БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
кафедра высшей математики и математической физики

ФАКУЛЬТЕТ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
кафедра интеллектуальных систем

В. К. Ахраменко, М. А. Прохорович, К. В. Козадаев

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Пособие для студентов физико-математических и технических специальностей

Минск
2013

УДК 517.521(075.8)
ББК 22.161я73-1
А95

Рекомендовано советом
факультета радиофизики и компьютерных технологий
26 марта 2013 г., протокол № 8

А в т о р ы :
В. К. Ахраменко, М. А. Прохорович, К. В. Козадаев

Р е ц е н з е н т ы :
доктор физико-математических наук
В. И. Берник;
кандидат физико-математических наук
А. В. Поляков

А95 **Ахраменко, В. К.** Числовые ряды : Пособие / В. К. Ахраменко, М. А. Прохорович, К. В. Козадаев. – Минск. : БГУ, 2013. – 52 с.

Адресуется студентам факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета, обучающимся по специальностям 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность», 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника», а также студентам и преподавателям физико--математических и технических специальностей.

УДК 517.521(075.8)
ББК 22.161я73-1

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие написано авторами на основе чтения лекций и ведения практических занятий на факультете радиофизики и компьютерных технологий, а также физическом факультете Белорусского государственного университета. Оно отвечает всем требованиям, предъявляемым к современному образованию.

В пособии дается подборка заданий, а также достаточное количество примеров с решениями, поэтому оно может быть использовано для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов по разделу «Числовые ряды». Пособие написано в соответствии с действующими программами. Каждая тема сопровождается кратким теоретическим материалом.

В качестве примера применения числовых рядов в приложении приведен расчет параметров Марковских систем массового обслуживания.

1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1 Сумма ряда. Сходимость

Пусть задана последовательность действительных чисел

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Числовым рядом называется формальное выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

При этом числа a_1, a_2, a_3, ... называются членами ряда, а число a_n — общим (или n-ым) членом.

Сумма первых n членов называется n-ой частичной суммой и обозначается $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то его называют суммой ряда и говорят, что ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = S.$$

В противном случае ряд называют расходящимся и говорят, что он суммы не имеет.

Упражнение 1 Доказать по определению, что сходимость ряда не изменится, если в нем изменить (убрать, добавить, заменить) любое конечное число слагаемых, стоящих на произвольных местах.

Упражнение 2 Доказать по определению, что сходимость ряда не изменится, если все его слагаемые умножить на любое действительное число, не равное нулю.

Упражнение 3 Написать формулу общего члена рядов, по возможности в наиболее простой форме

1) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\ldots,$ **2**) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{16}{5}+\ldots,$

3) $\dfrac{1}{1001}+\dfrac{1}{2001}+\dfrac{1}{3001}+\dfrac{1}{4001}+\ldots,$ **4**) $2+\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{17}+\dfrac{3}{31}+\ldots,$

5) $1+\dfrac{1\cdot 3}{1\cdot 2}+\dfrac{2\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots.$

П Р И М Е Р 1 По заданному общему члену

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

записать ряд и найти его сумму.

Решение. Давая n последовательно значения 1, 2, $3,\ldots$ получим члены ряда:

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2},\quad a_2=\frac{1}{2\cdot 3},\quad a_3=\frac{1}{3\cdot 4},\quad \ldots.$$

Тогда числовой ряд будет иметь вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Выпишем n-ую частичную сумму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

и воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

Тогда S_n примет вид

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Таким образом ряд сходится и его сумма равна 1. □

Упражнение 4 По заданному общему члену запишите ряд и найдите его сумму

1) $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, **2**) $a_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

3) $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, **4**) $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$,

5) $a_n=\dfrac{1}{n(n+3)}$.

П Р И М Е Р 2 Показать, что ряд сходится и найти его сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

Решение. Члены данного ряда образуют геометрическую прогрессию. По формуле суммы n членов прогрессии получим

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1/2-1/2^{n+1}}{1-1/2}=1-\frac{1}{2^n}.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

Таким образом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1. \quad \square$$

Упражнение 5 Показать, что ряды сходятся и найти их суммы

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}, \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}, \qquad \mathbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{21^n},$$

$$\mathbf{4)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}, \qquad \mathbf{5)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{20^n}.$$

П Р И М Е Р 3 Показать, что ряд расходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n + \ldots .$$

Решение. Члены данного ряда образуют арифметическую прогрессию. По формуле суммы n членов

$$S_n = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = \frac{2 + 2n}{2} n = (n+1)n,$$

следовательно

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n+1)n = \infty$$

и данный ряд расходится. □

Упражнение 6 Исследовать на сходимость следующие ряды, пользуясь только определением

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{\pi^{\ln 2}}, \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10.000.000^{1000^{100^{10}}}}$$

$$\mathbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10n]{10.000.000}}.$$

Упражнение 7 Пусть $a \neq 0$. Исследовать на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots .$$

Упражнение 8 Пусть дана последовательность слагаемых бесконечной убывающей геометрической прогрессии (см. пример 2)

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}, \qquad a_n = \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Составим множество $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, элементами которого являются ряды

$$\{A_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_k\right\}_{\mathbb{N}\ni k=1}^{\infty}, \qquad A_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_k.$$

Сколько сходящихся рядов содержится во множестве $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$?

Упражнение 9 До сих пор *никому* не известно, является ли рациональным число $\pi - e$. А существует ли сходящийся ряд из рациональных чисел, сумма которого равна $\pi - e$?

