УДК 519.624

С.Н. СТЕЛЬМАХ

МЕТОД ДВУСТОРОННЕЙ ПРИСТРЕЛКИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Construction and substantiation of method of bilateral shooting for systems of the nonlinear ordinary differential equations of the second order with special kind is given.

1. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(t, y), \quad a < t < b, \tag{1}$$

с неразделенными условиями

$$g(y(a), y(b)) = 0, \tag{2}$$

$$y'(c) = 0, \; a < c < b, \tag{3}$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $f:\Omega^{n+1} \to R^n$, Ω^{n+1} – некоторое $(n + 1)$-мерное (t, y) множество, $g: R^n \times R^n \to R^n$. Предположим, что решение $y(t)$ задачи (1) – (3) существует, единственно и достаточно гладкое. Как правило, предполагается, что f обладает необходимой в дальнейших выкладках гладкостью. Для решения задачи (1) – (3) будем использовать методы пристрелки [1], которые активно применяются для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. В настоящей работе предлагается использовать данный подход и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка специального вида. Предлагаемый метод двусторонней пристрелки основывается на гибридном соединении экстраполяционных методов Штермера решения задач Коши систем ОДУ второго порядка [2] и метода Ньютона для систем уравнений [3].

2. Рассмотрим метод двусторонней пристрелки для задачи (1) – (3). В качестве параметров пристрелки [4] выберем значение решения $y^*(t)$ граничной задачи в точке $t = c$, т. е. значение $y^*(c)$, которое вместе в условием (3) образует полное начальное условие Коши для (1).

Выбираем начальное приближение $y_c^{(0)}$ к $y^*(c)$.

Вводим в рассмотрение пристрелочные задачи Коши:

$$u'' = f(t,u), \;\; a < t < c, \;\; u(t, y_c^{(0)})\Big|_{t=c} = y_c^{(0)}, \;\; u'(t, y_c^{(0)})\Big|_{t=c} = 0; \tag{4}$$

$$v'' = f(t,v), \;\; c < t < b, \;\; v(t, y_c^{(0)})\Big|_{t=c} = y_c^{(0)}, \;\; v'(t, y_c^{(0)})\Big|_{t=c} = 0, \tag{5}$$

и находим вектор-функции $u(t, y_c^{(0)})$, $v(t, y_c^{(0)})$. Далее находим $S(y_c^{(0)})$, где $S(y) \equiv g(u(a, y), v(b, y))$, и вычисляем первое приближение $y_c^{(1)}$ к $y^*(c)$ из системы

$$S(y_c) = 0. \tag{6}$$

Для решения (6) часто выгодно использовать метод Ньютона. В этом случае $y_c^{(1)}$ вычисляется по формуле $y_c^{(1)} = y_c^{(0)} + \Delta y_c^{(0)}$, где $\dfrac{\partial S(y_c^{(0)})}{\partial y_c} \Delta y_c^{(0)} = -S(y_c^{(0)})$, $\dfrac{\partial S(y_c^{(0)})}{\partial y_c}$ – матрица Якоби системы (6) в предположении, что $\det \dfrac{\partial S(y_c^{(0)})}{\partial y_c} \neq 0.$

Далее итерационный процесс можно продолжить по аналогии и будем считать, что это возможно. Тогда будут построены последовательности приближений $\left\{ y_c^{(k)} \right\}_0^\infty$ к $y^*(c)$ и последовательности $\left\{ y_c^{(k)}(t) \right\}_0^\infty$, где

$$\left\{ y_c^{(k)}(t) \right\} = \begin{cases} u(t, y_c^{(k)}), \; a < t < c; \\ v(t, y_c^{(k)}), \; c < t < b. \end{cases}$$

Отметим, что при $c = a$ получим задачу

$$y'' = f(t, y), \quad a < t < b;$$

$$g(y(a), y(b)) = 0, \;\; y'(a) = 0.$$

Описанный алгоритм представляет собой метод прямой пристрелки [1], параметром пристрелки в данном случае будет являться значение $y^*(a)$. При $c=b$ алгоритм представляет собой метод обратной пристрелки.

