Краткие сообщения

УДК 519.8

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, А.А. ПЛАТОНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

The formula of stability radius of a vector linear combinatorial problem is obtained, its principle of optimality defines by a partitioning of partial criteria set into groups with Pareto relation within each group and the jointly-extremal relation between them.

Рассмотрим типичную векторную (n-критериальную) комбинаторную задачу. Пусть на системе подмножеств (траекторий) $T \subseteq 2^E$, $|T| \geq 2$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geq 2$, задан векторный критерий $f(t,A) = (f_1(t,A), f_2(t,A), \dots, f_n(t,A)) \to \min_{t \in T}$, частными критериями которого являются линейные функции

$$f_i(t,A) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n = \{1,2,...,n\}, n \geq 1,$$

где $A = [a_{ij}]_{n \times m} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$. Будем полагать, что $f_i(\varnothing, A) = 0$.

Введем бинарное отношение $\succ$, порождающее в пространстве $\mathbf{R}^d$ любой размерности $d \in \mathbf{N}$ принцип оптимальности по Парето [1].

Пусть $s \in N_n$, $N_n = \bigcup_{r \in N_s} J_r$ – разбиение множества N_n на s групп, т. е. $J_r \neq \varnothing$, $r \in N_s$; $p \neq q \Rightarrow J_p \cap J_q = \varnothing$. Для этого разбиения введем множество $T^n(A, J_1, J_2, \dots, J_s)$ обобщенно-эффективных, или иначе $(J_1, J_2, \dots, J_s)$-эффективных, траекторий согласно формуле

$$T^n(A, J_1, J_2, \dots, J_s) = \{t \in T : \exists k \in N_s \ \ \forall t' \in T \quad (f_{J_k}(t,A) \overline{\succ} f_{J_k}(t',A))\}. \qquad (1)$$

Здесь $\overline{\succ}$, как обычно, означает отрицание отношения $\succ$, $f_J(t,A) = (f_{i_1}(t,A), f_{i_2}(t,A), ..., f_{i_h}(t,A))$, $J = \{i_1, i_2, ..., i_h\} \subseteq N_n$, $i_1 < i_2 < ... < i_h$.

Очевидно, что любая N_n-эффективная траектория $t \in T^n(A, N_n)$ ($s = 1$, т. е. множество N_n – одна группа) является оптимальной по Парето в пространстве всех траекторий T. Поэтому множество N_n-эффективных траекторий $T^n(A, N_n)$ является множеством Парето, которое будем обозначать $P^n(A)$.

В другом крайнем случае, когда $s = n$, множеством обобщенно-эффективных траекторий $T^n(A, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ является множество совокупно-экстремальных [2] траекторий, которое будем обозначать $C^n(A)$.

Итак, в данном контексте под параметризацией принципа оптимальности понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения, которая позволяет связать известные функции выбора – паретовскую и совокупно-экстремальную.

Векторную задачу поиска множества $T^n(A, J_1, J_2, \dots, J_s)$ обозначим через $Z^n(A, J_1, J_2, \dots, J_s)$. Ясно, что $T^1(A, N_1)$ – множество оптимальных траекторий скалярной (однокритериальной) линейной комбинаторной задачи $Z^1(A, N_1)$, где $A \in \mathbf{R}^m$, в схему которой вкладываются многие экстремальные задачи на графах, задачи булева программирования, ряд задач теории расписаний и др.

Следуя [3, 4], радиусом устойчивости векторной задачи $Z^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ назовем число

$$\rho^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)=\begin{cases}\sup\Xi, & \text{если } \Xi\neq\varnothing,\\ 0, & \text{если } \Xi=\varnothing,\end{cases}$$

где $\Xi=\{\varepsilon>0:\ \forall B\in\Omega(\varepsilon)\quad (T^n(A+B,J_1,J_2,\dots,J_s)\subseteq T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s))\}$, $\Omega(\varepsilon)=\{B\in\mathbf{R}^{n\times m}:\|B\|<\varepsilon\}$, $\|B\|=\max\{|b_{ij}|:(i,j)\in N_n\times N_m\}$, $B=[b_{ij}]_{n\times m}$. Ясно, что при выполнении равенства $T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)=T$ радиус устойчивости $\rho^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)=\infty$. Поэтому далее будем рассматривать лишь так называемые нетривиальные задачи, т. е. задачи, для которых $\overline{T^n}(A,J_1,J_2,\dots,J_s):=T\setminus T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)\neq\varnothing$.

