УДК 519.2

ФУ ЛИ (КНР)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ДВУМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

In this paper, the statistical estimator of the pulse transfer function of a two-dimensional linear system disturbed by the white noise is proposed. The performance of this estimator is studied. Conditions for the asymptotic normality of the finite dimensional distributions of the normalized error in estimation of the pulse transfer function are given.

Пусть задана двумерная линейная система с импульсной переходной функцией $\mathbf{H}(\tau)=\begin{bmatrix} H_1(\tau) \\ H_2(\tau) \end{bmatrix}, \tau \geq 0$, где $H_i(\tau)=0$, $\tau<0$, Компонента $H_1(\tau)=H(\tau)$

$\tau\geq 0$, предполагается неизвестной, а вторая компонента $H_2(\tau)=g_\Delta(\tau)$, $\tau\geq 0$, $\Delta>0$, известна и может изменяться в зависимости от параметра Δ. Система возмущается гауссовским белым шумом, т. е. наблюдаются процессы

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t}H(t-s)dW(s),\ t\in R;\ X_\Delta(t)=\int_{-\infty}^{t}g_\Delta(t-s)dW(s),\ t\in R,$$

где $W(s)$, $s\in R$, - стандартная случайная винеровская мера на R.

По наблюдениям за реализациями процессов Y, X_Δ необходимо оценить функцию $H(\tau)$, что является одной из задач теории линейных систем. При ее решении наряду с различными детерминированными методами рассматриваются статистические подходы (см., например, [1, 2]). В работе [3] изучено поведение погрешности оценивания импульсной переходной функции одномерной линейной системы. В предлагаемой работе рассматривается более сложный случай - двумерная линейная система. В качестве оценки для H используются совместные коррелограммы между случайными процессами Y, X_Δ. Устанавливаются условия, при которых имеет место асимптотическая нормальность конечномерных распределений нормированной погрешности оценки импульсной переходной функции.

Пусть $g_\Delta=(g_\Delta(t),\ t\in R)$, $\Delta>0$, - семейство действительнозначных функций таких, что $g(t)=0$ при $t<0$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $g_\Delta\in L_1(R)\cap L_2(R)$;

б) $M=\sup\limits_{\Delta}\|g_\Delta\|_1<\infty$;

в) существует такое число $c\in R$ и $c\neq 0$, что для всех $x\in R$ $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\left|g_\Delta^*(x)-c\right|=0$ и, более того, для

$$a\in(0,\infty)\ \lim_{\Delta\to\infty}\sup_{-a\leq x\leq a}\left|g_\Delta^*(x)-c\right|=0. \tag{1}$$

Из условий (1а), (1б) следует, что функция g_Δ^* (преобразование Фурье функции g_Δ) является ограниченной и непрерывной и, кроме того, $\sup\limits_{\Delta}\left|g_\Delta^*(x)\right|\leq M$

Пусть $\tau\geq 0$; $T>0$, $\Delta>0$. В качестве оценки для $H(\tau)$ рассматриваем статистику

$$\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)=(cT)^{-1}\int_0^T X_\Delta(t)Y(t+\tau)dt. \tag{2}$$

Из соотношения (2) следует, что

$$E\left\{\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)\right\}=c^{-1}E\left\{X_\Delta(t)Y(t+\tau)\right\}=c^{-1}\int_0^\infty g_\Delta(u)H(u+\tau)du. \tag{3}$$

Ясно, что $E\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)\neq H(\tau)$, т. е. оценка является смещенной и дальнейший анализ связан с изучением ее асимптотического поведения при $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$. Положим

$$Z_{T,\Delta}(\tau)=\sqrt{T}\left[\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)-E\left\{\tilde{H}_{T,\Delta}(\tau)\right\}\right],\ \tau\geq 0.$$

Лемма 1. Пусть $H\in L_2(R)$. Тогда для всех τ_1, $\tau_2\geq 0$ справедливо равенство

$$E\left\{Z_{T,\Delta}(\tau_1)Z_{T,\Delta}(\tau_2)\right\}=C_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2),$$

где

$$C_{T,\Delta}(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[e^{i(\tau_2-\tau_1)u_1}\left|H^*(u_1)\right|^2\left|g_\Delta^*(u_2)\right|^2+$$

$$+e^{i(\tau_1u_1+\tau_2u_2)}H^*(u_1)H^*(u_2)\overline{g_\Delta^*(u_1)}\ \overline{g_\Delta^*(u_2)}\Big]\Phi_T(u_2-u_1)du_1du_2;$$

$$\Phi_T(x) = \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin(Tx/2)}{x/2}\right)^2, \quad x \in R.$$

Доказательство проводится прямым вычислением.