Упражнение 10 Найти ошибку в рассуждениях:

◀ Пусть $S_n = 1/n$ — частичные суммы некоторого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} < 0. \tag{2}$$

Из неравенства (2) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ состоит только из отрицательных слагаемых. Следовательно, сумма этого ряда строго меньше нуля (или равна $-\infty$). ▶

1.2 Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Отсюда вытекает, что если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится; однако, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то о сходимости ряда еще ничего не известно — он может как сходиться, так и расходиться.

Упражнение 11 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости у следующих рядов:

$$\mathbf{1)}\quad \frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2n}{2n+1}+\ldots,$$

$$\mathbf{2)}\quad 1+\frac{3}{8}+\frac{5}{27}+\frac{7}{64}+\ldots+\frac{2n-1}{n^3}+\ldots,$$

$$\mathbf{3)}\quad \ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}+\ldots,$$

$$\mathbf{4)}\quad \frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots.$$

Что можно сказать о сходимости (расходимости) этих рядов без дополнительных исследований?

П Р И М Е Р 4 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{4}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\frac{4}{13}+\ldots.$$

Решение. Запишем общий член данного ряда:

$$a_n = \frac{n}{3n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости ряда — ряд расходится. □

Упражнение 12 Известно, что $a_n = a_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Известно также, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится. Чему равна сумма ряда?

П Р И М Е Р 5 Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

Решение. Необходимый признак сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Покажем, что ряд расходится. Для этого оценим его n-ую частичную сумму:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ слагаемых}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Очевидно, что $\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to\infty$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}S_n\geq\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

и ряд расходится. □

Упражнение 13 Показать, что ряды

$$\mathbf{1})\quad\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad\mathbf{2})\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad\text{(гармонический ряд)}$$

удовлетворяют необходимому признаку сходимости, но тем не менее являются расходящимися. Расходимость рядов доказать непосредственно по определению.

1.3 Критерий Коши сходимости ряда

Для того, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N_\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (зависящее только от ε) такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ и любого натурального p было справедливо неравенство

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Упражнение 14 Сформулировать критерий Коши сходимости ряда в терминах сходимости последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм, используя критерий Коши сходимости последовательностей.

При исследовании на сходимость рядов с помощью критерия Коши необходимо помнить, что упомянутое в нем число N_ε не должно зависеть от p. Это хорошо демонстрирует следующее упражнение 15:

Упражнение 15 Найти ошибку в «доказательстве» сходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

◀ Воспользуемся критерием Коши. Тогда

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \right| \leq$$

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1}}_{p \text{ слагаемых}} = \frac{p}{n+1}. \tag{3}$$

Так как при любом фиксированном p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}=0,$$

то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N_\varepsilon>0$, что для всех $n>N_\varepsilon$ для любого натурального p будет справедливо неравенство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|=$$

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right|\le\frac{p}{n+1}<\varepsilon,$$

что и доказывает сходимость гармонического ряда. ▶

П Р И М Е Р 6 Пусть x — любое действительное число. Доказать сходимость ряда с помощью критерия Коши

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x^2}{2^2}+\ldots+\frac{\cos x^n}{n^2}+\ldots,$$

Решение. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и найдем натуральное число N_ε такое, что при произвольном $p\in\mathbb{N}$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon.$$

Воспользуемся неравенством $|a+b|\le|a|+|b|$. Имеем

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\le$$

$$\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|+\left|\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|.$$

Далее заметим, что $|\cos\alpha|\le1$ для любого α и продолжим оценки

$$\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|+\left|\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}\right|+\ldots+\left|\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\le$$

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}.$$

Наконец, осталось заметить, что

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+p)^2}\le$$

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

и воспользоваться тождеством (1) из примера 1

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\to 0$$

при $n\to\infty$. Следовательно, можно взять

$$N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,\quad \text{где символ } [\,\cdot\,] \text{ обозначает целую часть числа.}$$

Ряд сходится по признаку Коши. □

Упражнение 16 В примере 6 число N_ε выбиралось натуральным. Является ли обязательным условие $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ в формулировке критерия Коши? А условие $p\in\mathbb{N}$?

Упражнение 17 С помощью критерия Коши доказать сходимость рядов

1) $a_0+\dfrac{a_1}{\pi^2}+\ldots+\dfrac{a_n}{\pi^n}+\ldots,$

2) $\dfrac{\sin(1+x)}{13}+\dfrac{\sin(4+x/2)}{13^2}+\ldots+\dfrac{\sin(n^n+x/n)}{13^n}+\ldots.$

Здесь $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел такая, что $|a_n|<\pi$ для любого $n>1984$, а x — любое фиксированное число.

Упражнение 18 Строго сформулировать утверждение о том, что для данного ряда не выполняется критерий Коши (то есть сформулировать критерий расходимости ряда как отрицание критерия Коши: *существует* $\varepsilon>0$ *такое, что...*).

П Р И М Е Р 7 С помощью критерия Коши доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots .$$

Решение. Запишем

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| =$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2p-1}. \qquad (4)$$

Необходимо показать, что существуют $\varepsilon > 0$ и натуральное p такие, что сумма (4) была бы не меньше ε (см. упражнение 18). Положим $p = 2n$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \ldots + \frac{1}{6n-1} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n-1} + \ldots + \frac{1}{6n-1}}_{2n \text{ слагаемых}} = 2n\frac{1}{6n} = \frac{1}{3}.$$

Полагая $\varepsilon = 1/4 < 1/3$ в силу критерия Коши делаем вывод о расходимости ряда. $\square$

Упражнение 19 Пользуясь критерием Коши доказать расходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

а также следующих рядов:

1) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots,$ **2**) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots.$

Упражнение 20 Пользуясь критерием Коши проверить ряды на сходимость

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ (x — действительное число),

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \cdot 3^n}$.