Для любого непустого подмножества $J\subseteq N_n$ введем обозначение

$$P(A,J)=\{t\in T:\ \forall t'\in T\quad (f_J(t,A)\,\overline{\succ}\, f_J(t',A))\}.$$

Тогда имеем $P(A,N_n)=P^n(A)$, и поэтому ввиду (1) получаем

$$T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)=\{t\in T:\ \exists k\in N_s\quad (t\in P(A,J_k))\}. \tag{2}$$

Кроме того, положим

$$\Delta(t,t')=|(t\cup t')\setminus(t\cap t')|,$$
$$g_i(t,t',A)=f_i(t,A)-f_i(t',A),\quad i\in N_n.$$

Теорема. *Для радиуса устойчивости* $\rho^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ *нетривиальной задачи* $Z^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$, $n\geq 1$, $s\geq 1$, *справедлива формула*

$$\rho^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)=\min_{k\in N_s}\ \min_{t\in\overline{T^n}(A,J_1,J_2,\dots,J_s)}\ \max_{t'\in T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)}\ \min_{i\in J_k}\frac{g_i(t,t',A)}{\Delta(t,t')}. \tag{3}$$

Доказательство. Для краткости дальнейшего изложения правую часть формулы (3) обозначим φ, а левую – ρ. Учитывая непустоту множеств $\overline{T^n}(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ и $T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$, а также неравенство $\Delta(t,t')>0$, заключаем, что число φ неотрицательно.

Сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho\geq\varphi$. При $\varphi=0$ это неравенство очевидно. Пусть $\varphi>0$, $B\in\Omega(\varphi)$. Тогда согласно определению числа φ для любого индекса $k\in N_s$ и всякой траектории $t\in\overline{T^n}(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ существует такая траектория $t'\in T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$, что справедливы неравенства $g_i(t,t',A)\ \geq\ \varphi\Delta(t,t')\ >\ \|B\|\Delta(t,t')$, $i\in J_k$. Отсюда вытекает, что для любого индекса $i\in J_k$ верны соотношения

$$g_i(t,t',A+B)\ =\ g_i(t,t',A)+g_i(t,t',B)\ \geq\ g_i(t,t',A)-\|B\|\,\Delta(t,t')\ >\ 0.$$

Из сказанного следует, что для любых $B\in\Omega(\varphi)$, $t\in\overline{T^n}(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$, $k\in N_s$ существует траектория $t'\in T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ с условиями $f_i(t,A+B)\ >\ f_i(t',A+B)$, $i\in J_k$, т. е. $f_{J_k}(t,A+B)\succ f_{J_k}(t',A+B)$. Это значит, что для каждого индекса $k\in N_s$ траектория $t\notin P^n(A+B,J_k)$. Поэтому согласно (2) $t\in\overline{T^n}(A+B,J_1,J_2,\dots,J_s)$. Итак, для любой матрицы $B\in\Omega(\varphi)$ верно включение $T^n(A+B,J_1,J_2,\dots,J_s)\subseteq T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$. Следовательно, выполняется неравенство $\rho\geq\varphi$.

Остается доказать, что $\rho\leq\varphi$. Согласно определению числа $\varphi\geq 0$ найдутся индекс $p\in N_s$ и траектория $t^*\in\overline{T^n}(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ такие, что для всякой траектории $t\in T^n(A,J_1,J_2,\dots,J_s)$ существует индекс $q\in J_p$ с условием

$$g_q(t^*,\ t,A)\ \leq\ \varphi\Delta(t^*,\ t). \tag{4}$$

Построим матрицу $B^*=[b^*_{ij}]_{n\times m}$ по правилу

$$b^*_{ij}=\begin{cases}-\alpha, & \text{если } i=q,\ j\in N(t^*),\\ \alpha, & \text{если } i=q,\ j\notin N(t^*),\\ 0, & \text{если } i\in N_n\setminus\{q\},\ j\in N_m,\end{cases}$$

