УДК 33:517.925

Б.С. КАЛИТИН, Е.А. ПРИСТРЕМ

МОДЕЛЬ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РЫНКА ДВУХ КОНКУРЕНТОВ С ЭФФЕКТОМ РЕКЛАМЫ

The nonlinear differential market model of two interchangeable goods or services with subsystems of sales volumes is investigated with using of advertising by each of competitors. The problem about stability of the changed economic balance (with advertising) under condition of prices saving basically and in critical cases is investigated.

В работах [1–5] рассматриваются динамические модели конкурентного рынка, где вектор цен удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Модели первого [1–3] и второго [4, 5] порядков выделяются в зависимости от использования первой либо второй производной цены как функции времени.

В настоящей работе строится дифференциальная модель рынка двух взаимозаменяемых товаров, включающая подсистему объемов продаж обоих конкурентов, каждый из которых, начиная с некоторого момента, может воспользоваться рекламной кампанией своего товара или услуги. Возмущение, вызванное воздействием рекламы, отражается в модели определенными экономическими силами, которые приводят к смещению установившегося ранее равновесия цен и объемов продаж в некоторое его новое положение. Исследуются свойства возмущенного экономического равновесия и решается задача о его устойчивости в случае, когда равновесные рыночные цены остаются прежними.

Будем использовать следующие обозначения:

$p_j(t)$ – цена единицы товара j-го конкурента в момент времени t;

p_j^0 – равновесная цена j-го товара;

$q_j(t)$ – количество единиц товара j-го конкурента, реализуемого в момент t;

q_j^0 – равновесное количество единиц j-го товара;

p_j^* – нижнее пороговое значение цены j-го товара, связанное с осуществленными затратами со стороны продавца;

p_j^{**} – верхнее потолочное значение цены j-го товара, выше которого покупатели отказываются приобретать предлагаемый товар;

$p_j' = p_j^0 - p_j^*$ – излишек цены товара j-го конкурента;

$p_j'' = p_j^{**} - p_j^0$ – излишек цены покупателей j-го товара.

Таким образом, допустимые цены модели изменяются в интервале $p_j^* < p_j < p_j^{**}$, $p_j^* < p_j^0 < p_j^{**}$, j=1, 2.

1. Математическая модель. Воспользуемся моделью первого порядка рынка типа «эффективная конкуренция» относительно цен и объемов продаж [3, с. 148]. Предварительно отметим, что в модели двух конкурентов коэффициенты эффекта насыщения [3, с. 146] удовлетворяют равенствам $m_{11} + m_{21} = m$, $m_{12} + m_{22} = m$, $m > 0$. При этом, так как матрица $M = (m_{ij})$, $i, j = \overline{1,2}$, симметрична, т. е. $m_{12} = m_{21}$, отсюда следует совпадение коэффициентов $m_{11} = m_{22}$.

Кроме того, согласно предположению о знакопостоянстве матрицы M [3, с. 146] считаем, что $m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} > 0$. С учетом этого можем для краткости записать $m_1 = m_{11} = m_{22}$, $m_2 = m_{12} = m_{21}$, где $m_1 > m_2 \ge 0$.

Поэтому для удобства величину m_1 будем называть *эффектом насыщения для продавца*, а величину m_2 – *эффектом насыщения для его партнера* (*конкурента*).

Относительно постоянных $g_{ji}>0$ – сил отклонения цен [3, с. 145] – предполагаем, что выполняется условие симметрии:

$$gQ^0/P^0 = g_{ji}q_j^0/p_j^0 = g_{ij}q_i^0/p_i^0,\ i,j=1,2,$$

где $Q^0 = q_1^0 + q_2^0$ – исходный равновесный объем продаж рынка, а $P^0 = p_1^0 + p_2^0$ – сумма равновесных цен.

Наконец, поскольку директивные органы руководствуются общим правилом взимания налогов и не делают никаких различий в отношении обоих конкурентов, то, в отличие от выражений (2.19) [3, с. 131], принимаем экономическую силу государства согласно следующей формуле:

$$G_j = \frac{r}{Q^0}(p_jq_j - p_j^0q_j^0),\ \ r>0,\ \ j=1,2,$$

где множитель $1/Q^0$ введен для унификации физической размерности экономической силы.

