



УДК 517.977

А.И. КАЛИНИН, К.В. СЕМЕНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БОЛЬШОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА

The long horizon optimal control problem for a stable linear system is considered. The functional equality-type constraints are imposed at the right-hand end of the trajectories, and the values of the multidimensional control are bounded in Euclidean norm. The asymptotic approximation to the solution of this problem is constructed using the results for optimization of singularly perturbed systems.

Динамические процессы большой продолжительности часто встречаются в приложениях (см., например, [1-3]). При численном решении задач оптимального управления такими процессами приходится неоднократно интегрировать на больших промежутках прямые и сопряженные системы, что связано с серьезными трудностями вследствие накопления ошибок усечения. В задачах с малыми управляющими воздействиями эффективным средством преодоления этих трудностей могут оказаться асимптотические методы типа усреднения [1-3]. Предлагаемый нами в данной статье асимптотический подход опирается на результаты по оптимизации сингулярно возмущенных систем [4]. Он применим к устойчивым системам, но в отличие от методов усреднения не требует малости управляющих воздействий.

В классе r -мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим задачу оптимального управления линейной стационарной системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad \|u(t)\| \leq 1, \quad t \in [0, T/\mu], \\ Hx(T/\mu) &= g, \quad J(u) = \int_0^{T/\mu} (a'x(t) + c'u(t)) dt \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (1)$$

где μ - малый положительный параметр, x - n -вектор, g - m -вектор ($m \leq n$)

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_r^2}$ - евклидова норма вектора u .

Предположение 1. Матрица A устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.

Предположение 2. Имеет место $c - (A^{-1}B)'a \neq 0$.

Определение. Управление $u(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем асимптотически субоптимальным в задаче (1), если $\|u(t, \mu)\| \leq 1$, $t \in [0, T/\mu]$, и для любого натурального числа N выполняются соотношения

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{J(u(\cdot, \mu)) - J(u^0(\cdot, \mu))}{\mu^N} = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{Hx(T/\mu, \mu) - g}{\mu^N} = 0,$$

где $u^0(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, - оптимальное управление в задаче (1), а $x(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, - траектория, порожденная управлением $u(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$.

Ниже будет показано, что рассмотренная задача сводится к сингулярно возмущенной задаче терминального управления и асимптотически субоптимальное управление в ней может быть построено с помощью алгоритма, изложенного в [4].

Переходя к «медленному времени» $\tau = \mu t$ и полагая $z(\tau) = x(\tau/\mu)$, $v(\tau) = u(\tau/\mu)$, $\tau \in [0, T]$, запишем задачу (1) в виде

$$\mu dz/d\tau = Az + Bv, \quad z(0) = x_0, \quad \|v(\tau)\| \leq 1, \quad \tau \in [0, T],$$

$$Hz(T) = g, \quad J(v) = \frac{1}{\mu} \int_0^T (a'z(\tau) + c'v(\tau)) d\tau \rightarrow \max. \quad (2)$$

Задача (2), в свою очередь, эквивалентна задаче терминального управления

$$dy/d\tau = a'z + c'v, \quad y(0) = 0, \quad \mu dz/d\tau = Az + Bv, \quad z(0) = x_0, \quad \|v(\tau)\| \leq 1, \quad \tau \in [0, T], \quad Hz(T) = g, \quad J_0(v) = y(T) \rightarrow \max, \quad (3)$$

в которой $J_0(v) = \mu J(v)$.

В [4] предложен алгоритм построения асимптотических приближений к решению сингулярно возмущенной задачи терминального управления. Применим этот алгоритм к задаче (3). На первом этапе алгоритма решается вырожденная задача, которая в данном случае имеет вид

$$dy/d\tau = (c' - a'A^{-1}B)v, \quad y(0) = 0, \quad \|v(\tau)\| \leq 1, \quad \tau \in [0, T], \quad y(T) \rightarrow \max.$$

При выполнении предположения 2 ее решением, очевидно, будет управление $v^0(\tau) = \Delta_0 / \|\Delta_0\|$, $\tau \in [0, T]$, где $\Delta_0 = c - (A^{-1}B)'a$.

Далее решается задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса

$$dz/ds = Az + Bv, \quad z(-\infty) = -A^{-1}B\Delta_0 / \|\Delta_0\|, \quad \|v(s)\| \leq 1, \quad s \leq 0, \quad Hz(0) = g, \quad (4)$$

$$J_*(v) = a'A^{-1}z(0) + \int_{-\infty}^0 (\Delta_0' v(s) - \|\Delta_0\|) ds \rightarrow \max.$$

Предположение 3. Задача (4) имеет решение $v^*(s)$, $s \leq 0$, и является нормальной.

