.
2. Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. Теория и таблицы формул. Мн., 1978.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
4. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications. New York, 1994.
5. Olkha G.S., Rathie P.N.// Math. Machr. 1971. Vol. 51. P. 231.
6. Watson G.N. // Quart. J. Math. Oxford Series. 1931. Vol. 2. P. 298.

7. Betancor J.J. // Rev. Acad. Canar. Cienc. 1990. Vol. 1. P. 27.
8. Kilbas A. A., Saigo M. *H*-Transforms. Theory and Applications. London; New York; Washington, 2004.
9. Mathai A.M., Saxena R.K. The *H*-function with applications in statistics and other disciplines. New York, 1978.
10. Srivastava H.M., Gupta K.C., Goyal S. P. The *H*-function of one and two variables with applications. New Delhi, 1982.
11. Kilbas A.A., Saigo M., Trujillo J.J. // Fract. Calc. Appl. Analysis. 2002. Vol. 5. № 4. P. 437.

Поступила в редакцию 06.04.2004.

Анатолий Александрович Килбас - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций.
Елена Казимировна Щетникович - аспирант кафедры теории функций.