2 РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

2.4 Признак сравнения

Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{6}$$

с положительными членами, причем для всех достаточно больших n выполнено $a_n \leq b_n$. Тогда

1) из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5),

2) из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

Упражнение 21 Останется ли в силе признак сравнения, если для всех достаточно больших n будет выполнено $a_n \leq b_n < 0$? Если да, то как изменится его формулировка?

П Р И М Е Р 8 Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(\ln 3)^n}.$$

Решение. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}.$$

Она сходится, так как ее знаменатель $q = 1/\ln 3 < 1$. Осталось заметить, что

$$\frac{n}{(n+1)} < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{n}{(n+1)(\ln 3)^n} < \frac{1}{(\ln 3)^n}.$$

Следовательно, рассматриваемый ряд сходится по признаку сравнения. □

Упражнение 22 Доказать сходимость ряда с помощью признака сравнения

$$\sum_{n=1,\, n\neq 15}^{\infty} \frac{n}{(n-15)(\ln 3)^n}.$$

П Р И М Е Р 9 Доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

Решение. Так как

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \qquad \text{для всех} \quad n \geq 2,$$

а $1/n$ — общий член расходящегося гармонического ряда, то данный ряд расходится. □

П Р И М Е Р 10 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{где} \quad a_n = \begin{cases} n!, & n \leq 10.000, \\ n^n, & 10.000 < n \leq 20.000, \\ (\ln n)^{(\ln n)^n}, & 10.000 < n \leq 30.000, \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & n > 30.000. \end{cases}$$

Решение. При исследовании вопроса о сходимости ряда мы можем не обращать внимания на любое конечное число слагаемых. Поэтому не ограничивая общности мы можем считать, что $n > 30.000$ и рассматривать эквивалентную задачу о сходимости ряда

$$\sum_{n=30.001}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{или (что то же самое) ряда} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ряд же

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

очевидно расходится, так как его члены больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда. □

2.5 Предельный признак сравнения

Признак сравнения справедлив также и в предельной форме — пусть ряд (5) исследуется на сходимость, а поведение ряда (6) известно. Тогда если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Если же

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

то из сходимости ряда (6) следует сходимость ряда (5); а если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty,$$

то из расходимости ряда (5) следует расходимость ряда (6).

П Р И М Е Р 11 Доказать расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}.$$

Решение 1. Сравним ряд с гармоническим рядом

$$\frac{1}{n + \ln n} < \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Как видно, наш ряд меньше расходящегося гармонического ряда, следовательно, он может как сходится, так и расходится. Подкорректируем оценку (7).

Вновь воспользуемся тем, что $\ln n < n$ для $n \geq 2$. Можем считать далее, что $n \geq 2$. А тогда

$$\frac{1}{n + \ln n} > \frac{1}{2n}.$$

Осталось только заметить, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится как гармонический ряд, каждый член которого умножен на $1/2$.

Решение 2. Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме, сравнивая наш ряд с тем же гармоническим рядом. Имеем

$$a_n = \frac{1}{n + \ln n}, \quad b_n = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n + \ln n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln n)/n + 1} = 1 \neq 0.$$

Мы получили конечный и отличный от нуля предел, следовательно ряды ведут себя одинаково и, так как гармонический ряд расходится, то и наш ряд расходится. □

Упражнение 23 Используя предельную форму признака сравнения, доказать, что если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Упражнение 24 Решить вопрос о сходимости данных рядов с помощью признаков сравнения

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot e^{2n-1}}$, **2**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi^3}{2^n}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+13n}{1+12n^2}$, **4**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+8)}$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{8n}$, **6**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{10\pi}{n^3}$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(6n+5)}$, **8**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n^2}{3+n^3}\right)^2$,

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\pi^2 n}$, **10**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{\pi^3 n}$.

2.6 Признак Даламбера

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{8}$$

с положительными членами.

Если для всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

то ряд (8) сходится, если же начиная с некоторого номера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

то ряд (8) расходится.

На практике как правило пользуются предельной формой признака Даламбера: если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

i) если $q < 1$, то ряд (8) сходится,

ii) если $q > 1$, то ряд (8) расходится,

iii) если же $q = 1$ то необходимы дополнительные исследования — ряд может как сходиться, так и расходиться.

Упражнение 25 Привести пример к пункту iii) — указать два ряда со свойством

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

один из которых сходится, а другой расходится.

П Р И М Е Р 12 Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(99!)^n}{n!}.$$

Решение. Применим признак Даламбера. Здесь

$$a_n = \frac{(99!)^n}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{(99!)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(99!)^{n+1}n!}{(99!)^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{99!}{n+1}=0<1,$$

следовательно, ряд сходится. □

П Р И М Е Р 13 Доказать сходимость ряда

$$\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\dots .$$

Решение. Прежде всего заметим, что

$$a_n=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)},\qquad a_{n+1}=a_n\cdot\frac{3n+4}{4n-6}.$$

Теперь применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n-6}=\frac{3}{4}<1,$$

следовательно, ряд сходится. □

П Р И М Е Р 14 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{(1!)^2}{\log_\pi 20}+\frac{(2!)^2}{(\log_\pi 20)^4}+\frac{(3!)^2}{(\log_\pi 20)^9}+\frac{(4!)^2}{(\log_\pi 20)^{16}}+\dots .$$

Решение. Здесь

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(\log_\pi 20)^{n^2}}.$$

Поскольку $\log_\pi 20>1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2(\log_\pi 20)^{n^2}}{(n!)^2(\log_\pi 20)^{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(\log_\pi 20)^{2n+1}}=0,$$

и ряд сходится согласно признаку Даламбера. □

Упражнение 26 Исследовать следующие ряды на сходимость с помощью признака Даламбера

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{1024}}{2^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1024^n}{(2n)!}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+1024n+1024}{2^{n+1024}(n^2+1)}$, 4) $\sum\limits_{n=1024}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{n!}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n\cdot 2^{n/2}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\dfrac{n^2}{2^n}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3^n}$.