Положим

$$C(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{i(\tau_2-\tau_1)u}\left|H^*(u)\right|^2 + e^{i(\tau_2+\tau_1)u}\left(H^*(u)\right)^2\right]du, \ \tau_1, \tau_2 \geq 0. \qquad (4)$$

Лемма 2. Пусть 1) $H \in L_2(R)$; 2) существует такое $p>2$, что $H^* \in L_p(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду (относительно меры Лебега) на R. Тогда для всех $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$\lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} E\left\{Z_{T,\Delta}(\tau_1)Z_{T,\Delta}(\tau_2)\right\} = C(\tau_1, \tau_2).$$

Доказательство. Подход к доказательству аналогичен [3] и поэтому опускается.

Пусть $(Z(\tau), \tau\geq 0)$ - центрированный гауссовский процесс с корреляционной функцией $C(\tau_1, \tau_2)$, определенной в (4). Запись $Z_{T,\Delta} \Rightarrow Z$ обозначает сходимость при $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ всех конечномерных распределений процесса $(Z_{T,\Delta}(\tau), \tau\geq 0)$ к соответствующим конечномерным распределениям процесса Z.

Лемма 3. Для любого натурального числа $n\geq 2$ и любых $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [0, \infty)$ справедливо равенство

$$E\left\{\prod_{k=1}^{n} Z_{T,\Delta}(\tau_k)\right\} = \sum_{D_1,\ldots,D_n} (Tc^2)^{-n/2}\int_0^T \ldots \int_0^T\left[\prod_{k=1}^{n}\operatorname{cov}\{D_k\}\right]dt_1 \ldots dt_n, \qquad (5)$$

где c - константа из условия (1 в), сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям $(D_1, \ldots, D_n)$ таблицы $D = \begin{pmatrix} X_\Delta(t_1) & Y_\Delta(t_1+\tau_1) \\ X_\Delta(t_2) & Y_\Delta(t_2+\tau_2) \\ \vdots & \vdots \\ X_\Delta(t_n) & Y_\Delta(t_n+\tau_n) \end{pmatrix}$ на непересекающиеся двухэлементные подмножества D_k, $k=1, 2, \ldots, n$, таблицы D, которые не совпадают с ее строками; $\operatorname{cov}\{D_k\}=E\{\xi\eta\}$, если $D_k=\{\xi\eta\}$.

Доказательство. Пользуясь теоремой Фубини - Тонелли, равенством (3) и Формулой Леонова - Ширяева [4], можно исследовать соотношение (5).

Теорема 1. Пусть 1) $H \in L_2(R)$; 2) $H^* \in L_1(R)\cap L_\infty(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда для всех $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in [0, \infty)$, $n\geq 1$,

$$\text{а) } \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} E\left\{\prod_{k=1}^{n} Z_{T,\Delta}(\tau_k)\right\} = E\left\{\prod_{k=1}^{n} Z(\tau_k)\right\}; \quad \text{б) } Z_{T,\Delta} \Rightarrow Z. \qquad (6)$$

Доказательство. Поскольку процессы $Z_{T,\Delta}$ и Z имеют нулевое среднее, соотношение (6 а) выполнено при $n=1$. При $n=2$ это соотношение установлено в лемме 2, поэтому в дальнейшем $n\geq 3$. Следуя принятой терминологии, скажем, что элементы D_{k_1}, D_{k_2} образуют простой блок, если их объединение совпадает с двумя какими-либо строками таблицы D. Соответственно разбиение $D_1, \ldots, D_n$ таблицы D будем называть простым, если его элементы можно разбить по парам, образующим простые блоки. Ясно, что это может иметь место лишь в случае четных n. Разбиение $D_1, \ldots, D_n$, не являющееся простым, будем называть сложным. Разобьем сумму в правой части равенства (5) на сумму $\sum' = \sum_{T,\Delta}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ по простым разбиениям и сумму $\sum'' = \sum''_{T,\Delta}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ по сложным разбиениям. Для доказательства теоремы нужно показать, что для любых $n\geq 3$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in [0, \infty)$

$$\text{а) } \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} \sum{}' = E\left\{\prod_{k=1}^{n} Z(\tau_k)\right\}; \quad \text{б) } \lim_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} \sum{}'' = 0. \tag{7}$$