Таким образом, с учетом отмеченных предположений модель двух конкурентов представляется системой четырех нелинейных дифференциальных уравнений относительно вектора цен $p=(p_1,p_2)$ и вектора объемов продаж $q=(q_1,q_2)$ вида

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{v_1p_1'(p_1-p_1^0)}{p_1-p_1^*} - \dfrac{d_1p_1''(p_1-p_1^0)}{p_1^*-p_1} + \dfrac{r}{Q^0}(p_1q_1 - p_1^0q_1^0) - c((p_1-p_1^0)-(p_2-p_2^0)), \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{v_2p_2'(p_2-p_2^0)}{p_2-p_2^*} - \dfrac{d_2p_2''(p_2-p_2^0)}{p_2^{**}-p_2} + \dfrac{r}{Q^0}(p_2q_2 - p_2^0q_2^0) - c((p_2-p_2^0)-(p_1-p_1^0)), \\ \dot{q}_1 = -g\dfrac{Q^0}{P^0}((p_1-p_1^0)-(p_2-p_2^0)) - m_1(q_1-q_1^0) - m_2(q_2-q_2^0), \\ \dot{q}_2 = -g\dfrac{Q^0}{P^0}((p_2-p_2^0)-(p_1-p_1^0)) - m_2(q_1-q_1^0) - m_1(q_1-q_1^0). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $v_1, d_1, v_2, d_2, r, c, m_1$ положительны, а g, m_2 – неотрицательны; $p_j = p_j^0$, $q_j = q_j^0$, j=1, 2, – исходное экономическое равновесие, установившееся до использования рекламы.

2. Модель с учетом экономических сил рекламы. Предположим, что в определенный момент времени конкуренты подключают торговую рекламу. Это естественным образом приводит к возмущению рыночной ситуации. В данной работе будем считать возмущающее действие рекламы таким, что цены конкурентов остаются прежними, а изменяются лишь объемы продаж. Тогда согласно принципам построения моделей [1, 3] соответствующее внешнее возмущение рыночной ситуации можно отразить в виде некоторых функций-сил, которые следует добавить в правые части дифференциальных уравнений для переменных (q_1, q_2). Предполагая действие рекламы на рассматриваемом интервале времени постоянным, в качестве таких сил выберем следующие:

$R_{jj}q_j^0$ – эффект влияния рекламы продукции j-го конкурента рынка на собственный объем продаж;

$-R_{ji}q_i^0$ – эффект влияния рекламы продукции i-го конкурента на объем продаж j-го конкурента ($i\neq j$) (знак «–» отражает эффект конкурентной борьбы).

Тогда с учетом рекламы модель двух конкурентов (1) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{v_1p_1'(p_1-p_1^0)}{p_1-p_1^*} - \dfrac{d_1p_1''(p_1-p_1^0)}{p_1^*-p_1} + \dfrac{r}{Q^0}(p_1q_1 - p_1^0\tilde{q}_1) - c((p_1-p_1^0)-(p_2-p_2^0)), \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{v_2p_2'(p_2-p_2^0)}{p_2-p_2^*} - \dfrac{d_2p_2''(p_2-p_2^0)}{p_2^{**}-p_2} + \dfrac{r}{Q^0}(p_2q_2 - p_2^0\tilde{q}_2) - c((p_2-p_2^0)-(p_1-p_1^0)), \\ \dot{q}_1 = -g\dfrac{Q^0}{P^0}((p_1-p_1^0)-(p_2-p_2^0)) - m_1(q_1-q_1^0) - m_2(q_2-q_2^0) + R_1(q^0), \\ \dot{q}_2 = -g\dfrac{Q^0}{P^0}((p_2-p_2^0)-(p_1-p_1^0)) - m_2(q_1-q_1^0) - m_1(q_2-q_2^0) + R_2(q^0), \end{cases} \quad (2)$$

где принято

$$R_1(q^0) = R_{11}q_1^0 - R_{12}q_2^0,\ \ R_2(q^0) = -R_{21}q_1^0 + R_{22}q_2^0, \quad (3)$$

а $R_{jj} > 0$ и $R_{ji} > 0$ – коэффициенты, определяющие интенсивности соответствующих экономических сил рекламы; $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ – новые равновесные объемы продаж.

3. Экономическое равновесие при воздействии рекламы. Введение дополнительных функций-сил в правые части системы (1) приводит к изменению состояния экономического равновесия.

