УДК 517.544.8

Т.И. ГАТАЛЬСКАЯ, Э.И. ЗВЕРОВИЧ

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ОТРЕЗКУ

An explicit spectral decomposition of the operator for singular integration by interval is obtained.

Пусть $A:H \to H$ - самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Известная спектральная теорема ([1, гл. 9]) утверждает, что справедливы следующие представления:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_\lambda, \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot dE_\lambda, \tag{1}$$

где I - тождественный оператор («единица»), $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbf{R}\}$ - соответствующее оператору A «разложение единицы», т. е. специально построенное неубывающее семейство проекторов, а операторные интегралы понимаются в смысле Римана - Стилтьеса.

Равенства (1) имеют многочисленные приложения, которые, однако, затрудняются тем, что существование разложения единицы в общем случае устанавливается с помощью довольно сложных процедур. Лишь в некоторых весьма частных случаях (например, для операторов умножения, дифференцирования, вполне непрерывных и некоторых других) спектральное разложение находится с помощью более простых средств или в явном виде. Цель этой статьи - дать новый важный пример оператора, спектральное разложение которого находится в явном виде, и предъявить это разложение.

Для этого рассмотрим оператор сингулярного интегрирования $S:L_2[-a,\ a] \to L_2[-a,\ a]$, действующего по правилу

$$(S\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \ t \in [-a,\ a] \subset \mathbf{R}. \tag{2}$$

Этот оператор изучен очень хорошо. Известно, что он ограничен и, очевидно, что самосопряжен. Кроме того, справедливо следующее

Утверждение. *Спектр оператора S - непрерывный и совпадает с отрезком* $[-1,\ 1]$; $\|S\| = 1$; *собственных функций у оператора S в пространстве $L_2[-a,a]$ нет.*

Доказательство. В пространстве $L_2[-a,\ a]$ рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$\lambda \cdot \varphi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\ d\tau = g(\tau), \ -a < t < a, \tag{3}$$

с параметром $\lambda\in\mathbf{R}$. Вводя новую неизвестную функцию

$$\Phi(z):=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\ \Phi(\infty):=0,$$

аналитическую в $\hat{\mathbf{C}}\backslash[-a,\,a]$, и используя формулы Сохоцкого [2]

$$\Phi^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\ t\in(-a,a),$$

сведем уравнение (3) к равносильной ему задаче линейного сопряжения (Римана)

$$(\lambda-1)\Phi^{+}(t)-(\lambda+1)\Phi^{-}(t)=g(t),\ \Phi(\infty)=0,\ -a<t<a. \tag{4}$$

Если $\lambda=1$ или $\lambda=-1$, то задача (4) вырождается в краевую задачу об аналитическом продолжении функции g с соответствующего берега разреза [-1, 1] на остальную часть плоскости $\hat{\mathbf{C}}$. Такая задача имеет не более одного решения (в силу теоремы единственности аналитических функций), к тому же она разрешима не при любой функции g. Это означает, что обе точки $\lambda=\pm1$ являются точками спектра оператора S, причем не существует нетривиальных собственных функций, соответствующих этим точкам спектра.

Если $\lambda\neq\pm1$, то задачу (4) можно переписать в более привычном виде

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Phi^{-}(t)+\frac{g(t)}{\lambda-1},\ -a<t<a.$$

Желая применить к ней известную [3] теорию задачи Римана, начнем рассмотрение с однородной задачи

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\Phi^{-}(t),\ -a<t<a,\ \Phi(\infty)=0, \tag{5}$$

равносильной однородному $(g(t)\equiv0)$уравнению (3). Так как коэффициент однородной задачи - кусочно-постоянный и вещественный, то асимптотика ее нетривиальных решений такова:

$$\Phi(z)\asymp(z\pm a)^{k/2}\text{ при }z\to\pm a,$$

где k - целое число. Это значит, что принадлежащим пространству $L_2[-a,\,a]$ собственным функциям уравнения (3) соответствуют ограниченные решения задачи (5). Но ограниченных решений задача (5) не имеет, так как индекс к ее коэффициента неположителен. Действительно, он равен

$$\kappa=\left[\frac{1}{2\pi}\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right]+\left[-\frac{1}{2\pi}\arg\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right]=\begin{cases}0, & |\lambda|>1,\\ -1, & |\lambda|<1,\end{cases}$$