Докажем соотношение (7 а). Число $n\geq 3$ при этом четное. Если пара D_{k_1}, D_{k_2} элементов разбиения образует простой блок, то найдутся такие $j, p\in\{1, \ldots, n\}$, что либо

$$D_{k_1} = \left\{X_\Delta(t_j), X_\Delta(t_p)\right\}; \; D_{k_2} = \left\{Y_\Delta(t_j+\tau_j), Y_\Delta(t_p+\tau_p)\right\},$$

либо

$$D_{k_1} = \left\{X_\Delta(t_j), Y_\Delta(t_p+\tau_p)\right\}; \; D_{k_2} = \left\{X_\Delta(t_p), Y_\Delta(t_j+\tau_j)\right\}.$$

Элементы первого типа обозначим $D_{k_1}^{(1)}$, $D_{k_2}^{(1)}$, а второго типа - $D_{k_1}^{(2)}$, $D_{k_2}^{(2)}$. Ясно, что

$$\Sigma' = \sum_{\{k_1,k_2\}\ldots\{k_{n-1},k_n\}} (Tc^2)^{-n/2} \int_0^T \ldots \int_0^T \prod_{\substack{j=1 \\ j-\text{нечётное}}}^{n-1} \left[\operatorname{cov}\left\{D_{k_j}^{(1)}\right\}\operatorname{cov}\left\{D_{k_{j+1}}^{(1)}\right\} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{cov}\left\{D_{k_j}^{(2)}\right\}\operatorname{cov}\left\{D_{k_{j+1}}^{(2)}\right\}\right] dt_1 \ldots dt_n,$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества $\{1, \ldots, n\}$ на непересекающиеся двухэлементные подмножества. Так как (см. лемму 1)

$$\operatorname{cov}\left\{D_{k_j}^{(1)}\right\}\operatorname{cov}\left\{D_{k_{j+1}}^{(1)}\right\} + \operatorname{cov}\left\{D_{k_j}^{(2)}\right\}\operatorname{cov}\left\{D_{k_{j+1}}^{(2)}\right\} =$$

$$= E\left\{X_\Delta(t_{k_j})X_\Delta(t_{k_{j+1}})\right\}E\left\{Y_\Delta(t_{k_j}+\tau_{k_j})Y_\Delta(t_{k_{j+1}}+\tau_{k_{j+1}})\right\} +$$

$$+ E\left\{X_\Delta(t_{k_j})Y_\Delta(t_{k_{j+1}}+\tau_{k_{j+1}})\right\}E\left\{X_\Delta(t_{k_{j+1}})Y_\Delta(t_{k_j}+\tau_{k_j})\right\} =$$

$$= B_{X_\Delta X_\Delta}(t_{k_{j+1}}-t_{k_j})B_{Y_\Delta Y_\Delta}(t_{k_{j+1}}-t_{k_j}+\tau_{k_{j+1}}-\tau_{k_j}) +$$

$$+ B_{X_\Delta Y_\Delta}(t_{k_{j+1}}-t_{k_j}+\tau_{k_{j+1}})B_{X_\Delta Y_\Delta}(t_{k_j}-t_{k_{j+1}}+\tau_{k_j}) = L(t_{k_j}, t_{k_{j+1}}),$$

то $$\sum{}' = \sum_{\{k_1,k_2\}\ldots\{k_{n-1},k_n\}} \prod_{\substack{j=1 \\ j-\text{нечетное}}}^{n-1} \frac{1}{Tc^2}\int_0^T\int_0^T L(t_{k_j}, t_{k_{j+1}})\,dt_{k_j}\,dt_{k_{j+1}}$$ и

$$\frac{1}{Tc^2}\int_0^T\int_0^T L(t_{k_j}, t_{k_{j+1}})\,dt_{k_j}\,dt_{k_{j+1}} = E\left\{Z_{T,\Delta}(\tau_{k_j})Z_{T,\Delta}(\tau_{k_{j+1}})\right\} = C_{T,\Delta}(\tau_{k_j}, \tau_{k_{j+1}}).$$

Отсюда в силу леммы 2 и формул Леонова - Ширяева (см., например, [4]) вытекает соотношение (7 а).

