УДК 330.47, 338.462, 336.018, 519.2, 519.86

А.П. БОГОМОЛОВ

ОГРАНИЧЕНИЯ МОДЕЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ ОПЦИОНОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ ИНВЕСТИЦИЙ В ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

New real option model is introduced for estimating information technology investment projects cash flow under noncentral chi-squared distribution stochastic process and non-constant volatility assumptions. Also some classical option models are analyzed with focus on limitations of the model and application.

Методы оценки стоимости и риска инвестиционных проектов получили значительное развитие в научной литературе и практике за последние 20 лет. Метод и модели реальных опционов имеют существенные преимущества для ex ante оценки стоимости и риска инвестиций в информационные технологии. Этот аналитический метод применим в области стратегического планирования, бюджетирования, финансового менеджмента, управления ИТ-проектами, оценки эффективности инвестиций, управления риском.

Известны работы Trigeorgis (1991) [1], Schwartz – Moon (2000), Schwartz (2004) [2, 3], Berk – Green – Naik (2004) [4], Ott – Thompson (1996), Dixit – Pyndick (1994) [5, 6], Carr (1988), Geske (1979), Copeland – Keenan (1998), Margrabe (1978). Применяются модели финансовых опционов для аппроксимации стоимости реальных опционов. Наиболее распространенными являются биноминальная модель Cox – Ross – Rubinstein (1979) [8, 9], модели Black – Scholes (1973) [7] и Black – Scholes – Merton (1973) [10].

Применение моделей финансовых опционов для оценки стоимости ИТ-проектов ограничено теоретическими допущениями, заложенными в эти модели.

Например, для модели Black – Scholes применяются следующие ограничения:

1) цена базисного актива S_t изменяется согласно геометрическому броуновскому движению с постоянными дрейфом и волатильностью;

2) цена распределена в соответствии с логнормальным распределением;

3) по базисному активу S_t дивиденды не выплачиваются в течение всего срока действия опциона;

4) отсутствуют трансакционные затраты, связанные с покупкой или продажей базисного актива или опциона;

5) краткосрочная безрисковая процентная ставка r известна и является постоянной в течение всего срока действия опциона;

6) любой покупатель базисного актива может получать займы по краткосрочной безрисковой ставке r;

7) короткая продажа разрешается без ограничений, и при этом продавец получает немедленно всю наличную сумму за проданный базисный актив, который также является бесконечно делимым;

8) опцион может быть исполнен только в момент истечения срока его действия;

9) торговля базисным активом ведется непрерывно.

Формула расчета стоимости опциона Call согласно данной модели имеет вид

$$C = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln S/K + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

$\Phi(d)$ – функция стандартного нормального распределения. Значение остальных переменных приведено в таблице.

Сравнительная интерпретация переменных модели Black – Scholes при оценке финансовых опционов и для аппроксимации реальных опционов при оценке справедливой стоимости денежного потока ИТ-проекта

Обозначения	Терминология реальных опционов при оценке справедливой стоимости ИТ-проекта	Терминология финансовых опционов
C	Стоимость реального опциона на денежный поток по ИТ-проекту	Стоимость опциона Call на акцию
K	Бюджетный лимит денежного потока по ИТ-проекту	Цена исполнения опциона (страйк-цена)
σ	Неопределенность денежного потока по ИТ-проекту (измеренная как стандартное отклонение денежного потока проекта, приведенное к годовому эквиваленту)	Волатильность акции
S	Текущий денежный поток по ИТ-проекту	Текущая цена акции
T	Ожидаемый срок окончания ИТ-проекта, выраженный в годах	Время до истечения опциона
R	Стоимость капитала (% годовых с непрерывной капитализацией, выраженный в долях единицы)	Безрисковая процентная ставка

Модель Black – Scholes исследователи и практики применяют для оценки реального опциона стоимости инновационных проектов [1, 10] (в том числе ИТ-проектов), если изменение цен базисного актива соответствует логнормальному распределению и описывается законом $dS = \mu S dt + \sigma S dz$.

В практике оценки стоимости и риска ИТ-проектов редко встречается большое количество событий и соответственно невозможно применить центральную предельную теорему вследствие недостаточности объема выборки одновременно исполняемых схожих ИТ-проектов и доступных для измерения данных о волатильности денежного потока.

Метод реальных опционов для управления риском инвестиций в информационные технологии примени́м при наличии следующих условий:

- имеется неопределенность технической реализации проекта;
- присутствует неопределенность будущих денежных потоков, получаемых после внедрения информационных технологий (операционного, технического, рыночного или иного характера);
- неопределенность связана со стоимостью и денежным потоком проекта;
- менеджмент имеет гибкие возможности влиять на ход выполнения и затраты по проекту;
- исполнимость стратегий управления;
- рациональные ожидания при выполнении проекта;
- финансирование осуществляется собственным капиталом, не рассматривается ситуация, когда финансирование ИТ-проекта производится с использованием кредитных ресурсов;
- денежный поток ИТ-проекта положительный;
- срок T реального опциона на денежный поток ИТ-проекта равен сроку осуществления проекта.