Число $1024 = 2^{10}$ фигурирует в первых четырех рядах. На какую натуральную степень двойки можно заменить 1024 так, чтобы не нарушить сходимость указанных рядов?

2.7 Признак Коши

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{9}$$

с положительными членами. Если начиная с некоторого номера для всех n справедливо неравенство $\sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд (8) сходится, если же начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то ряд (9) расходится.

На практике удобнее использовать предельную форму признака: если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

i) если $q < 1$, то ряд (9) сходится,

ii) если $q > 1$, то ряд (9) расходится,

iii) если же $q = 1$ то ряд может как сходиться, так и расходиться.

Отметим, что признак Коши сильнее признака Даламбера, так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ может существовать, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ —

нет[1]. Это иллюстрирует приведенный ниже пример 15.

Отметим также, что если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, причем оба предела равны между собой.

Приведем формулу Стирлинга, которая позволяет использовать признак Коши при работе с рядами, общие члены которых содержат факториалы:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Упражнение 27 Привести пример к пункту iii) — указать два ряда со свойством

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

один из которых сходится, а другой расходится.

П Р И М Е Р 15 Исследовать сходимость ряда

$$3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots .$$

Решение. Воспользуемся сначала признаком Даламбера — рассмотрим последовательность

$$\frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{a_3}{a_2}, \quad \frac{a_4}{a_3}, \quad \frac{a_5}{a_4}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \ldots .$$

Она имеет вид

$$\frac{1}{6}, \quad 3, \quad \frac{1}{6}, \quad 3, \quad \frac{1}{6}, \quad 3, \quad \frac{1}{6}, \quad 3, \quad \ldots .$$

Очевидно что условие

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

не выполнено, равно как и условие

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

[1]Несмотря на это признак Даламбера в ряде случаев гораздо более удобен для использования на практике.

Признак Даламбера ответа не дал. Воспользуемся признаком Коши. Заметим что

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n}, \qquad a_{2n-1} = \frac{3}{2^{n-1}}$$

и вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{3}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Ряд сходится по признаку Коши. □

П Р И М Е Р 16 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Решение. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-2(n-1)}{n+1}} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

то наш ряд сходится по признаку Коши. □

П Р И М Е Р 17 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Коши и формулой Стирлинга (10)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{2\pi}}{e} \cdot n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}} = \infty.$$

Ряд расходится по признаку Коши. □

Упражнение 28 Исследовать следующие ряды на сходимость с помощью признака Коши

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}, \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2},$$

$$\mathbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{n}}, \qquad \mathbf{4)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^{n}},$$

$$\mathbf{5)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+1/n)^{n}}, \qquad \mathbf{6)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{5^{n}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},$$

$$\mathbf{7)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{2}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}, \qquad \mathbf{8)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-n}\right)^{n}.$$

Упражнение 29 Сходится ли ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{k}}$?

Упражнение 30 Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится. Что можно сказать о сходимости рядов

$$\mathbf{1)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{b_n}, \qquad \mathbf{2)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n^{a_n}?$$

2.8 Интегральный признак сходимости Коши–Маклорена

Если функция $f(x)$ неотрицательна при $x>0$ и не возрастает, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)\,dx.$$

Упражнение 31 Почему признак сходимости Коши – Маклорена остается в силе, если функция f неотрицательна и не возрастает при $x>x_0$ (x_0 — некоторое действительное число)?

П Р И М Е Р 18 С помощью признака Коши–Маклорена исследовать сходимость ряда с общим членом

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Решение. Функция

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$$

при $x > 1$ является положительной и убывающей при любом p и достаточно большом x (убывание функции можно проверить по знаку производной). Следовательно, для проверки сходимости ряда можно применять признак Коши–Маклорена

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^p} = \frac{1}{(p-1)\cdot 2^{p-1}} < \infty \qquad \text{при} \quad p > 1.$$

Следовательно, ряд также сходится при $p > 1$. $\square$

П Р И М Е Р 19 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(8n+1)\ln(n+8)}.$$

Решение. В этом случае вычисление несобственного интеграла может оказаться затруднительным. Сравним общий член данного ряда с общим членом ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \tag{11}$$

Воспользуемся предельным признаком сравнения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(8n+1)\ln(n+8)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(8n+1)\ln\left(n\left(1+\frac{8}{n}\right)\right)} =$$

$$\frac{1}{8} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+\frac{8}{n}\right)} = \frac{1}{8},$$

следовательно, наш ряд сходится или расходится одновременно с рядом (11), а ряд (11) расходится по интегральному признаку (см. пример 18). $\square$

П Р И М Е Р 20 Исследуйте сходимость обобщенного гармонического ряда

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots, \qquad p\in\mathbb{R}. \qquad (12)$$

Решение. Прежде всего заметим, что ни признак Даламбера, ни признак Коши не решают вопрос о сходимости ряда, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p=1.$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши–Маклорена.