Перейдем к доказательству соотношения (7 б). Каждое сложное разбиение можно представить в виде объединения конечного числа неразложимых блоков, т. е. блоков, объединение элементов которых совпадает с каким-либо числом строк таблицы *D,* никакое их подмножество таким свойством не обладает. Минимальным неразложимым блоком является простой блок. Следовательно, в представлении сложного разбиения всегда присутствует неразложимый блок, содержащий не менее трех строк таблицы *D.* Заметим, что, переставив соответствующим образом строки, которые образуют неразложимый блок, можно добиться того, что элементы этого блока соединяют первую строку со второй, вторую - с третьей и т. д., а последняя строка соединяется с первой. Соответственно сумму Σ'' можно записать в виде

$$\sum{}'' = \sum{}'' \prod_{p=1}^{d} I_{T,\Delta}^{(m_p)}, \tag{8}$$

где d - число неразложимых блоков, представляющих сложное разбиение; $m_p\geq 2$, причем всегда найдется такое p, что $m_p\geq 3$, а $I_{T,\Delta}^{(m_p)}$ - интегралы вида

$$I_{T,\Delta}^{(m)} = (Tc^2)^{-m/2} \int_0^T \ldots \int_0^T \prod_{j=1}^{m} \left[\operatorname{cov}\{D_j\} \right] dt_1 \ldots dt_m .$$

При m=2

$$\sup_{T,\Delta} | I_{T,\Delta}^{(2)} | \le \frac{M^2}{2\pi c^2} \left\| H^* \right\|_2^2 < \infty . \qquad (9)$$

При $m \ge 3$

$$I_{T,\Delta}^{(m)} = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} U_T(x_1 - x_2) U_T(x_2 - x_3) \ldots U_T(x_{m-1} - x_m) U_T(x_m - x_1) \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{m} e^{i\alpha_k x_k} g_1(x_1) \ldots g_m(x_m) dx_1 \ldots dx_m , \qquad (10)$$

где $U_T(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \frac{\sin \frac{Tx}{2}}{x}$, $x \in R$ (см., например, [5]); α_k равняется 0, или $\pm\tau_k$, или $\tau_{k+1}-\tau_k$; $g_k(x)$ равняется $|g_\Delta^*(x)|^2$, или $|H^*(x)|^2$, или $H^*(x)\overline{g_\Delta^*(x)}$ в зависимости от конкретной структуры неразложимого блока $\{D_1, \ldots, D_m\}$. Причем всегда присутствуют хотя бы два различных типа этих функций. Поскольку по условию (16) и условию 2) теоремы 1 функции $|g_\Delta^*(x)|$, $|H^*(x)|$ ограничены и $H^* \in L_1(R) \cap L_2(R)$, то (см., например, [5]) $\lim_{T\to\infty} \sup_\Delta | I_{T,\Delta}^{(m)} | = 0$. Отсюда и из соотношений (8), (9) вытекает соотношение (7 б).

Теорема 2. Пусть 1) $H \in L_2(R)$; 2) существует $p>2$, $H^* \in L_{2p}(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R; 4) $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что для любого $m \ge 3$

$$\frac{\left\| \tilde{f}_\Delta \right\|_2^{a(m)} \left\| \tilde{f}_\Delta \right\|_p^{b(m)}}{T^{\frac{(m-2)(p-2)}{2p}}} \to 0 , \qquad (11)$$

где $\tilde{f}_\Delta(x) = \left| g_\Delta^*(x) \right|^2$, $\quad a(m) = \begin{cases} 1, \text{ если } m \ge 4; \\ 0, \text{ если } m = 3, \end{cases} \quad b(m) = \begin{cases} \operatorname{ent}(\frac{m}{2}) - 1, \text{ если } m \ge 4; \\ 1, \text{ если } m = 3, \end{cases}$

тогда имеют место соотношения (6).