Для определения компонент нового равновесия приравниваем нулю правые части 3-го и 4-го уравнений системы (2). После несложных преобразований получаем, что новое равновесие $p_j = p_j^0$, $q_j = \tilde{q}_j$, j=1, 2, где цена осталась прежней, удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} m_1 q_1 + m_2 q_2 = R_1(q^0) + m_1 q_1^0 + m_2 q_2^0, \\ m_2 q_1 + m_1 q_2 = R_2(q^0) + m_2 q_1^0 + m_1 q_2^0, \quad m_1 > m_2. \end{cases} \tag{4}$$

Положив

$$R(q^0) = R_1(q^0) - R_2(q^0), \tag{5}$$

из (4) получаем компоненты состояния равновесия $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$, которые можно представить в виде следующих формул:

$$\tilde{q}_1 = q_1^0 + \frac{R_1(q^0)}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 R(q^0)}{m_1^2 - m_2^2}, \ \tilde{q}_2 = q_2^0 + \frac{R_2(q^0)}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 R(q^0)}{m_1^2 - m_2^2}, \ m_1 > m_2. \tag{6}$$

Таким образом, выражения (6) определяют единственное (изолированное) состояние равновесия объемов продаж. Другими словами, существует окрестность возмущенных состояний равновесия $p_j = p_j^0$, $q_j = \tilde{q}_j$, j=1, 2, в которой нет других равновесных значений объемов продаж модели (2).

Дадим экономическое толкование новому состоянию экономического равновесия, определяемому формулами (6). Для этого укажем ряд специальных свойств.

1. Знак второго слагаемого в каждом из выражений (6) зависит от знака величин $R_1(q^0)$ и $R_2(q^0)$, определяемых формулами (3). Поэтому, если знак $R_1(q^0)$ ($R_2(q^0)$) положителен, равновесное значение q_1^0 (соответственно q_2^0) получает положительное приращение за счет второго слагаемого и, наоборот, при отрицательном знаке – отрицательное приращение. Следовательно, величину $R_1(q^0)$ ($R_2(q^0)$) можно охарактеризовать как *эффект конкуренции рекламы* для первого (соответственно для второго) партнера рынка. Отметим, что указанное приращение объемов продаж пропорционально эффекту конкуренции рекламы.

Кроме того, по своему определению величины $R_1(q^0)$ и $R_2(q^0)$ могут принимать значения разных знаков или равняться нулю независимо друг от друга. Это означает, что для каждого продавца эффект конкуренции реклам может быть положительным, отрицательным или нулевым.

2. Определяемая формулой (5) величина $R(q^0)$ может быть истолкована как *запас рекламного превосходства первого партнера рынка* (*над вторым*). В зависимости от значений параметров модели $R(q^0)$, как нетрудно видеть, принимает значения разных знаков или обращается в нуль.

3. Последние слагаемые в каждой из формул (6) равны по абсолютной величине и различаются в этих выражениях лишь знаком. Поэтому возникающее в связи с рекламой изменение объема продаж этой части приращения в сумме (по обоим конкурентам) равно нулю.

Следовательно, напрашивается вывод о том, что третье слагаемое в формулах (6) отражает эффект перераспределения клиентов (при сохранении их количества) между продавцами, вызванный действием рекламы. Их количество пропорционально абсолютной величине эффекта рекламного превосходства.

Ясно, что *запас рекламного превосходства второго партнера рынка* (*над первым*) отличается лишь знаком и равен $-R(q^0)$.

Заметим, что если первый из конкурентов использует рекламу, а второй – нет, то запас рекламного превосходства первого является положительной величиной, т. е. $R(q^0) > 0$, а значит, объем продаж первого их них возрастает.

Кроме того, если m_2=0, то последнее слагаемое в формулах (6) отсутствует. Это означает, что если динамика объемов продаж каждого из продавцов не зависит от эффекта насыщения своего партнера, то перераспределение клиентов между конкурентами не происходит. В этом случае формулы (6) принимают простой вид:

$$\tilde{q}_1 = q_1^0 + \frac{R_1(q^0)}{m_1},\;\; \tilde{q}_2 = q_2^0 + \frac{R_2(q^0)}{m_1},\;\; m_1 > 0.$$

Таким образом, здесь приращение объема продаж каждого конкурента прямо пропорционально эффекту рекламы и обратно пропорционально эффекту насыщения.