Функция $f(x)=1/x^p$ положительна и убывает на промежутке $[1,+\infty)$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^N\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^N=\dfrac{1}{1-p}(N^{1-p}-1) & \text{при}\quad p\neq1,\\[2ex] \ln x\Big|_1^N=\ln N & \text{при}\quad p=1.\end{cases}$$

Чтобы выяснить вопрос о сходимости ряда (12) осталось устремить N к бесконечности и выяснить, сходится ли не несобственный интеграл в различных случаях:

i) в случае $p>1$ будет

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1} \qquad \text{(интеграл конечен, ряд сходится)},$$

ii) в случае $p<1$ будет

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty \qquad \text{(интеграл бесконечен, ряд расходится)},$$

iii) в случае $p = 1$ будет

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty \qquad \text{(интеграл бесконечен, ряд расходится).}$$

Итак, ряд (12) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$. $\square$

Упражнение 32 Исследовать следующие ряды на сходимость с помощью интегрального признака Коши–Маклорена

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$, **2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\left(\ln^4 n + 1\right)}$, **4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^2(5n+1)}$, **6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{\ln^5 n}}$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)^2}$, **8)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

3 ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

3.9 Признак Дирихле

Будем исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n + \ldots . \qquad (13)$$

Признак Дирихле состоит в следующем: если частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ограничены некоторым числом $M > 0$ (то есть $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq M$ для любого $n \in \mathbb{N}$), а последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремиться к нулю, то ряд (13) сходится.

П Р И М Е Р 21 Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремиться к нулю. Доказать сходимость следующих рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,\ x \in \mathbb{R}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ \mathbb{R} \ni x \neq 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Докажем сначала, что частичные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \qquad (14)$$

ограничены. Запишем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(2\sin kx \sin\frac{x}{2}\right)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(kx - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(kx + \frac{x}{2}\right)\right]\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}\Bigg(\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right]+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left[\cos\left(nx-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg)\right|=$$

$$\left|\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(nx+\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right|\le\frac{\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|+\left|\cos\left(nx+\dfrac{x}{2}\right)\right|}{\left|2\sin\dfrac{x}{2}\right|}\le\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}. \quad (15)$$

Итак, частичные суммы ряда (14) ограничены при любом $x\neq\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$ (если же πm, $m\in\mathbb{Z}$, то сходимость ряда очевидна). Так как последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремиться к нулю, то первый ряд сходится по признаку Дирихле при любом x.

Повторяя схему рассуждений (15), можно показать, что

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} \quad (16)$$

— второй ряд также сходится по признаку Дирихле в силу (16) и монотонного стремления к нулю последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\Box$

Упражнение 33 Доказать оценку (16).

Упражнение 34 Доказать сходимость рядов, пользуясь признаком Дирихле

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi n}{8}}{n^2},$$

$$\mathbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{n}{\pi}}{\sqrt[3]{n}}.$$

3.10 Признак Абеля

Как и в признаке Дирихле, будем исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_3+a_3b_3+\ldots+a_nb_n+\ldots. \quad (17)$$

Признак Абеля можно сформулировать так: если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходится, а последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена (это значит, что существует такое число M, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $|a_n| \le M$), то ряд (17) сходится.

Упражнение 35 Пользуясь признаком Абеля доказать сходимость рядов

$$\textbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n) \cdot \arccos(1/n)}{\sqrt{n}}, \quad \textbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2+1}}{n^2+1} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.$$

Упражнение 36 Доказать сходимость следующих рядов, пользуясь признаком Абеля или Дирихле

$$\textbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n} \cdot \arcsin \frac{\pi}{n\sqrt[3]{n}}, \quad \textbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{10.000} n}{n} \cdot \cos \frac{\pi^2 n}{10.000},$$

$$\textbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{4)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \cdot \sin \dfrac{1}{n}} - \cos \frac{1}{n} \right) \cdot \cos \pi n.$$

3.11 Признак Лейбница

Рассмотрим теперь ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, то есть ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots, \tag{18}$$

где a_1, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ положительны.

Упражнение 37 Указать, какие из следующих рядов являются знакочередующимися:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 3\pi n\right)$, **2)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-3)^{n^n}$, **3)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2}$,

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{7n+3n^2}$, **5)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\pi n)^{n\cos(\pi n)}$, **6)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{\pi}{n^2}\right)^{(n+1)^2}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(-1)^n}$, **8)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{9\pi}{8}\right)^n$, **9)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\log_\pi 2)^n$,

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^{n^n}}$, **11)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\sqrt{n}}$, **12)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (500-n)^n$.

Признак Лейбница формулируется следующим образом: если в знакочередующемся ряде (18) члены таковы, что

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \dots \tag{19}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{20}$$

то ряд (18) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Упражнение 38 Доказать, что из признака Дирихле следуют признаки Лейбница и Абеля.

Сразу же отметим, что условие (19) является существенным. Покажем это на примере.

ПРИМЕР 22 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{(-3)^n n^2}}{\sqrt{n} + (-1)^{n^3}}. \tag{21}$$

Решение. Ряд (21) является знакочередующимся (см. упражнение 37) и условие (20) очевидно выполнено. Представим общий член ряда в виде

$$a_n = \frac{(-1)^{(-3)^n n^2}}{\sqrt{n} + (-1)^{n^3}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} =$$

$$(-1)^n \frac{\sqrt{n} - (-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Далее заметим, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

сходится по признаку Лейбница, а ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$

расходится как гармонический. Отсюда заключаем, что ряд (21) расходится. □

Упражнение 39 Будет ли справедлив признак Лейбница, если неравенства (19) выполняются начиная с некоторого номера?

Отметим, что для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница не является необходимым условием: знакочередующийся ряд может сходиться, даже если модуль его общего члена стремится к нулю не монотонно.