Доказательство в целом повторяет схему доказательства теоремы 1. Отличие состоит в обосновании сходимости к нулю интегралов $I_{T,\Delta}^{(m)}$ (10). Поскольку функция H^* не предполагается интегрируемой и ограниченной, то вместо работы [5] воспользуемся работой [6]. При этом нужно учитывать возможный вид функций $g_j, j=l, \ldots, m$ (см. (10)). Пусть k_1, k_2, k_3 - соответственно число функций g_j в интеграле (10), совпадающих с функциями $\left|g_\Delta^*\right|^2$, $\left|H^*\right|^2$, $H^*\overline{g_\Delta^*}$

Ясно, что $k_1+k_2+k_3=m$. При этом $k_1 \le \operatorname{ent}(\frac{m}{2})$, поскольку функции $\left|g_\Delta^*\right|^2$ соответствует элемент разбиения D_k, содержащий два элемента первого столбца таблицы D. Кроме того, среди функций g_j всегда присутствует хотя бы одна функция, отличная от $\left|g_\Delta^*\right|^2$. Циклической заменой переменных можно добиться того, что аргументом этой функции является x\. Согласно работе [6] при $m \ge 4$

$$\left| I_{T,\Delta}^{(m)} \right| \le \frac{A(m) \left\| \tilde{f}_\Delta \right\|_2 \left\| \tilde{f}_\Delta \right\|_p^{k_1 - 1}}{T^{\frac{(m-2)(p-2)}{2p}}} ,$$

где $A(m) = A\left[\max\left\{1,\ M\left\|H^*\right\|_2,\ M\left\|H^*\right\|_p,\ M\left\|H^*\right\|_4^2,\ M\left\|H^*\right\|_{2p}^2\right\}\right]^m$, A - константа, фигурирующая в работе [6]. В силу условий 1), 2) теоремы 2 $A(m)<\infty$. Поскольку $\left\|\tilde f_\Delta\right\|_p \to\infty$ при $\Delta\to\infty$, то можно считать, что $\left\|\tilde f_\Delta\right\|_p \geq 1$. Таким образом, для любых возможных значений k_1, k_2, k_3, при $m\geq 4$

$$|I_{T,\Delta}^{(m)}| \leq \frac{A(m)\left\|\tilde f_\Delta\right\|_2 \left\|\tilde f_\Delta\right\|_p^{b(m)}}{T^{\frac{(m-2)(p-2)}{2p}}}. \tag{12}$$

Рассмотрим случай m=3. В этой ситуации только одна из функций $\{g_j,\ j=1, 2, 3\}$ может совпадать с $\tilde f_\Delta$. Производя циклическую замену переменных, можно добиться того, что ее аргументом будет x_3, то (см., например, [6])

$$|I_{T,\Delta}^{(3)}| \leq \frac{A(3)\left\|\tilde f_\Delta\right\|_p}{T^{\frac{(p-2)}{2p}}}. \tag{13}$$

Из неравенств (12), (13) и соотношений (11) следует, что для любого $m\geq 3$ $\lim\limits_{\substack{T\to\infty \\ \Delta\to\infty}} |I_{T,\Delta}^{(m)}| = 0$

Асимптотическая нормальность процесса $Z_{T,\Delta}$ лишь частично характеризует качество оценки $\tilde H_{T,\Delta}$. Более важная информация содержится в асимптотических свойствах погрешности $W_{T,\Delta}=(W_{T,\Delta}(\tau),\ \tau\geq 0)$, где

$$W_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}[\tilde H_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)].$$

Погрешность $W_{T,\Delta}$ представим в виде суммы

$$W_{T,\Delta}(\tau) = Z_{T,\Delta}(\tau) + V_{T,\Delta}(\tau),$$

где $V_{T,\Delta} = \left(V_{T,\Delta}(\tau), \tau\geq 0\right)$, $V_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\left[E\left\{\tilde H_{T,\Delta}(\tau)\right\} - H(\tau)\right]$.

Пусть $S\subseteq[0,\ \infty)$, $W_{T,\Delta}^{(S)}=(W_{T,\Delta}(\tau),\ \tau\in S)$. Аналогично определяется процесс $Z_{(S)}$.

Определение. Пусть $\tau\in[0,\ \infty)$, $\alpha\in(0,\ 1]$. Скажем, что точка τ принадлежит множеству S_α, если функция H удовлетворяет в точке τ условию Липшица с показателем α, т. е. найдутся такие $\varepsilon=\varepsilon(\tau)>0$, $A=A(\tau)>0$, что при $|\tau-s|<\varepsilon$, $|H(\tau)-H(s)|\leq A|\tau-s|^\alpha$.