4. Для сравнения приращений объемов продаж обоих продавцов воспользуемся следующим обстоятельством. Рассмотрим сумму $(\tilde{q}_1 - q_1^0) + (\tilde{q}_2 - q_2^0)$ изменений объемов продаж рынка. Складывая последние два уравнения системы (2) и интегрируя, запишем

$$(q_1(t) - q_1^0) + (q_2(t) - q_2^0) = \frac{R_1 + R_2}{m}(1 - e^{-mt}).$$

Поэтому новое равновесие объемов продаж $q_j = \tilde{q}_j$, j=1, 2, удовлетворяет следующему условию типа равенства

$$\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 = q_1^0 + q_2^0 + \frac{R_1 + R_2}{m}.$$

Более того, выполняется следующее свойство:

а) *суммарный объем продаж рынка* $q_1(t) + q_2(t)$ *как функция времени – экспоненциально устойчивая величина*, *для которой*

$$\lim_{t\to\infty}\big(q_1(t) + q_2(t)\big) = q_1^0 + q_2^0 + \frac{R_1 + R_2}{m}.$$

Таким образом, суммарное приращение объемов продаж рынка, вызванное эффектом рекламы, постоянно. Следовательно, имеет место свойство:

б) *увеличение объема продаж при использовании рекламы одним из конкурентов происходит за счет сокращения* (*на такое же количество*) *объема продаж у его партнера*.

Объяснение этому феномену следует искать в свойстве симметричности, используемом при построении подсистемы дифференциальных уравнений относительно объемов продаж.

С помощью формул (6) нетрудно установить также и следующие свойства:

в) *приращение объема продаж первого конкурента положительно* (*равно нулю*) *тогда и только тогда*, *когда произведение эффекта конкуренции его реклам на эффект насыщения для конкурента больше*, *чем произведение эффекта конкуренции реклам второго из них на эффект насыщения для первого конкурента* (*соответственно равно этому произведению*).

Другими словами, имеют место соотношения

$$\tilde{q}_1 - q_1^0 > 0 \;\Leftrightarrow\; R_1(q^0)m_2 > R_2(q^0)m_1 \;\; \left(\tilde{q}_1 - q_1^0 = 0 \;\Leftrightarrow\; R_1(q^0)m_2 = R_2(q^0)m_1\right).$$

Отсюда, в частности, вытекают следующие свойства:

г) *если приращение объема продаж у одного из конкурентов равно нулю*, *то приращение объема продаж у второго также равно нулю*;

д) *если первый продавец использует рекламу*, *а второй – нет*, *то приращение объема продаж у первого из них больше нуля*.

4. Устойчивость. Пусть $p_j = p_j^0$, $q_j = \tilde{q}_j$, j=1, 2, – исследуемое на устойчивость состояние равновесия модели (2). Для этого преобразуем модель, вводя замену переменных $x_j = p_j - p_j^0$, $y_j = q_j - \tilde{q}_j$, j=1, 2. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{v_1 p' x_1}{x_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' x_1}{p_1'' - x_1} + \dfrac{r}{Q^0}(x_1 y_1 + p_1^0 y_1 + \tilde{q}_1 x_1) - c(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' x_2}{x_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' x_2}{p_2'' - x_2} + \dfrac{r}{Q^0}(x_2 y_2 + p_2^0 y_2 + \tilde{q}_2 x_2) - c(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -g\dfrac{Q^0}{P^0}(x_1 - x_2) - m_1 y_1 - m_2 y_2, \\ \dot{y}_2 = -g\dfrac{Q^0}{P^0}(x_2 - x_1) - m_2 y_1 - m_1 y_2. \end{cases} \tag{7}$$

В системе (7) экономическому равновесию $p_j = p_j^0$, $q_j = \tilde{q}_j$, j=1, 2, отвечает начало координат $x_j = 0$, $y_j = 0$, j=1, 2.

На основании теоремы 8.1 [3, с. 147] сумма $y_1 + y_2$ является экспоненциально устойчивой величиной со скоростью сходимости $\bar{M} = m_1 + m_2 > 0$. Поэтому, сделав замену переменной $z = y_1 + y_2$ и положив $m = m_1 - m_2$, можно перейти к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{v_1 p'x_1}{x_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' x_1}{p_1'' - x_1} - \left(c - r\tilde{q}_1 / Q^0\right)x_1 + cx_2 + r(p_1^0 y_1 + x_1 y_1)/Q^0, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' x_2}{x_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' x_2}{p_2'' - x_2} - \left(c - r\tilde{q}_2 / Q^0\right)x_2 + cx_1 + r\left(-p_2^0 y_1 + p_2^0 z + x_2(z - y_1)\right)/Q^0, \\ \dot{y}_1 = -gQ^0 x_1 / P^0 + gQ^0 x_2 / P^0 - my_1, \\ \dot{z} = -\bar{M}z. \end{cases} \tag{8}$$