При таком предположении согласно принципу максимума [5]

$$\Delta'_*(s) v^*(s) = \max_{\|v\| \leq 1} \Delta'_*(s) v, \quad s \leq 0, \quad (5)$$

где

$$\Delta'_*(s) = \psi'_*(s) B + \Delta'_0, \quad s \leq 0, \quad (6)$$

а $\psi_*(s)$, $s \leq 0$, - решение сопряженной системы

$$d\psi_*/ds = -A'\psi_*, \quad \psi'_*(0) = a'A^{-1} - \lambda'_0 H, \quad (7)$$

в которой λ_0 - вектор множителей Лагранжа размерности m . Заметим, что в то же время

$$\Delta'_*(s) = (a'A^{-1} - \lambda'_0 H) \Phi(s) + \Delta'_0, \quad s \leq 0,$$

где $\Phi(s) = G(s)B$, а $G(s)$, $s \leq 0$, - матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$dG/ds = -GA, \quad G(0) = E_n.$$

Предположение 4. Выполнены условия $\Delta_*(s) \neq 0$, $s \leq 0$; $\det I_0 \neq 0$, где

$$I_0 = \int_{-\infty}^0 \frac{H\Phi(s) \left(\Delta_*(s) \Delta'_*(s) - \|\Delta_*(s)\|^2 E_r \right) \Phi'(s) H'}{\|\Delta_*(s)\|} ds.$$

При выполнении первого из этих условий оптимальное управление в задаче (4), как видно из (5), допускает представление

$$v^*(s) = \Delta_*(s) / \|\Delta_*(s)\|, \quad s \leq 0. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$\Delta'(\tau, \lambda, \mu) = \Psi'(\tau, \lambda, \mu) B + \Delta'_0, \quad (9)$$

где $\Psi(\tau, \lambda, \mu)$, $\tau \in [0, T]$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, - решение начальной задачи

$$\mu d\Psi/d\tau = -A'\Psi, \quad \Psi'(T) = A'A^{-1} - \lambda'H. \quad (10)$$

Из доказанной в [4] теоремы следует, что при выполнении предположений 1-4 в задаче (3) с достаточно малым μ существует оптимальное управление вида

$$v^0(\tau, \mu) = \Delta(\tau, \lambda(\mu), \mu) / \|\Delta(\tau, \lambda(\mu), \mu)\|, \quad \tau \in [0, T],$$

при этом имеет место асимптотическое разложение

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad (11)$$

старший коэффициент которого есть вектор множителей Лагранжа, соответствующий решению задачи (4).

Заметим, что в силу (6), (7), (9), (10)

$$\Psi(\tau, \lambda_0, \mu) = \Psi_*((\tau - T)/\mu), \quad \Delta(\tau, \lambda_0, \mu) = \Delta_*((\tau - T)/\mu), \quad \tau \in [0, T]. \quad (12)$$

В [4] приведен алгоритм, с помощью которого можно вычислить коэффициенты разложения (11). Применяя его, обнаруживаем, что в данном случае $\lambda_k = 0$, $k \geq 1$.

Вернемся к исходной задаче (1). Оптимальное управление в ней имеет вид

$$u^0(t, \mu) = v^0(\mu t, \mu) = \Delta(\mu t, \lambda(\mu), \mu) / \|\Delta(\mu t, \lambda(\mu), \mu)\|, \quad t \in [0, T/\mu],$$

а управление

$$u(t, \mu) = \Delta(\mu t, \lambda_0, \mu) / \|\Delta(\mu t, \lambda_0, \mu)\|, \quad t \in [0, T/\mu],$$

будет асимптотически оптимальным. Как видно из (8), (12), оно представимо в виде

$$u(t, \mu) = \Delta_*(t - T/\mu) / \|\Delta_*(t - T/\mu)\| = v^*(t - T/\mu), \quad t \in [0, T/\mu].$$

Обратим внимание на то, что это асимптотическое приближение к решению исходной задачи не зависит от начального состояния x_0 динамической системы.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963.

2. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М., 1980.

3. Плотников В.А. Метод усреднения в задачах управления. Киев, 1992.

4. Калинин А.И., Семенов К.В. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 32.

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.

Поступила в редакцию 06.04.2004.

Анатолий Иосифович Калинин - доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой методов оптимального управления.

Константин Вячеславович Семенов - аспирант кафедры методов оптимального управления. Научный руководитель - А.И. Калинин.