Таким образом, в методе двусторонней пристрелки основными являются следующие этапы:

1) численное решение задач Коши вида (4), (5);

2) решение системы уравнений (6), которая в общем случае будет нелинейной и у которой по определению решением будет точка $y^*(c)$.

3. Опишем более подробно решение задач Коши (4), (5). Отметим, что на промежуточных этапах важно вычислить значение $u(t), v(t)$ на концах отрезка $[a, b]$, промежуточные значения на данном этапе решения нас не интересуют. Задачи (4), (5) можно было бы решать методом приведения к системе уравнений первого порядка [2], однако при этом пришлось бы заполнять две таблицы конечных разностей. То обстоятельство, что $f(x, y)$ не зависит от y', позволяет указать такие методы, при осуществлении которых требуется заполнять лишь одну таблицу конечных разностей. Для решения этих задач выгодно использовать экстраполяционный метод Штермера. Предположим, что имеется начало таблицы, т. е. указаны приближенные значения решения $v(t)$ для $t=t_j, j=0,1,...,k$: $v_0, v_1, ..., v_k$.

При решении задачи (5) будем использовать формулу (см. [2, гл. IV]):

$$\Delta^2 v(t_{n-1}) = \int\limits_{t_n-h}^{t_n+h} v''(t)(h-|t-t_n|)dt,$$

которая позволяет перейти к конечной экстраполяционной формуле

$$\Delta^2 v_{n-1} = \eta_n + \frac{1}{12}\Delta^2\eta_{n-2} + \frac{1}{12}\Delta^3\eta_{n-3} + \frac{19}{240}\Delta^4\eta_{n-4} + \frac{3}{40}\Delta^5\eta_{n-5} + ... + \alpha_k\Delta^k\eta_{n-k}, \tag{7}$$

где $\alpha_j = \frac{1}{j!}\int\limits_{-1}^{1} x(x+1)...(x+j-1)(1-|x|)dx,\ j=0, 1, 2, ...,$ $\eta_i = h^2 v_i'' = h^2 f(t_i, v_i),\ i=0, 1, 2, ...,$ Δ^k – конечная разность k-го порядка, h – шаг сетки.

Вычисления по (7) располагают в таблицу.

Вычислительная схема решения задачи Коши (5) по формуле (7) при k=3

t	v	Δv	$\Delta^2 v$	$\eta = h^2 f(t,v)$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
t_0	v			η_0			
		Δv_0			$\Delta\eta_0$		
t_1	v_1		$\Delta^2 v_0$	η_1		$\Delta^2\eta_0$	
		Δv_1			$\Delta\eta_1$		$\Delta^3\eta_0$
t_2	v_2		$\Delta^2 v_1$	η_2		$\Delta^2\eta_1$	
		Δv_2			$\Delta\eta_2$		
t_3	v_3			η_3			
t_4							

Величины, приведенные в таблице, известны. Нам нужно вычислить v_4 или, что то же самое, $\Delta^2 v_2$. Положим в (7) $k=3$ и $n=3$, получим

$$\Delta^2 v_2 = \eta_3 + \frac{1}{12}\Delta^2\eta_1 + \frac{1}{12}\Delta^3\eta_0.$$

Все величины в правой части этой формулы расположены в нижней косой строчке таблицы разностей η_i. Определив v_4, вычисляем $\eta_4 = h^2 f(t_4, v_4)$ и добавляем новую косую строку, что позволяет найти $\Delta^2 v_3$, и так далее. Численное решение задачи (4) проводится аналогично.

После нахождения $u(t), v(t)$ на концах отрезка $[a, b]$ переходим к задаче (6), решение которой будем проводить по методу Ньютона [5].