где [...] означает целую часть. Это же равенство показывает, что при $|\lambda|>1$ неоднородное уравнение (3) разрешимо безусловно, а в случае $|\lambda|<1$ - лишь при выполнении условия

$$\int_{-a}^{a}g(t)\ \Psi^{+}(t)\ \ dt=0, \tag{6}$$

где Ψ - любое суммируемое (т. е. принадлежащее пространству $L_1[-a,\,a]$) решение однородной задачи

$$\Psi^{+}(t)=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\ \Psi^{-}(t),\ -a<t<a,\ \Psi(\infty)=0, \tag{7}$$

называемой «союзной» к задаче (5).

В отличие от (5) задача (7) имеет одно (с точностью до постоянного множителя) нетривиальное решение, которое легко вычисляется и равно

$$\Psi(z)=\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\left(\frac{a-z}{a+z}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1-\lambda}{1+\lambda}},\ z\in\hat{\mathbf{C}}\setminus[-1,\ 1]. \tag{8}$$

Так как решение «союзной» задачи (7) отлично от тождественного нуля, то условие (6) для любой функции g не выполняется. Значит, уравнение (3) не является безусловно разрешимым, а потому все точки $\lambda \in [-1, 1]$ принадлежат спектру. Доказательство окончено.

Учитывая, что коэффициенты задач (5) и (7) - взаимно обратные, заключаем, что функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \left(\frac{a - z}{a + z} \right)^{-\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\lambda}{1+\lambda}}, \ z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus [-1, 1],$$

является нетривиальным суммируемым (т. е. принадлежащим пространству $L_1[-a, a]$) решением задачи (5). Далее, учитывая связь между задачей (5) и интегральным уравнением (3), заключаем, что функция

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\frac{a - x}{a + x} \right)^{-\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1-\lambda}{1+\lambda}}, \ -a < x < a, \qquad (9)$$

является собственной функцией оператора S, лежащей в пространстве $L_1[-a, a] \sqsupset L_2[-a, a]$ (напомним, что у оператора S нет собственных функций в $L_2[-a, a]$).

Спектральное разложение оператора S будем искать, используя семейство $\{\varphi_\lambda | -1 < \lambda < 1\}$ его собственных функций (9). С этой целью возьмем известное разложение функции f в интеграл Фурье

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuy} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivy} f(v) dv$$

и сделаем в нем следующие замены переменных

$$y = \ln \frac{a + x}{a - x}, \ u = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}, \ v = \ln \frac{a + t}{a - t}.$$

Тогда получим
$$f\left(\ln \frac{a + x}{a - x} \right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \ln \frac{a + x}{a - x} \right) \frac{2 \ d\lambda}{1 - \lambda^2} \times$$
$$\times \int_{-a}^{a} \exp\left(-\frac{i}{2\pi} \ln \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \ln \frac{a + y}{a - y} \right) f\left(\ln \frac{a + y}{a - y} \right) \frac{2a \ dy}{a^2 - y^2}.$$

Поделив это равенство на $\sqrt{a^2 - x^2}$ и введя новую функцию

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} f\left(\ln \frac{a + x}{a - x} \right),$$

получим искомое разложение единицы, соответствующее оператору сингулярного интегрирования

$$\hat{f}(x) = \frac{a}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(\frac{a + x}{a - x} \right)^{-\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \frac{d\lambda}{1 - \lambda^2} \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}} \left(\frac{a + y}{a - y} \right)^{\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda}} \hat{f}(y) dy. \qquad (10)$$

Учитывая обозначение (9), перепишем это равенство в следующем виде:

$$\hat{f}(x) = \frac{a}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \varphi_\lambda(x) \frac{d\lambda}{1 - \lambda^2} \int_{-a}^{a} \overline{\varphi_\lambda(y)} \hat{f}(y) dy.$$