В силу предположений относительно модели параметр $\bar{M}$ >0, а, значит, асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (8) (а также и неустойчивость) равносильна асимптотической устойчивости (соответственно неустойчивости) редуцированной системы третьего порядка, получающейся из нее в частном случае при z=0. В этой ситуации модель представляется системой трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{v_1 p_1' x_1}{x_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' x_1}{p_1'' - x_1} - \left(c - r\tilde{q}_1 / Q^0\right)x_1 + cx_2 + r(p_1^0 y_1 + x_1 y_1)/Q^0, \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' x_2}{x_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' x_2}{p_2'' - x_2} - \left(c - r\tilde{q}_2 / Q^0\right)x_2 + cx_1 - r(p_2^0 y_1 + x_2 y_1)/Q^0, \\ \dot{y}_1 = -gQ^0 x_1 / P^0 + gQ^0 x_2 / P^0 - my_1. \end{cases} \tag{9}$$

Соответствующая система линейного приближения для (9) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -s_1 x_1 + cx_2 + rp_1^0 y_1 / Q^0, \\ \dot{x}_2 = cx_1 - s_2 x_2 - rp_2^0 y_1 / Q^0, \\ \dot{y}_1 = -gQ^0 x_1 / P^0 + gQ^0 x_2 / P^0 - my_1, \end{cases}$$

где $s_j = v_j + d_j - r\tilde{q}_j / Q^0 + c$ – запас прочности j-го конкурента [1].

Пусть

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \; - \tag{10}$$

ее характеристическое уравнение, где коэффициенты многочлена определяются выражениями

$$a_1 = s_1 + s_2 + m, \;\; a_2 = s_1 s_2 + (s_1 + s_2)m + rg - c^2,$$
$$a_3 = (s_1 s_2 - c^2)m + rg(p_1^0(s_2 - c) + p_2^0(s_1 - c))/P^0.$$

Тогда условия асимптотической устойчивости Рауса – Гурвица [6] примут вид:

1) $a_1 > 0$; 2) $a_1 a_2 > a_3$; 3) $a_3 > 0$.

Исследуем эти условия. Во-первых, заметим, что если $s_1 < c$ и $s_2 < c$, то $a_3 < 0$, и тогда имеет место неустойчивость равновесия.

Во-вторых, при $s_2 = c$ соответственно получаем

$$a_1 = s_1 + c + m, \;\; a_2 = c(s_1 - c) + (s_1 + c)m + rg, \quad a_3 = (s_1 - c)\left(cm + rgp_2^0 / P^0\right).$$

Поэтому для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы выполнялось неравенство $s_1 > c$. В этом случае первое из условий, а именно $a_1 > 0$, выполняется.

Выпишем подробно условие асимптотической устойчивости 2). Оно может быть преобразовано следующим образом:

$$c(s_1 + c)(s_1 - c) + m^2(s_1 + c) + m(s_1^2 + 2s_1 c) > -rg\left(p_1^0(s_1 + c) + 2p_2^0 c\right)/P^0.$$

Отсюда видно, что неравенство $a_1 a_2 > a_3$ выполняется при $s_1 > c$.

Таким образом, доказано, что экономическое равновесие асимптотически устойчиво, если $s_1 \geq c$, $s_2 \geq c$, $s_1 + s_2 > 2c$, и неустойчиво, если $s_1 < c$, $s_2 < c$. В подробной записи это утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Экономическое равновесие асимптотически устойчиво, если*:

$$r \leq (v_1 + d_1)\left(1 + \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_1}\right), \; r \leq (v_2 + d_2)\left(1 + \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2}\right), \; r < \frac{v_1 + d_1 + v_2 + d_2}{2}.$$

Если выполняются неравенства

$$r > (v_1 + d_1)\left(1 + \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_1}\right), \; r > (v_2 + d_2)\left(1 + \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2}\right),$$

то экономическое равновесие неустойчиво, однако при этом суммарный объем продаж рынка является экспоненциально устойчивой величиной.