Упражнение 40 Проверить выполнение признака Лейбница и исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^3} - \frac{1}{(2n)^2} + \ldots.$$

Упражнение 41 Привести семь примеров сходящихся знакочередующихся рядов, модуль общего члена которых стремится к нулю не монотонно.

Два ряда, отличающиеся друг от друга конечным числом членов, здесь считаются равными, равно как и два ряда, отношение общих членов (или сдвинутых общих членов) которых есть константа.

П Р И М Е Р 23 Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots.$$

Решение. Ряд сходится по признаку Лейбница, так как

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots, \qquad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \quad \square$$

П Р И М Е Р 24 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}. \tag{22}$$

Решение. Ряд (22) является знакочередующимся и очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0.$$

Осталось проверить условие (19). Воспользуемся производной:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)'=-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0 \qquad \text{при} \quad x>1.$$

Оба условия признака Лейбница выполнены. Следовательно, ряд (22) сходится. $\square$

Упражнение 42 С помощью признака Лейбница исследовать следующие ряды на сходимость

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[7]{\ln n}}$, **2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3n+5}\right)^{n^2}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{10^{10}}{n}$, **4)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)}{2\sqrt[8]{n}}$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$, **6)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi^e}\right)^n$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2+2n+1}}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

П Р И М Е Р 25 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\pi/n^n)}{\ln\ln^2\ln^3(n+1)}. \tag{23}$$

Решение. Пользоваться признаком Лейбница затруднительно, так как для проверки условия монотонности (19) придется брать производную от функции

$$f(x) = \frac{\cos(\pi/x^x)}{\ln\ln^2\ln^3(x+1)}.$$

Применим к ряду (23) признак Абеля. Пусть

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\ln\ln^2\ln^3(n+1)}, \qquad a_n = \cos(\pi/n^n).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\ln^2\ln^3(n+1)}$$

сходится по признаку Лейбница, а последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена — следовательно, ряд (23) сходится. □

П Р И М Е Р 26 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}. \tag{24}$$

Решение. Заметим, что

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

и перепишем ряд (24) в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$$

сходится по признаку Лейбница, а последовательность

$$\left| \cos \frac{\pi}{n+1} \right| \leq 1$$

монотонна и ограниченна — следовательно, ряд (24) сходится по признаку Абеля. □

3.12 Абсолютная и условная сходимость

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{25}$$

называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots . \tag{26}$$

Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся, то есть из сходимости ряда (26) следует сходимость ряда (25).

Обратное не верно — например, знакопеременный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница (см. пример 23), а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, есть расходящийся гармонический ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Если знакопеременный ряд (25) сходится, а ряд (26), составленный из модулей членов ряда (25), расходится, то ряд (25) называют условно или неабсолютно сходящимся рядом.

Исследовать на сходимость знакопеременный ряд — это, вообще говоря, значит не только ответить на вопрос сходится он или расходится, но и ответить на вопрос как он сходится: абсолютно или условно.

Упражнение 43 Может ли условно сходиться ряд, который:

i) состоит только из положительных слагаемых,

ii) состоит только из отрицательных слагаемых,

iii) является знакопеременным, однако содержит лишь конечное число положительных слагаемых,

iv) является знакопеременным, однако содержит лишь конечное число отрицательных слагаемых.

ПРИМЕР 27 Исследовать на сходимость ряд

$$1 \underbrace{-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}}_{\text{два минуса}} \underbrace{+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}}_{\text{три плюса}} \underbrace{-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}-\frac{1}{10^2}}_{\text{четыре минуса}}+\dots. \tag{27}$$

Если ряд (27) сходится, указать тип сходимости.

Решение. Составим ряд из модулей членов ряда (27):

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2.$$

Полученный ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$ (см. пример 20). Следовательно, сходится и ряд (27), причем абсолютно. □

ПРИМЕР 28 Доказать абсолютную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot \operatorname{arctg}\frac{\cos n}{n}.$$

Решение. Воспользуемся известными неравенствами

$$0 \le \ln(1+x) \le x, \text{ при } x \ge 0; \quad |\operatorname{arctg} x| \le x, \text{ при любом } x \in \mathbb{R}$$

и запишем

$$|a_n| = \left|\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot \operatorname{arctg}\frac{\cos n}{n}\right| =$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\cdot \left|\operatorname{arctg}\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\left|\frac{\cos n}{n}\right| \le \frac{1}{n^{4/3}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{4/3}$ сходится как обобщенный гармонический ряд. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. □

Упражнение 44 Доказать, что если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что $|a_n| \le b_n$ для для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Упражнение 45 Доказать что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \cdot \left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right)}$$

существует и меньше единицы.

П Р И М Е Р 29 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n)!}.$$

Если ряд сходится, указать тип сходимости.

Решение. Будем исследовать ряд на абсолютную сходимость — применим признак Даламбера к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2(2n+1)} = 0 < 1.$$

Таким образом ряд из модулей сходится — значит исходный ряд сходится абсолютно. $\square$

П Р И М Е Р 30 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2 + 1}.$$

В случае сходимости указать ее тип.