Пусть функции g_Δ, $\Delta>0$ и константа c определены в условиях (1) и $\alpha\in(0,\ 1]$ Рассмотрим условия $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что

а) $\sqrt{T}(1 - \frac{g_\Delta^*(0)}{c}) \to 0$;

б) для любого $\varepsilon>0$ $\sqrt{T}\ |\int\limits_\varepsilon^\infty g_\Delta(t)dt| \to 0$;

в) для любого $\varepsilon>0$ $T\int\limits_\varepsilon^\infty g_\Delta^2(t)dt \to 0$;

г) существует такое $\varepsilon>0$, что

$$\sqrt{T}\int\limits_0^\varepsilon |g_\Delta(t)|\ t^\alpha dt \to 0. \tag{14}$$

Из равенства $\int\limits_0^\infty g_\Delta(t)dt = g_\Delta^*(0)$ и равенства (3) следует, что для любого $\tau\geq 0$

$$V_{T,\Delta}(\tau)=\frac{\sqrt{T}}{c}\int_0^\infty g_\Delta(u)\left[H(u+\tau)-H(\tau)\right]du+\sqrt{T}\left(\frac{g_\Delta^*(0)}{c}-1\right)H(\tau). \qquad (15)$$

Лемма 4. Пусть $H\in L_2(R)$, $\alpha\in(0,1]$. Если $\tau\in S_\alpha$ и дополнительно к условиям (1) $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что выполняются условия (14), то $V_{T,\Delta}(\tau)\to 0$.

Доказательство. Из условий (14) и равенства (15) следует, что $V_{T,\Delta}(\tau)\to 0$.

Теорема 3. Пусть $\alpha\in(0,\ 1]$ и выполнены условия: 1) $H\in L_2(R)$; 2) $H^*\in L_1(R)\cap L_\infty(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда, если $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что выполняются условия (14), то $W_{T,\Delta}^{(S_\alpha)}\Rightarrow Z^{(S_\alpha)}$

Доказательство. Теорема 3 непосредственно следует из теоремы 1, леммы 4 и свойства сходимости случайных процессов (см., например, [7]).

Теорема 4. Пусть $\alpha\in(0,\ 1]$ и выполнены условия: 1) $H\in L_2(R)$; 2) существует такое $p>2$, что $H^*\in L_{2p}(R)$; 3) функция H^* непрерывна почти всюду на R. Тогда, если $T\to\infty$, $\Delta\to\infty$ так, что выполняются условия (14) и, кроме того, для любого

$$m\geq 3 \quad \frac{\left\|\tilde f_\Delta\right\|_2^{a(m)}\left\|\tilde f_\Delta\right\|_p^{b(m)}}{T^{\frac{(m-2)(p-2)}{2p}}}\to 0, \quad \text{где} \quad \tilde f_\Delta(x)=\left|g_\Delta^*(x)\right|^2, \quad a(m)=\begin{cases}1, \text{ если } m\geq 4;\\ 0, \text{ если } m=3,\end{cases}$$

$$b(m)=\begin{cases}\operatorname{ent}(\frac{m}{2})-1, \text{ если } m\geq 4;\\ 1, \text{ если } m=3,\end{cases} \quad \text{то } W_{T,\Delta}^{(S_\alpha)}\Rightarrow Z^{(S_\alpha)}.$$

Доказательство. Теорема 4 непосредственно следует из теоремы 2, леммы 4 и свойства сходимости случайных процессов (см., например, [7]).

1. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и спектрального анализа. М., 1980.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. М., 1983.
3. Булдигiн В.В., Фу Ли // Теор. ймовiрн. та матем. статистика. 1996. № 54. С. 16.
4. Леонов В.П., Ширяев А.Н.//Теория вероятностей и ее применения. 1959. Вып. 4. № 3. С. 342.
5. Бенткус Р.//Литовский математический сборник. 1972. 12. № 3. С. 3.
6. Булдигiн В.В., Диховiчний О.О. // Теор. ймовiрн. та матем. статистика. 1995. №52. С. 10.
7. Билингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

Поступила в редакцию 04.05.2004.

Фу Ли - доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Пекинского университета транспорта.