Условия устойчивости и неустойчивости, сформулированные теоремой (1), позволяют сделать следующий вывод: *эффект рекламы может привести к дестабилизации рыночных цен за счет того из конкурентов, у которого объем продаж уменьшился.* Естественным продолжением этого явления будет, как нам кажется, снижение цены у последнего конкурента.

4.1. Критический случай. Отметим, что если $s_1 = c$ и $s_2 = c$, то свободный член характеристического уравнения (10) равен нулю, т. е. имеем критический случай одного нулевого корня. В этой ситуации модель принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -cx_1 + rp_1^0 y_1 / Q^0 + cx_2 + H_{11}x_1^2 - H_{12}x_1^3 + rx_1 y_1 / Q^0 + o(x_1^3), \\ \dot{x}_2 = cx_1 - cx_2 - rp_2^0 y_1 / Q^0 + H_{21}x_2^2 - H_{22}x_2^3 - rx_2 y_1 / Q^0 + o(x_2^3), \\ \dot{y}_1 = -gQ^0 x_1 / P^0 + gQ^0 x_2 / P^0 - my_1, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$H_{j1} = \frac{v_j}{p'_j} - \frac{d_j}{p''_j}, \; H_{j2} = \frac{v_j}{(p'_j)^2} + \frac{d_j}{(p''_j)^2}, \; i, j = 1, 2, \; i \neq j.$$

Для исследования проблемы устойчивости равновесия рассмотрим два случая.

4.1.1. Случай $p_1^0 \neq p_2^0$. Пусть сначала исходные цены конкурентов не равны между собой. Сделаем в модели (11) замену переменных по формуле

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2a + bP^0} & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{2a + bP^0} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{Q^0(a + bp_2^0)}{P^0} & -\dfrac{Q^0(a + bp_1^0)}{P^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тогда приходим к системе, в которой дифференциальное уравнение относительно z_1 для значений $z_2 = z_3 = 0$ принимает вид

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{(2a + bP^0)^2}\left(H_{11} + H_{21} + b(p_1^0 - p_2^0)\left(\frac{r}{P^0} - 1\right)\right)z_1^2 - \left(H_{12} + H_{22}\right)z_1^3 + o(z_1^3), \tag{13}$$

где

$$a = \frac{cm(p_1^0 + p_2^0)}{cr(p_1^0 - p_2^0)}, \quad b = \frac{gr}{cr(p_1^0 - p_2^0)}, \; p_1^0 \neq p_2^0.$$

Заметим, что при условии $p_1^0 = p_2^0$ замена переменных (12) невозможна, а выражения коэффициентов a и b теряют смысл, в связи с этим и возникла необходимость рассмотрения двух отдельных случаев.

Поэтому

$$2a + bP^0 = \frac{P^0(2cm + gr)}{cr(p_1^0 - p_2^0)}.$$

И тогда уравнение (13) дает следующее соотношение:

$$\dot{z}_1 = \left(\frac{cr(p_1^0 - p_2^0)}{P^0(2cm+gr)}\right)^2 \left(\left(a+bp_2^0\right)H_{11} + \left(a+bp_1^0\right)H_{21}\right)z_1^2 -$$

$$-\left(\frac{cr(p_1^0 - p_2^0)}{P^0(2cm+gr)}\right)^3 \left(\left(a+bp_2^0\right)H_{12} + \left(a+bp_1^0\right)H_{22}\right)z_1^3 + o(z_1^3).$$

4.1.2. Случай $p_1^0 = p_2^0$. Рассмотрим теперь ситуацию, когда исходные цены конкурентов совпадают. Тогда, в отличие от (12), используем следующую замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае дифференциальное уравнение относительно z_1 для значений $z_2 = z_3 = 0$ принимает вид

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{4}\left(H_{11} + H_{21}\right)z_1^2 - \frac{1}{8}\left(H_{12} + H_{22}\right)z_1^3 + o(z_1^3). \tag{14}$$

Таким образом, в результате рассмотрения ситуаций 4.1.1 и 4.1.2 согласно алгоритму исследования критического случая одного нулевого корня [6] приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Если*

$$\left(\frac{cmP^0}{gr} + p_2^0\right)\left(\frac{v_1}{p_1'} - \frac{d_1}{p_1''}\right) + \left(\frac{cmP^0}{gr} + p_1^0\right)\left(\frac{v_2}{p_2'} - \frac{d_2}{p_2''}\right) = 0, \tag{15}$$

то экономическое равновесие асимптотически устойчиво.