Автор предполагает, что нецентральное распределение χ^2 более точно описывает изменения денежного потока ИТ-проектов, чем логнормальное распределение.

До представления формулы расчета реального опциона на денежный поток ИТ-проекта остановимся на некоторых свойствах распределения χ^2.

Если $Z_1,\cdots,Z_\upsilon$ являются независимыми нормально распределенными случайными величинами и $\delta_1,\cdots,\delta_\upsilon$ – константами, тогда распределение случайной величины

$$Y=\sum_{j=1}^{\upsilon}(Z_j+\delta_j)^2$$

является нецентральным распределением χ^2 с υ степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda=\sum_{j=1}^{\upsilon}\delta_j^2$, обозначаемым как $\chi'^2\left|\upsilon\right.$ или $\chi'^2_\upsilon(\lambda)$. Если $\delta_j=0$ для всех *j*, то *Y* имеет центральное распределение χ^2 с υ степенями свободы, обозначаемое как χ^2_υ.

Функция распределения вероятностей $\chi'^2_\upsilon(\lambda)$ [13]:

$$P(\chi'^2\left|\upsilon,\lambda\right.)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}P(\chi'^2\left|\upsilon+2j\right.),$$

где $\lambda>0$, или

$$F(x;\upsilon,\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}P\left(\chi^2_{\upsilon+2j}\le x\right). \tag{1}$$

Стоимость опциона Call за интервал времени длительностью τ до его исполнения запишем в виде [9]:

$$\begin{aligned}C_t&=e^{-r\tau}\int_K^{\infty}f^*(S_T;S_t,T>t)(S_T-K)dS_T=\\&=e^{-r\tau}\int_K^{\infty}S_Tf^*(S_T;S_t,T>t)dS_T-e^{-r\tau}K\int_K^{\infty}f^*(S_T;S_t,T>t)dS_T,\end{aligned} \tag{2}$$

где $f^*(S_T; S_t, T>t)$ – нейтральная к риску условная плотность вероятностей цены акции S_T в дату исполнения *T* при условии, что в текущую дату *t* цена акции была равна S_t.

Использование представлений (1) и (2) позволяет доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть на произвольном временном промежутке* [0, *T*], *где* $T>0$, *выполняются все предположения Black – Scholes, кроме предположения о стохастической динамике цены базисного актива* (п. 1, 2)*. В дополнение к ним примем предположения:*

1. *Денежный поток* ИТ-*проекта S удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению*

$$dS=\mu Sdt+\sigma_0S^{\frac{\beta}{2}}dZ,\ \beta<2,$$

где Z является Винеровским процессом.

2. *Функция платежа имеет вид*

$$\max\,(S_T-K,0)=\begin{cases}S_T-K, & \text{если } S_T>K,\\ 0, & \text{если } S_T\le K.\end{cases}$$

Тогда справедлива формула

$$C_t=S_t-e^{-r\tau}K-S_tF(2y;\frac{2}{2-\beta},2x)+e^{-r\tau}KF(2x;\frac{2}{2-\beta},2y). \tag{3}$$

где $y=\kappa K^{2-\beta}$, $x=\kappa S_t^{2-\beta}e^{(2-\beta)r\tau}$, $\kappa=\dfrac{2r}{\sigma_0{}^2(2-\beta)[e^{(2-\beta)r\tau}-1]}$, *t – время определения текущего денежного потока ИТ-проекта* S_t; C_t – *стоимость реального опциона на денежный поток по ИТ-проекту в момент времени t*; *r – стоимость капитала* (*% годовых с непрерывной капитализацией, выраженный в долях единицы*); $F(z;\upsilon,k)$ *– функция распределения вероятностей* χ^2, *определяемая формулой* (1); σ_0 *– начальная волатильность денежного потока ИТ-проекта*; β *– параметр, определяющий зависимость изменения волатильности от изменения цены согласно предположению* 1, $\tau = T-t$, *T – время окончания срока ИТ-проекта.*

Доказательство. В [11] и в предположениях теоремы получена формула для цены опциона Call в виде

$$C_t = S_t \int_y^\infty e^{-w-x}(w/x)^{1/(4-2\beta)} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw})dw - e^{-r\tau}K\int_y^\infty e^{-w-x}(x/w)^{1/(4-2\beta)} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw})dw.$$

Эта формула неудобна тем, что интегрирование осуществляется по неограниченному интервалу и при вычислении интегралов необходимо контролировать не только сходимость рядов, при помощи которых вычисляются функции Бесселя под интегралами, но и сходимость самих интегралов при увеличении подынтегральной переменной. Более практичной в этом смысле является формула

$$C_t = S_t - e^{-r\tau}K - S_t\int_0^y e^{-w-x}(w/x)^{1/(4-2\beta)} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw})dw +$$
$$+ e^{-r\tau}K\int_0^y e^{-w-x}(x/w)^{1/(4-2\beta)} I_{1/(2-\beta)}(2\sqrt{xw})dw,$$