4. Отметим, что разрешимость системы зависит от свойств вектор-функции g, решений $u(t, y), v(t, y)$, положения точки c, длины отрезка $[a, b]$.

Теорема. *Если пристрелочные задачи Коши имеют на* $[a,b]$ *решения класса* $C^{k+3}[a,b]$ *и система* (6) *удовлетворяет достаточным условиям сходимости метода Ньютона, то алгоритм двусторонней пристрелки для задачи* $(1)-(3)$ *устойчив, последовательность* $y_c^{(k)}$ *сходится к* $y^*(c)$ *и* $y_c^{(k)}(t)$ *сходится к* $y_k^*(t)$.

Доказательство. Рассмотрим меньший корень t^* уравнения

$$P(t)=\frac{1}{2}Kt^2-\frac{1}{B}t+\frac{\eta}{B}=0,$$

где K, B, η – известные константы из теоремы Л.В. Канторовича о сходимости метода Ньютона и t_n есть приближение к t^*, построенное по методу Ньютона при начальном приближении $t_0=0$, тогда верно утверждение [4]:

$$\left\|y_c^{(k+1)}-y_c^{(k)}\right\|\le t_{n+1}-t_n \ (n=0,1,...).$$

Применим признак Коши:

$$\left\|y_c^{(k+p)}-y_c^{(k)}\right\|\le\left\|y_c^{(k+p)}-y_c^{(k+p-1)}\right\|+\left\|y_c^{(k+p-1)}-y_c^{(k+p-2)}\right\|+...+\left\|y_c^{(k+1)}-y_c^{(k)}\right\|\le t_{n+p}-t_n. \quad (8)$$

Так как последовательность $\{t_n\}_0^\infty$ сходится, то для нее признак Коши выполняется. Из неравенства (8) следует, что признак выполняется и для последовательности $\{y_c^{(k)}\}_0^\infty$. Значит, $y_c^{(k)}$ сходится, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}y_c^{(k)}=y_c^*$.

Сходимость $y_c^{(k)}(t)$ к решению задачи $(1)-(3)$ следует из сходимости и устойчивости методов Штермера [2].■

Применение метода Ньютона для случаев прямой и обратной пристрелки часто сильно затруднено или невозможно из-за быстрого накопления вычислительных погрешностей. В этом случае метод двусторонней пристрелки намного предпочтительнее, когда c находится вдали границ отрезка $[a,b]$. Это может существенно улучшить свойства матрицы Якоби $\dfrac{\partial S(y_c)}{\partial y_c}$. Проблема же локализации начальных приближений $y_c^{(0)}$ к $y^*(c)$ остается одинаково трудной как в случае, когда параметрами пристрелки являются значения $y^*(a), y^*(b)$, так и в случае, когда параметром пристрелки является любое внутреннее значение $y^*(t)$, $a<t<b$, решения граничной задачи (1) – (3).

Заметим также, что во многих случаях специфика граничных условий существенно влияет на вычислительные схемы алгоритмов. Для улучшения вычислительных свойств также можно использовать методы ортогонализации в схемах редукции к задачам Коши [6].

Если отрезок $[a,b]$ большой, то целесообразно перейти к методу множественной двусторонней пристрелки [4] для задачи (1) – (3), который использует разбиение отрезка $[a,b]$ на несколько частей. Преимущество данного метода состоит в том, что пристрелочные задачи Коши обладают лучшими вычислительными свойствами по сравнению с методом двусторонней пристрелки.

1. Keller H.B. Numerical method of two-point boundary value problems. Ginn-Bleisdell, 1968.
2. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. М., 1962.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. М., 1977.
4. Монастырный П.И. // Докл. АН БССР. 1978. XXII. № 5.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. М., 1987.
6. Монастырный П.И., Стельмах С.Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. № 3. С. 70.

Поступила в редакцию 09.06.08.

Сергей Николаевич Стельмах – аспирант кафедры численных методов и программирования. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры численных методов и программирования П.И. Монастырный.