Решение. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ — сравним его со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}/(3^n n^2+1)}{1/n^2} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{3^n n^2}{3^n n^2 \left(1+\dfrac{1}{3^n n^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряд из модулей сходится, а исходный ряд сходится абсолютно. □

П Р И М Е Р 31 Исследовать тип сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}. \tag{28}$$

Решение. Сходимость ряда следует из примера 21. Оценка

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

не дает эффекта, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ — расходящийся. Докажем, что ряд (28) не является абсолютно сходящимся, то есть докажем расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|.$$

Используя неравенства

$$|\sin n| \ge \sin^2 n \quad \text{и} \quad \sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2},$$

имеем

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \ge \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1-\cos 2n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{2n}.$$

Поскольку первый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$$

сходится в силу того же примера 21, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

расходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2n}{2n}$$

расходится. Таким образом, ряд (28) сходится условно. $\square$

Упражнение 46 Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость следующие ряды

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\ln n}}, \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt[n]{\ln n}}, \qquad \mathbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n},$$

$$\mathbf{4)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^3} \operatorname{tg} \frac{1}{4n}, \qquad \mathbf{5)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{10}}{n^{33} + 3}, \qquad \mathbf{6)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\mathbf{7)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^{100}} \ln n}{\sqrt[3]{n^4} + n}, \qquad \mathbf{8)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^n}.$$

Упражнение 47 Пусть заданы два ряда:

$$\mathbf{1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{f(n)}}{n}, \qquad \mathbf{2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{f(n)}}{n^2}.$$

Что можно сказать о сходимости этих рядов, если известно, что функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ отображает множество натуральных чисел во множество целых чисел?

Упражнение 48 Пусть заданы два ряда:

$$\mathbf{1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{1+f(n)}}{n}, \qquad \mathbf{2)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2-f(n)}}{n^2}.$$

Что можно сказать о сходимости этих рядов, если известно, что функция $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ отображает множество натуральных чисел на отрезок $[0,1]$?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Упражнение 3: **1)** $a_n = n^{-2}$, **2)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n^2}{n+1}$,

3) $a_n = \dfrac{1}{1000n+1}$, **4)** $a_n = \dfrac{n+(-1)^{n+1}}{2n^2-1}$,

5) $a_1 = 1$ при $n = 1$ и $a_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n!}$ для остальных $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Упражнение 4: Суммы рядов: **1)** $1/2$, **2)** $1/3$, **3)** $1/4$, **4)** $23/90$, **5)** $11/18$.

Упражнение 5: Суммы рядов: **1)** $3/2$, **2)** $1/3$, **3)** $2/3$, **4)** $1/12$, **5)** $7/12$.

Упражнение 6: Все ряды расходятся.

Упражнение 7: Указание: рассмотреть отдельно четыре случая: $|q| < 1$, $|q| > 1$, $q = 1$, $q = -1$. Допускается использовать формулу суммы n первых членов прогрессии.

Упражнение 8: Во множестве $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ нет ни одного сходящегося ряда.

Упражнение 9: Указание: Для любого действительного числа A существует последовательность рациональных чисел S_n такая что $\lim_{n\to\infty} S_n = A$ (покажите это). Задача свелась к определению ряда по заданным его частичным суммам.

Упражнение 10: Неравенство (2) неверно при $n = 1$.

Упражнение 11: **1)** нет, **2)** да, **3)** да, **4)** да;

Без дополнительных исследований можно утверждать лишь расходимость ряда **1)**.

Упражнение 12: Ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причем $a_n = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Сумма ряда равна нулю.

Упражнение 15: Указание: в выражении (3) осталась зависимость от p.

Упражнение 19: Указание: для гармонического ряда можно, например, взять $\varepsilon = 1/4$ и $p = n$.

Можно также показать, что для ряда **1)** выполнено $|S_{6n} - S_{3n}| > 1/6$, а для ряда **2)** — $|S_{2n} - S_n| > 1/4$.

Упражнение 20: **1)** сходится, **2)** сходится.

Упражнение 24: **1)** сходится, **2)** сходится, **3)** расходится, **4)** сходится, **5)** расходится, **6)** сходится, **7)** расходится, **8)** сходится, **9)** сходится, **10)** расходится.

Упражнение 25: Указание: см., например, упражнение 13 и пример 1.

Упражнение 26: **1)** сходится, **2)** сходится, **3)** сходится, **4)** сходится, **5)** расходится, **6)** расходится, **7)** сходится, **8)** сходится.

Вместо $1024 = 2^{10}$ подойдет любая степень двойки, равно как и любое натуральное число k.

Требование натуральности k вытекает из примера **4)** — индекс суммирования мы определяли пока только лишь для натуральных чисел.

Упражнение 27: Указание: см. упражнение 25.

Упражнение 28: **1)** сходится, **2)** расходится, **3)** сходится, **4)** сходится, **5)** сходится, **6)** расходится, **7)** сходится, **8)** сходится.

Упражнение 29: В записи ряда нет опечатки — число k является параметром. Правильный ответ такой: ряд расходится для любого k как гармонический, умноженный на константу 2^{-k}.

Упражнение 30: Ряды могут как сходиться, так и расходиться. Соответствующие примеры:

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{2};$$

$$\mathbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{2n^2}\right)^{-1/n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}(1)^{1/n^2}.$$

Упражнение 32: **1)** сходится, **2)** расходится, **3)** сходится, **4)** сходится, **5)** сходится, **6)** сходится, **7)** сходится, **8)** расходится.

Упражнение 34: Указанные ряды являются частными случаями рядов, рассмотренных в примере 21.

Упражнение 37: Все ряды, кроме **4)**, **6)** и **11)**, знакочередующиеся.

Примечание: ряд **11)** состоит, вообще говоря, из комплексных чисел (например, $a_2 = (-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$) — такие ряды мы пока не рассматриваем; у ряда **12)** чередование знака начинается с $n > 500$.

Указание: доказать, что любая натуральная степень нечетного числа есть нечетное число, а любая натуральная степень четного числа — четное число.

Упражнение 38: Указание: в пункте **i)** в качестве последовательности b_n необходимо взять $b_n = (-1)^{n+1}$, а в пункте **ii)** можно воспользоваться равенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{где} \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Упражнение 40: Ряд сходится, хотя признак Лейбница и не выполнен — абсолютная величина общего члена ряда стремится к нулю, но не монотонно.