в которой интегрирование производится на конечном интервале. Достаточно обращать внимание только на сходимость рядов при вычислении функции Бесселя. Представим модифицированные функции Бесселя первого рода, стоящие под интегралами в виде разложения в степенной ряд:

$$I_q(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2j+q}}{j!\Gamma(q+j+1)}.$$

Это дает

$$\begin{aligned} C_t = S_t - e^{-r\tau}K - S_t\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}e^{-x}\int_0^y e^{-w}\frac{w^{j+1/(2-\beta)}}{\Gamma(j+1+1/(2-\beta))}dw + \\ + e^{-r\tau}K\sum_{j=0}^{\infty}\frac{w^j}{j!}e^{-w}\int_0^y e^{-x}\frac{x^{j+1/(2-\beta)}}{\Gamma(j+1+1/(2-\beta))}dx. \end{aligned} \qquad (4)$$

Заметим, что интегралы в правой части этого равенства являются значениями функции распределения χ-квадрат, из чего следует выражение

$$C_t = S_t - e^{-r\tau}K - S_tF(2y;\frac{2}{2-\beta},2x) + e^{-r\tau}KF(2x;\frac{2}{2-\beta},2y),$$

где функция $F(y;\upsilon,\lambda)$ определяется формулой (1), что и дает формулу (3).

В заключение отметим, что представление (4) позволяет упростить процедуру вычисления. Действительно, запишем подынтегральное выражение одного из интегралов (для другого оно идентично) в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}e^{-x}\frac{w^{j+1/(2-\beta)}}{\Gamma(j+1+1/(2-\beta))}e^{-w} = w^{1/(2-\beta)}e^{-x-w}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xw)^j}{j!\Gamma(j+1+1/(2-\beta))} = \frac{w^{1/(2-\beta)}e^{-x-w}}{\Gamma(1+1/(2-\beta))}\sum_{j=0}^{\infty}A_j,$$

где $A_0 = 1$, $A_{j+1} = [xw(j+1)^{-1}(j+1+1/(2-\beta))^{-1}]\,A_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку xw ограничено сверху $xw \le \kappa^2K^{2-\beta}S_t^{2-\beta}e^{(2-\beta)r\tau}$, а каждое последующее слагаемое A получается делением предыдущего на величину, пропорциональную квадрату индекса, то следует ожидать, что величины A_j будут быстро уменьшаться и сходимость ряда будет достаточно быстрой.

С прикладной экономической точки зрения предложенная формула позволяет избежать ограничений классических моделей, связанных с логнормальным распределением изменений цены базисного актива и постоянством волатильности. Данные обстоятельства позволяют применять эту модель для оценки денежного потока широкого круга ИТ-проектов с учетом финансовых рисков, вытекающих из неопределенности технической реализации проекта и неопределенности будущих денежных потоков, получаемых после внедрения информационных технологий (операционного, технического, рыночного или иного характера).

1. Trigeorgis L. // J. of Financial and Quantitative Analysis. 1991. Vol. 26(3). P. 309.
2. Longstaff F.A., Schwartz E.S. // Review of Financial Studies. 2001. Vol. 14(1). P. 113.
3. Schwartz E.S. // Economic Notes. 2004. Vol. 33(1). P. 23.
4. Berk J.B., Green R.C., Naik V. // [Электронный ресурс] / University of California. Berkeley, 2002. Режим доступа: http://www.haas.berkeley.etu/berk/papers/rd.pdt. Дата доступа: 21.09.2008.
5. Dixit A., Pindyck R.S. Investment Under Uncertainty. Princeton, 1994.
6. Pindyck R. // Journal of Financial Economics. 1993. Vol. 34. P. 53.
7. Black F., Scholes M. // J. of Political Economy. 1973. Vol. 81. P. 637.
8. Cox J., Ross S., Rubinstein M. // J. of Finance. 1979. Vol. 7(3). P. 229.

9. C o x J., R o s s S.A. // J. of Financial Economics. 1976. Vol. 3. P. 145.
10. H u l l J.C. Options, Futures, and Other Derivatives. 6th Edition. New Jersey, 2008.
11. S c h r o d e r M. // J. of Finance. 1989. Vol. 44. P. 211.
12. S a n k a r a n M. // Biometrica. 1963. Vol. 50. P. 199.
13. A b r a m o w i t z M., S t e g u n I. Handbook of Mathematical Functions. New York, 1972. P. 942.
14. F e l l e r W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. New York, 1965. Vol. 2. P. 58.

Поступила в редакцию 21.09.08.

Андрей Петрович Богомолов – аспирант кафедры управления информационными ресурсами Академии управления при Президенте Республики Беларусь. Научный руководитель – доктор технических наук, профессор А.С. Гринберг.