Если же условие (15) *нарушается, то равновесие неустойчиво, однако суммарный объем продаж рынка является экспоненциально устойчивой величиной.*

Замечание 1. Условие (15) вполне реализуемо, например, в случае абсолютной симметрии параметров обоих конкурентов. Действительно, так как $v_1 = v_2 = v$, $d_1 = d_2 = 2$, $p_1^* = p_2^* = p^*$, $p_1^{**} = p_2^{**} = p^{**}$, $p_1^0 = p_2^0 = p^0$, то из равенства (15) получаем значение равновесной цены

$$p^0 = \frac{vp^{**} + dp^*}{v+d},$$

которое принадлежит интервалу изменения цен $]p^*, p^{**}[$.

4.2. Товары повседневного спроса. Рассмотрим случай, когда все коэффициенты $g_{ji} = 0$. Это означает, что эффект изменения цен не влияет на объемы продаж, что соответствует ситуации рынка недорогих товаров повседневного спроса. Тогда система (9) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{v_1 p_1' x_1}{x_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' x_1}{p_1'' - x_1} + \dfrac{r}{Q^0}(x_1 y_1 + p_1^0 y_1 + \tilde{q}_1 x_1) - c(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' x_2}{x_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' x_2}{p_2'' - x_2} + \dfrac{r}{Q^0}(x_2 y_2 + p_2^0 y_2 + \tilde{q}_2 x_2) - c(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -m_1 y_1 - m_2 y_2, \\ \dot{y}_2 = -m_2 y_1 - m_1 y_2. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $V(y_1, y_2) = y'My$, где матрица $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_1 \end{pmatrix}$. Ее производная по времени, вычисленная в силу системы (16), определяется равенством $\dot{V}(y_1, y_2) = -2(m_1 y_1 + m_2 y_2)^2 - 2(m_2 y_1 + m_1 y_2)^2$.

Функция V является знакоположительной, а ее производная $\dot{V}$ – знакоотрицательной. Поэтому согласно теореме 2.7 [3, с. 33] нулевое решение системы (16) будет асимптотически устойчивым (соответственно неустойчивым), если на подмножестве $Y=\{(x, y)\in\Re^4$: $\dot{V}(y_1, y_2)=0\}$ система (16) будет асимптотически устойчивой. Очевидно, что на многообразии Y система (16) переходит в систему с постоянным объемом продаж.

Случай, когда объемы продаж обоих товарав не меняются, соответствует нулевым значениям параметров g, m_1 и m_2. При этом система (9) состоит из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{v_1 p' x_1}{x_1 + p_1'} - \dfrac{d_1 p_1'' x_1}{p_1'' - x_1} + \dfrac{r}{Q^0}\tilde{q}_1 x_1 - c(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{v_2 p_2' x_2}{x_2 + p_2'} - \dfrac{d_2 p_2'' x_2}{p_2'' - x_2} + \dfrac{r}{Q^0}\tilde{q}_2 x_2 - c(x_2 - x_1). \end{cases} \qquad (17)$$

Ее система линейного приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -s_1 x_1 + c x_2, \\ \dot{x}_2 = c x_1 - s_2 x_2. \end{cases}$$

При выполнении следующих условий Рауса – Гурвица для системы

$$1)\ s_1>0,\ s_2>0;\ 2)\ s_1 s_2>c^2$$

нулевое решение асимптотически устойчиво.

Кроме того, используемая выше функция Ляпунова позволяет также утверждать, что согласно теореме 2.8 [3, с. 34] глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (17) влечет глобальную асимптотическую устойчивость и для системы (16).

Из приведенных рассуждений получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если эффект изменения цен не влияет на объемы продаж*, *то экономическое равновесие асимптотически устойчиво* (*глобально асимптотически устойчиво*) *тогда и только тогда*, *когда оно асимптотически устойчиво* (*соответственно глобально асимптотически устойчиво*) *при постоянном объеме продаж*.

1. Калитин Б.С. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1997. № 2. С. 68.
2. Там же. 2000. № 1. С. 42.
3. Калитин Б.С. Математические модели экономики. Мн., 2004.
4. Калитин Б.С. // Тр. Ин-та математики. 2006. Т. 14. № 1. С. 62.
5. Калитин Б.С. Экономические модели второго порядка конкурентного рынка. Мн., 2007.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.

Поступила в редакцию 27.05.08.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

Екатерина Алексеевна Пристрем – студентка 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.