Действуя на это равенство оператором сингулярного интегрирования S, после перемены порядка интегрирования получим

$$\left(S \ \hat{f} \right)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{dt}{t - x} \frac{a}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_\lambda(t)}{1 - \lambda^2} \int_{-a}^{a} \overline{\varphi_\lambda(y)} \hat{f}(y) \ dy =$$

$$=\frac{a}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{d\lambda}{1-\lambda^2}\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_\lambda(t)dt}{t-x}\int_{-a}^{a}\overline{\varphi_\lambda(y)}\hat{f}(y)dy=\frac{a}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\varphi_\lambda(x)\frac{\lambda d\lambda}{1-\lambda^2}\int_{-a}^{a}\overline{\varphi_\lambda(y)}\hat{f}(y)dy.$$

Рассмотрим уравнение (3) при $\lambda=\pm1$. В случае $\lambda=-1$ равносильная этому уравнению задача (4) имеет вид

$$\Phi^+(t)=-\frac{1}{2}g(t),\ -a<t<a,\ \Phi(\infty)=0, \tag{11}$$

и, как уже отмечалось, представляет собой задачу об аналитическом продолжении функции g с верхнего берега разреза $[-a,\ a]$ до функции, аналитической на $\hat{\mathbb{C}}\backslash[-a,\ a]$ и представимой интегралом типа Коши с плотностью из $L_2[-a,\ a]$. Если это аналитическое продолжение существует, то его можно получить, применив разложение единицы (10) для функции g, заменяя в этом равенстве вещественную переменную t на комплексную переменную z и требуя, чтобы сходился полученный таким образом интеграл

$$g(z)=\frac{a}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}}\left(\frac{a+z}{a-z}\right)^{-\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\frac{d\lambda}{1-\lambda^2}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\left(\frac{a+y}{a-y}\right)^{\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}g(y)dy.$$

Таким образом, критерием аналитической продолжимости функции g с верхнего берега разреза $[-a,\ a]$ является выполнение неравенства

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{(1+\lambda)^2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{\frac{-i}{2\pi}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\frac{g(t)\ dt}{\sqrt{a^2-t^2}}\right|^2 d\lambda<+\infty.$$

Если это условие выполняется, то решение задачи (11), равносильной уравнению (3), имеет следующий вид:

$$f(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=-\frac{1}{2}g(x)-\frac{a}{\pi^2\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\times$$

$$\times\frac{d\lambda}{(1+\lambda)^2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{-\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\frac{g(t)dt}{\sqrt{a^2-t^2}}.$$

В случае $\lambda=1$ задача (4), равносильная уравнению (3), имеет вид

$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{2}g(t),\ -a<t<a,\ \Phi(\infty)=0, \tag{12}$$

и представляет собой задачу об аналитическом продолжении функции g с нижнего берега разреза $[-a,\ a]$ до функции, аналитической на $\hat{\mathbb{C}}\backslash[-a,\ a]$, представимой интегралом типа Коши с плотностью из $L_2[-a,\ a]$. Эта задача решается аналогично задаче (11). Критерием ее разрешимости является неравенство:

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{(1-\lambda)^2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{-\frac{-i}{2\pi}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\frac{g(t)\ dt}{\sqrt{a^2-t^2}}\right|^2 d\lambda<+\infty,$$

и если оно выполняется, то решение задачи (12) имеет вид

$$f(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\frac{1}{2}g(x)+\frac{a}{\pi^2\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\times$$

$$\times\frac{d\lambda}{(1-\lambda)^2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{-\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\frac{g(t)dt}{\sqrt{a^2-t^2}}.$$

1. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М., 1983.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Зверович Э.И. // УМН. 1971. Т. 26. Вып. 1(157). С. 113.

Поступила в редакцию 14.04.2004.

Татьяна Ивановна Гатальская - ассистент кафедры общей математики и информатики.
Эдмунд Иванович Зверович - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций.