

КРИТЕРИЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗБИЕНИЙ ЧИСЕЛ В ВИДЕ ВЫПУКЛОЙ КОМБИНАЦИИ ДВУХ РАЗБИЕНИЙ

We study the vertices of the integer partition polytopes. We give a criterion for the problem whether a given partition can be represented as a convex combination of two others. The criterion connects the vertex recognition problem for this polytope with some well-known combinatorial and additive number theory problems, such as the Partition problem from the complexity theory, Sidon sets, and knapsack partitions. We formulate two hypotheses concerning the complexity of the vertex recognition problem, and the behaviour of the vertex number function of the partitioned integer.

Задача о разбиении чисел на слагаемые служит объектом изучения математиков на протяжении двух с половиной веков [1]. Ее исследования привели к созданию новых методов и появлению новых задач в других областях математики, а результаты находят разнообразные применения [2, 3]. В [4, 5] предложен новый, полиэдральный, подход к этой проблеме. При таком подходе множество разбиений каждого числа рассматривается как политоп, геометрическая структура которого определяется его вершинами и фасетами (гранями максимальной размерности). Фасеты политопа разбиений описаны в [5]. Данная работа посвящена проблеме описания его вершин.

В п. 1 определяется политоп разбиений и приводится краткий обзор предыдущих результатов их исследования. В п. 2 частичное отношение порядка на множестве разбиений всех чисел рассматривается с точки зрения проблемы распознавания вершин среди разбиений. Описывается метод генерации вершин политопов разбиений. В п. 3 доказывается критерий представления разбиения в виде выпуклой комбинации двух других разбиений, который приводит к новым необходимым условиям для вершин. В п. 4 устанавливается связь вершин политопов разбиений с известными в аддитивной теории чисел множествами Сидона. В заключении обсуждаются перспективы дальнейших исследований и высказываются два предположения.

1. Определение политопа разбиений и обзор предыдущих результатов. Разбиением натурального числа n называется его представление в виде суммы натуральных чисел $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$, без учета их порядка. Слагаемые $i_1, i_2, \dots, i_k$ называют частями разбиения. При полиэдральном подходе каждое разбиение числа n отождествляется с неотрицательной целочисленной точкой $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Каждая ее координата x_i равна числу вхождений части i в разбиение. Так, разбиению $8 = 1 + 1 + 2 + 4$ соответствует точка $x = (2, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^8$. Политоп $P_n \subset \mathbb{R}^n$ раз-

биений числа n определяется как выпуклая оболочка множества $T_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n, x_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\}$, состоящего из всех точек, соответствующих разбиениям n : $P_n = \text{conv } T_n$.

Идея полиэдрального подхода была предложена в [4]. Там же была предпринята попытка описать фасеты политопа разбиений, которая была завершена в [5]. Неравенство $\sum_{i=1}^n \pi_i x_i \geq \pi_0$ определяет не тривиальную фасету политопа P_n тогда и только тогда, когда $\pi_0 = \pi_n$, а вектор коэффициентов $\pi \in \mathbb{R}^n$ является допустимым решением системы

$$\pi_i + \pi_{n-i} = \pi_n, \quad 1 \leq i \leq [n/2]; \quad \pi_i + \pi_j \geq \pi_{i+j}, \quad 1 \leq i, j < n, i+j \leq n,$$

обращает в равенства $n-2$ ее линейно независимых строк и неколлинеарен вектору $(1, 2, \dots, n)$. Три-виальные фасеты – это координатные гиперплоскости $x_i \geq 0$, $2 \leq i \leq n$.

В [5] получены общие результаты о строении политопов разбиений и начато исследование их вершин. Основные результаты состоят в следующем. Аффинная размерность политопа P_n равна $n-1$. Политоп P_n является пирамидой, точка $(0^{n-1}, 1)$ – ее вершиной, а основание лежит в гиперплоскости $x_n = 0$. Все целочисленные точки P_n представляют собой разбиения n и все они лежат на границе P_n . Были введены преобразования

$$\varphi_i: \mathbb{R}^{n-i} \rightarrow \mathbb{R}^n: \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-i}) = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-i}, 0^i),$$

$1 \leq i < n$. Отождествление разбиений $x \in T_{n-i}$ с $\varphi_i(x) \in T_n$, а значит, политопа P_{n-i} с политопом $\varphi_i(P_{n-i})$ позволяет считать, что политопы разбиений образуют вложенную цепочку $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$. Для политопов разбиений числа n , все части которых принадлежат заданному множеству, показано, что их фасеты и вершины можно получить из фасет и вершин основного политопа P_n .

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел; $[1, m]$ – отрезок чисел $\{1, 2, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$; целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и наименьшее целое число, не меньшее α , обозначаются $[\alpha]$ и $\lceil \alpha \rceil$ соответственно; запись $x \vdash n$ означает, что $x \in \mathbb{Z}_+^n$ является разбиением n ; $S(x) = \{i \in [1, n] \mid x_i > 0\}$ – множество различных частей разбиения $x \vdash n$; символ 0^k обозначает последовательность из k нулей; символ $\cup$ – объединение непересекающихся множеств; $\text{vert } P$ – множество вершин политопа P .

2. Доминирование вершин и их генерация. Как и для произвольного полиэдра, точка x политопа P_n является его вершиной в том и только в том случае, если ее нельзя представить в виде выпуклой

комбинации $x = \sum_{j=1}^k \lambda_j y^j$, где $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j > 0$, некоторых других точек $y^j \in P_n$, $1 \leq j \leq k$. Мы пока-

жем, что вершины P_n можно построить, зная некоторые вершины политопов P_{n-i} для $i \in [1, [n/2]]$.

Введем отношение частичного порядка $\preceq$ на множестве разбиений всех чисел. Для $x \vdash n$ и $y \vdash m$, где $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m > 0$, положим $y \preceq x$, если $y_i \leq x_i$, $i \in [1, m]$. Теорему 2 из [5] обобщает

Теорема 1. Если $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, x вершина P_n , $y \vdash m$, и $y \preceq x$, то y вершина P_m .

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что x без любой своей части i является вершиной политопа P_{n-i} . Далее останется применить это утверждение несколько раз, последовательно удаляя из x части, не входящие в y .

Пусть i некоторая часть разбиения x . Тогда последние i компонент точки x равны нулю. Удалив часть i , получим разбиение $z = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-i})$ числа $n-i$. Предположим, от противного, что $z \notin \text{vert } P_{n-i}$. Тогда z есть выпуклая комбинация $z = \sum_{t=1}^k \lambda_t z^t$, $\sum_{t=1}^k \lambda_t = 1, \lambda_t > 0$, некоторых разбиений $z^t \vdash n-i$, $1 \leq t \leq k$. Определим целочисленные точки $x^t \in \mathbb{Z}_+^n$, $1 \leq t \leq k$, с координатами:

$x'_i = z'_i + 1$; $x'_j = z'_j$, $1 \leq j \leq n-i$, $j \neq i$; $x'_j = 0$, $n-i < j \leq n$. Очевидно, что $x' \vdash n$ для всех t . Но тогда x представляется в виде выпуклой комбинации $x = \sum_{t=1}^k \lambda_t x^t$ разбиений x^t , так как $\sum_t \lambda_t x'_i = \sum_t \lambda_t (z'_i + 1) = 1 + \sum_t \lambda_t z'_i = 1 + z_i = 1 + x_i - 1 = x_i$; $\sum_t \lambda_t x'_j = \sum_t \lambda_t z'_j = z_j = x_j$ для $1 \leq j \leq n-i$, $j \neq i$, и $\sum_t \lambda_t x'_j = 0$ для $n-i < j \leq n$. Это противоречит тому, что $x \in \text{vert } P_n$, следовательно, z действительно вершина политопа P_{n-i} . Теорема доказана.

Заметим, что разбиение $z \vdash n-i$ из доказательства теоремы есть ϕ_i -прообраз разбиения $x \vdash n$. Вообще, отображение ϕ_i^{-1} переводит подмножество разбиений $\{x \in T_n \mid x_i > 0\}$ в T_{n-i} . Следующая теорема сводит проблему, является ли заданное $x \vdash n$ вершиной P_n , к случаю, когда все части x меньше $\lceil n/2 \rceil$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения: а) разбиение $x \vdash n$ с компонентой $x_k > 0$, где $k > \lceil n/2 \rceil$, является вершиной P_n тогда и только тогда, когда $\phi_k^{-1}(x) \in \text{vert } P_{n-k}$; б) для четного n разбиение $n = n/2 + n/2$ является единственной вершиной политопа P_n с компонентой $x_{n/2} > 0$.*

Доказательство. Докажем а). Поскольку $\phi_k^{-1}(x) \preceq x$, из теоремы 1 следует, что $x \in \text{vert } P_n$ влечет $\phi_k^{-1}(x) \in \text{vert } P_{n-k}$. Для доказательства обратной импликации предположим, что x есть выпуклая комбинация некоторых разбиений $y^t \vdash n$, $1 \leq t \leq s$. Ввиду $k > \lceil n/2 \rceil$ имеем $x_k = 1$. Поскольку все компоненты x и $\phi_k^{-1}(x)$, кроме k -й и последних нулей, совпадают, такое представление x возможно, только если $y_k^t > 1$ хотя бы для одного из y^t . Но это противоречит тому, что $y^t \vdash n$. Таким образом, а) доказано. Докажем б). Разбиению $n = n/2 + n/2$ соответствует точка $(0^{n/2-1}, 2, 0^{n/2})$, которую, очевидно, невозможно представить в виде выпуклой комбинации других разбиений n , и, значит, $(0^{n/2-1}, 2, 0^{n/2}) \in \text{vert } P_n$. Осталось рассмотреть разбиения с $x_{n/2} = 1$. В любом таком разбиении $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n/2} = 1, x_{n/2+1}, \dots, x_n) \vdash n$ некоторые из $n/2-1$ первых компонент положительны, а $x_{n/2+1} = \dots = x_n = 0$. Но тогда $x \notin \text{vert } P_n$, поскольку x представляется в виде полусуммы двух разбиений числа n : $x = \frac{1}{2}(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n/2-1}, x_{n/2} = 0, 0^{n/2}) + \frac{1}{2}(0^{n/2-1}, x_{n/2} = 2, 0^{n/2})$. Теорема доказана.

Обозначим $T_k[\geq i] = \{x \vdash k \mid j \in [1, i-1] \Rightarrow x_j = 0\}$ – множество разбиений числа k , все части которых не превосходят i , и через $P_k[\geq i]$ – политоп таких разбиений.

Теорема 3. *Справедливы рекуррентные соотношения:*

$$T_n = \left(\biguplus_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} \phi_i(T_{n-i}[\geq i]) \right) \cup (0^{n-1}, 1), \quad (1)$$

$$\text{vert } P_n \subseteq \left(\biguplus_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} \phi_i(\text{vert } P_{n-i}[\geq i]) \right) \cup (0^{n-1}, 1). \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $x \vdash n$, $x \neq (0^{n-1}, 1)$, и i его наименьшая часть. Тогда $i \leq \lceil n/2 \rceil$ и $x = \phi_i(y)$ для некоторого $y \vdash n-i$, причем все части y не меньше i . При этом различным x соответствуют различные y . Обратно, каждому $y \vdash n-i$ соответствует $x = \phi_i(y) \vdash n$. Отсюда следует формула (1). Если же $x \in \text{vert } P_n$, то по теореме 1 дополнительно получаем, что $y \in \text{vert } P_{n-i}$, откуда следует формула (2). Теорема доказана.

Формулу (2) можно использовать для генерации вершин политопов разбиений методом лифтинга по n . После вычисления вершин P_{n-i} , $i = 1, \dots, \lceil n/2 \rceil$, для построения вершин P_n следует рассмотреть ϕ_i -образы вершин всех политопов P_{n-i} с ограничениями на части, указанными в (2), и для каждого из них выяснить, является ли он вершиной политопа P_n . Метод существенно сокращает число проверок, является ли конкретное разбиение числа n вершиной, по сравнению с полным перебором всех раз-

биений. Для распознавания вершин на этапе проверки можно использовать достаточные и отдельно – необходимые условия из [5] и из следующего раздела.

3. Критерий представления разбиений в виде выпуклой комбинации двух разбиений. Критерий такого представления дает

Теорема 4. Разбиение $x \vdash n$ есть выпуклая комбинация двух разбиений (и следовательно, $x \notin \text{vert } P_n$) тогда и только тогда, когда существуют два непересекающихся подмножества S_1, S_2 множества его частей $S(x)$ и существуют два целочисленных набора $u = \langle u_j; j \in S_1 \rangle$, $v = \langle v_k; k \in S_2 \rangle$, удовлетворяющих соотношениям

$$\sum_{j \in S_1} u_j j = \sum_{k \in S_2} v_k k, \quad 0 < u_j \leq x_j, \quad 0 < v_k \leq x_k. \quad (3)$$

Доказательство. Если известны подмножества S_1 и S_2 и наборы u и v , то разбиения $y, z \vdash n$, для которых x является полусуммой, можно построить, положив $y_j = x_j + u_j$ для $j \in S_1$; $y_k = x_k - v_k$ для $k \in S_2$; $y_i = x_i$ для $i \notin S_1 \cup S_2$; $z_j = x_j - u_j$ для $j \in S_1$; $z_k = x_k + v_k$ для $k \in S_2$; $z_i = x_i$ для $i \notin S_1 \cup S_2$. Докажем обратное утверждение. Пусть разбиение $x \vdash n$ есть выпуклая комбинация двух разбиений $y, z \vdash n$: $x = z + \lambda(y - z)$, $0 < \lambda < 1$. Вначале покажем, что тогда существуют два таких разбиения n , что x является их полусуммой. Из целочисленности x, y, z заключаем, что λ рациональное

число, $\lambda = \frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты и q делит все компоненты $y - z$. Построим целочисленные

точки $z + \frac{p-1}{q}(y - z)$ и $z + \frac{p+1}{q}(y - z)$. На примере первой из них убедимся, что они являются разбиениями

n (для второй проверка аналогична): $(z + \frac{p-1}{q}(y - z)) \cdot (1, 2, \dots, n) =$

$= z \cdot (1, 2, \dots, n) + \frac{p-1}{q}(y \cdot (1, 2, \dots, n) - z \cdot (1, 2, \dots, n)) = n + \frac{p-1}{q}(n - n) = n$. Таким образом, можно считать,

что $x = \frac{1}{2}(y + z)$. Построим теперь искомые подмножества S_1, S_2 : $S_1 = \{j \in S(x) \mid x_j < y_j\}$,

$S_2 = \{k \in S(x) \mid x_k > y_k\}$. Нетрудно видеть, что $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 = \{j \in S(x) \mid x_j > z_j\}$,

$S_2 = \{k \in S(x) \mid x_k < z_k\}$. Требуемые наборы u и v получим, положив $u_j = y_j - x_j$ для $j \in S_1$ и

$v_k = x_k - y_k$ для $k \in S_2$. Заметим, что $y_j - x_j = x_j - z_j$ и $x_k - y_k = z_k - x_k$ для всех j, k . Отсюда, из опре-

деления S_1, S_2 , равенства $x = \frac{1}{2}(y + z)$ и неотрицательности компонент x, y, z заключаем, что наборы

u, v удовлетворяют условиям (3). Теорема доказана.

Критерий теоремы 4 имеет простую комбинаторную интерпретацию. Для $x \vdash n$ будем считать, что для каждого $i \in S(x)$ имеется x_i гирь веса i . Тогда (3) означает, что с помощью полученного полного набора гирь некоторый вес можно взвесить двумя способами. Теорема означает, что наборы гирь, соответствующие вершинам политопов разбиений, этим свойством не обладают.

Вычисления показывают, что для $n < 21$ все разбиения, не являющиеся вершинами P_n , удовлетворяют условию (3). Однако при $n = 21$ появляются два разбиения, не являющиеся вершинами P_{21} потому, что они выражаются в виде выпуклой комбинации не двух, а трех разбиений: $21 = 1 + 4 + 7 + 9 = 1/3 \cdot [(3 \cdot 1 + 2 \cdot 9) + (3 \cdot 4 + 9) + (3 \cdot 7)]$ и $21 = 3 + 5 + 6 + 7 = 1/3 \cdot [(3 \cdot 3 + 2 \cdot 6) + (3 \cdot 5 + 6) + (3 \cdot 7)]$. В действительности эти два разбиения представляют серии разбиений не вершин и для других $n > 21$, кратных 3.

Теорема 5. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ разбиения $1 + (4 + k) + (7 + 2k) + (9 + 3k)$ и $3 + (5 + k) + (6 + k) + (7 + k)$ чисел $n = 21 + 6k$ и $n = 21 + 3k$ соответственно являются выпуклыми комбинациями трех, но не двух разбиений n .

Доказательство. Представление каждого из указанных разбиений в виде выпуклой комбинации с коэффициентами $1/3$ разбиений $3 \cdot (7+2k)$, $3 \cdot (4+k)+1 \cdot (9+3k)$, $3 \cdot 1+2 \cdot (9+3k)$ и $3 \cdot (7+k)$, $1 \cdot 3+3 \cdot (6+k)$ и $2 \cdot 3+3 \cdot (5+k)$ соответственно проверяется непосредственно. Несложно также убедиться, что оба разбиения не удовлетворяют критерию теоремы 4, значит, двух разбиений для их представления недостаточно.

Из критерия теоремы 4 получаем новые необходимые условия для вершин P_n .

Теорема 6. Для любой вершины x политопы P_n выполняются условия: а) $\prod_{i \in S(x)} (x_i + 1) \leq n + 1$;

б) число различных частей x не превосходит $\log(n + 1)$.

Доказательство. Поскольку для любой вершины $x \in \text{vert } P_n$ условие (3) не выполняется, все суммы $\sum_{i \in S(x)} y_i i$, где $0 \leq y_i \leq x_i$, попарно различны. Число таких сумм равно $\prod_{i \in S(x)} (x_i + 1)$, причем все они не превосходят n . Отсюда в силу принципа Дирихле следует условие а). Обозначив через k число различных частей разбиения x , получаем, что $\prod_{i \in S(x)} (x_i + 1) \geq 2^k$. Отсюда с учетом а) следует утверждение б). Теорема доказана.

Новые условия а) и б) проверяются намного проще, чем условие (3). Так, для $x = (1, 0, 2, 0, 3, 0^{17}) \vdash 22$ имеем $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 > 23$, откуда ввиду а) заключаем, что $x \notin \text{vert } P_{22}$. Для $x = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0^{14}) \vdash 22$ нарушаются оба условия.

4. Вершины политопы разбиений и мультимножества Сидона. В аддитивной теории чисел известны множества Сидона (или B_2 множества). Так называют множества $A \subset \mathbb{N}$, для которых из равенства $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, следует, что множества $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_3, a_4\}$ совпадают [6, с. 252]. Рассматривают также множества Сидона порядка $h > 2$ (или B_h множества). В их определении вместо пар фигурируют любые наборы из h элементов из A , и слагаемые разрешается повторять [6, с. 253]. Из теоремы 4 следует, что множества частей вершин политопов P_n для всех n родственны множествам Сидона любого порядка $h \geq 2$. Различие состоит в том, что в случае вершин суммы могут состоять из разного числа слагаемых и число повторений каждого слагаемого ограничено сверху. Представляется естественным ввести понятие мультимножества Сидона, тем более, что разбиения можно трактовать как мультимножества, в которые каждая часть разбиения входит столько раз, сколько раз она входит в разбиение.

Под числовым мультимножеством мы понимаем пару $\langle A, x \rangle$, состоящую из множества $A \subset \mathbb{Z}_+$ и функции кратности $x: A \rightarrow \mathbb{N}$. Значения $x_a, a \in A$, показывают, сколько экземпляров элемента a содержится в мультимножестве. Если $x_a = 1$ для всех $a \in A$, то $\langle A, x \rangle$ является множеством A . Таким образом, каждое разбиение $x \vdash n$ определяет мультимножество $\langle S(x), x \rangle$, образованное частями x с учетом их кратностей.

Определение. Назовем мультимножество $\langle A, x \rangle$ мультимножеством Сидона смешанного порядка, если из равенства $\sum_{a \in A} y_a a = \sum_{a \in A} z_a a$, где $0 \leq y_a, z_a \leq x_a$, следует, что $y_a = z_a$ для всех $a \in A$.

Теорему 5 можно сформулировать теперь эквивалентным образом.

Теорема 5'. Для любого n каждая вершина x политопы P_n определяет мультимножество Сидона $\langle S(x), x \rangle$ смешанного порядка.

Аналогично теореме 6 доказывается следующая

Теорема 7. Для конечного мультимножества Сидона смешанного порядка $\langle A, x \rangle$ справедливы утверждения: а) $\prod_{a \in A} (x_a + 1) \leq \sum_{a \in A} x_a a + 1$; б) число различных элементов $\langle A, x \rangle$ не превосходит $\log \left(\sum_{a \in A} x_a a + 1 \right)$; в) конечное мультимножество Сидона смешанного порядка A удовлетворяет соотношению $|A| \leq \log \left(\sum_{a \in A} a + 1 \right)$.

Можно выделить следующие наиболее перспективные направления дальнейших исследований вершин политопов разбиений P_n : 1) выяснение сложности проблемы распознавания вершин как функции от размера задачи n , 2) определение зависимости числа вершин политопа P_n от n , 3) выяснение взаимосвязей между вершинами, а также вершинами и фасетами политопов P_n . Прокомментируем некоторые из них.

Доказанный в теореме 4 критерий позволяет высказать предположение, что проблема распознавания вершин политопа разбиений NP-трудна. Эта задача выглядит не менее сложной, чем задача распознавания мультимножеств Сидона смешанного порядка, назовем ее *Частичное Разбиение Мультимножества (ЧРМ)*.

Задача ЧРМ. Для заданного конечного мультимножества чисел $\langle A, x \rangle$, $A \subset \mathbb{N}$, определить, существуют ли два подмножества $S_1, S_2 \subset A$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, и две функции $u, v: A \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что $u(a), v(a) \leq x(a)$ для всех $a \in A$ и $\sum_{a \in S_1} au(a) = \sum_{a \in S_2} av(a)$.

Основной причиной сложности задачи ЧРМ являются ограничения на число повторений элементов мультимножества в составляемых суммах, поскольку техника, разработанная для изучения стандартных множеств Сидона, при этих ограничениях становится неприменимой. Кроме того, задача ЧРМ, очевидно, близка к известной NP-полной задаче *Разбиение* [7, с. 66]. Напомним ее формулировку.

Задача Разбиение. Для заданного конечного множества M с «весами» $w(m) \in \mathbb{N}$ своих элементов определить, существует ли подмножество $M' \subseteq M$ такое, что $\sum_{m \in M'} w(a) = \sum_{m \in M \setminus M'} w(a)$.

Задача ЧРМ отличается от задачи *Разбиение* тем, что в ней не требуется, чтобы подмножества S_1 и S_2 образовывали разбиение множества A .

После того как была сдана в печать работа [8], в которой был анонсирован критерий теоремы 4, была опубликована статья [9]. Ее авторы, исследуя функцию Мебиуса частично упорядоченного множества разбиений множества на блоки с ограничениями на размеры, независимо пришли к классу разбиений, удовлетворяющих условиям теоремы 4. Они назвали такие разбиения *рюкзачными*. В силу теорем 4 и 5 вершины всех политопов разбиений чисел составляют собственный подкласс в классе рюкзачных разбиений. Заметим, что в [9] нет результатов о строении множества рюкзачных разбиений, равно как и об их свойствах. Отсутствуют и оценки числа $k(n)$ рюкзачных разбиений числа n . Однако появление одного и того же класса разбиений при исследовании разных проблем само по себе свидетельствует о том, что он, как минимум, представляет интерес.

Авторы [9] разместили первые 50 значений чисел $k(n)$ на сайте «Числовые последовательности» [10]. Приведем полученные нами начальные значения из последовательности $v(n)$ чисел вершин P_n для $n \leq 21$: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12, 17, 19, 29, 25, 41, 41, 58, 56, 84, 75, 117, 99, 147. Обе последовательности демонстрируют очевидную зависимость $v(n)$ и $k(n)$ от четности n . Можно высказать и более сильное предположение: значения $v(n)$ тем больше относительно соседних значений, чем меньше делителей имеет число n , и достигают максимума для простых n .

1. Эндрюс Г. Теория разбиений. М., 1982.
2. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М., 2005.
3. Фултон У. Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии. М., 2006.
4. Шлык В. А. // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 89.
5. Shlyk V. A. // European J. Combinatorics. 2005. Vol. 26. № 8. P. 1139.
6. Tao T., Vu V. H. Additive combinatorics. Cambridge, 2006.
7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
8. Шлык В. А. // Докл. НАН Беларусі. 2008. Т. 52. № 3. С. 5.
9. Ehrenborg R., Readdy M. A. // Advances in Applied Mathematics. 2007. Vol. 39. № 3. P. 283.
10. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. A108917 Number of knapsack partitions of n . <http://www.research.att.com/~njas/sequences/A108917>.

Поступила в редакцию 12.09.08.

Владимир Александрович Шлык – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики БГПУ им. М. Танка.