где $\varphi < \alpha < \varepsilon$. Очевидно, что $\| B^* \| = \alpha$, т. е. $B^* \in \Omega(\varepsilon)$. Учитывая строение матрицы B^* и неравенство (4), получаем $g_q(t^*, t, A + B^*) = g_q(t^*, t, A) - \alpha\Delta(t^*, t) < g_q(t^*, t, A) - \varphi\Delta(t^*, t) \le 0$. В результате имеем

$$\forall\varepsilon > \varphi \quad \exists B^* \in \Omega(\varepsilon) \quad \exists p \in N_s \quad \forall t \in T^n(A, J_1, J_2, \ldots, J_s) \;\; (f_{J_p}(t^*, A + B^*) \overline{\succ} f_{J_p}(t, A + B^*)). \tag{5}$$

Далее рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $t^* \in T^n(A + B^*, J_1, J_2, \ldots, J_s)$. Тогда ввиду $t^* \in \overline{T^n}(A, J_1, J_2, \ldots, J_s)$ очевидна формула

$$\forall\varepsilon > \varphi \quad \exists B^* \in \Omega(\varepsilon) \quad (T^n(A + B^*, J_1, J_2, \ldots, J_s) \not\subseteq T^n(A, J_1, J_2, \ldots, J_s)). \tag{6}$$

Случай 2: $t^* \in \overline{T^n}(A + B^*, J_1, J_2, \ldots, J_s)$. Тогда $t^* \notin P(A + B^*, J_p)$ и в силу внешней устойчивости [1] множества Парето $P(A + B^*, J_p)$ существует такая траектория $t^0 \in P(A + B^*, J_p)$, что $f_{J_p}(t^*, A + B^*) \succ f_{J_p}(t^0, A + B^*)$. Отсюда согласно (5) траектория $t^0 \in \overline{T^n}(A, J_1, J_2, \ldots, J_s)$ и благодаря (2) имеем $t^0 \in T^n(A + B^*, J_1, J_2, \ldots, J_s)$. Это значит, что вновь верна формула (6).

Объединяя эти два случая, заключаем, что при любом числе $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho < \varepsilon$. Следовательно, $\rho \le \varphi$. Теорема доказана.

Из теоремы вытекают следующие известные результаты.

Следствие 1 [3]. Для радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A, N_n)$ с паретовским принципом оптимальности справедлива формула

$$\rho^n(A, N_n) = \min_{t \in \overline{P^n}(A)} \; \max_{t' \in P^n(A)} \; \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}. \tag{7}$$

Следствие 2 [4]. Для радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$ с совокупно-экстремальным принципом оптимальности верна формула

$$\rho^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}) = \min_{i \in N_n} \; \min_{t \in \overline{C^n}(A)} \; \max_{t' \in C^n(A)} \frac{g_i(t, t', A)}{\Delta(t, t')}. \tag{8}$$

Здесь $\overline{P^n}(A) = T \setminus P^n(A)$, $\overline{C^n}(A) = T \setminus C^n(A)$. Частным случаем (7) и (8) является известная формула радиуса устойчивости скалярной ($n = 1$) линейной траекторной задачи [5].

В заключение отметим, что другие виды параметризации принципов оптимальности в векторных задачах дискретной оптимизации рассматривались в [6–9], где были получены аналогичные количественные характеристики различных типов устойчивости комбинаторных задач и задач теории игр.

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1981.
2. Шоломов Л.А. Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М., 1989.
3. Емеличев В.А., Кравцов М.К. // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 4. С. 137.
4. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2002. № 3. С. 84.
5. Леонтьев В.К. // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 35. С. 169.
6. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 155.
7. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10. № 2. С. 3.
8. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 2. С. 96.
9. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46. № 7. С. 1258.

Поступила в редакцию 28.10.08.

Владимир Алексеевич Емеличев – доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений математической физики.

Андрей Александрович Платонов – студент 5-го курса механико-математического факультета.