Упражнение 41: Указание: сгруппировать разность двух сходящихся рядов с положительными членами.

Упражнение 42: Все ряды сходятся.

Упражнение 43: Все указанные ряды не могут сходиться условно — если они сходятся, то они сходятся абсолютно.

Упражнение 44: Указание: применить признак сравнения 1 к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Упражнение 45: Указание: применить признаки Даламбера, Коши и Раабе к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Упражнение 46: **1)** сходится условно, **2)** расходится, **3)** сходится абсолютно, **4)** сходится условно, **5)** сходится абсолютно, **6)** сходится абсолютно, **7)** сходится абсолютно, **8)** сходится абсолютно.

Упражнение 47: Про сходимость ряда **1)** ничего сказать нельзя — он может как сходиться (но только условно, — например, если $f(n) = n^2$), так и расходиться (например, если $f \equiv 1$).

Ряд **2)** сходится абсолютно для любой функции

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}.$$

Упражнение 48: **1)** расходится, **2)** сходится абсолютно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Применение числовых рядов для расчета параметров Марковских систем массового обслуживания

Определение систем массового обслуживания

В общем виде систему массового обслуживания (СМО) можно представить в следующем виде:

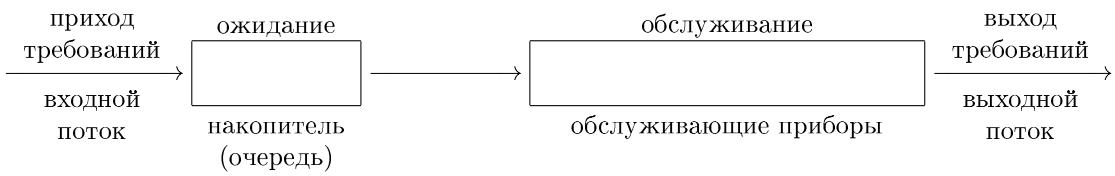

Рис. 1. Общий вид СМО

На вход СМО поступает поток требований, которые впоследствии передаются на обслуживающие приборы (или прибор). В случае отсутствия свободных обслуживающих приборов требование становится в очередь, где и ожидает освобождения любого прибора.

Поскольку в общем случае процессы поступления требований и их обслуживания носят случайный характер, основные параметры подобных систем (количество требований в СМО, среднее время ожидания обслуживания, пропускная способность и т.д.) также являются случайными и имеют своя функции распределения. Поведение СМО определяется следующими характеристиками: тип функции распределения времени поступления требований и их обслуживания, количеством обслуживающих приборов и мест в очереди.

Расчет основных параметров СМО в общем случае представляет собой сложную задачу, которая имеет точное аналитическое решение лишь для некоторых типов СМО.

Марковские СМО

Одним из самых простых для аналитического описания типов СМО являются Марковские системы. В данном случае используется приближение однородных ординарных требований, интервалы времени поступления которых описываются случайной величиной (СВ) ξ и подчиняются экспоненциальному распределению:

$$F(t) = \mathbf{P}\{\xi < t\} = 1 - e^{-at}, \quad t > 0, \quad a > 0,$$

где a — параметр этого распределения.

Такие входные потоки носят названия простейших. Под параметром a в этом случае понимают интенсивность потока (средняя скорость поступления требований). Нетрудно показать, что математическое ожидание СВ ξ (средний интервал времени между поступлениями требований) составит

$$\mathbf{E}\xi = \int\limits_{0}^{+\infty} t\,dF(t) = a^{-1}.$$

Тип распределения интервалов длительности обслуживания в Марковских СМО также имеет экспоненциальный характер с параметром μ.

В терминологии СМО число обслуживающих приборов принято обозначать n, а количество мест в очереди — m. Для упрощения записей также может вводится параметр $\rho = a(n\mu)^{-1}$, называемый загрузкой системы.

Под отдельными состояниями Марковской системы будем понимать общее количество находящихся в ней требований, тогда граф состояний такой системы может быть представлен в виде:

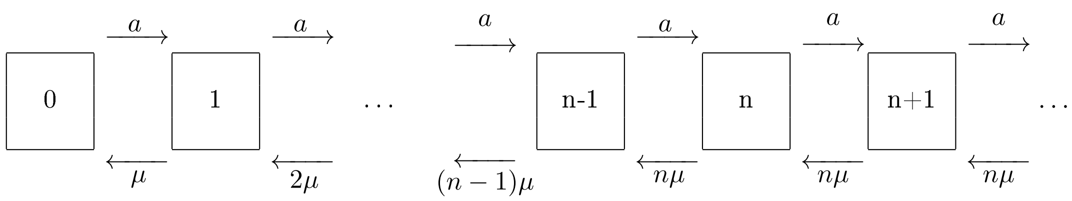

Рис. 2. Граф состояний Марковской СМО

Из рис. 2 видно, что система получает требования с интенсивностью a (и, следовательно, переходит в старшие состояния).

Возвращение в младшие состояния (то есть выход требований из СМО в результате обслуживания) происходит с интенсивностью, пропорциональной количеству занятых приборов (для каждого из которых интенсивность обслуживания μ). Видно, что после того как все обслуживающие приборы заняты (количество требований в системе равно n), общая интенсивность обслуживания становится равной $n\mu$ и перестает расти; в этом случае начинает формироваться очередь ожидающих требований.

Рассмотрим несколько случаев возможных диапазонов значений n и m.

Марковская СМО при $1 \le n < \infty$, $1 \le m < \infty$

Очевидно, что в данном случае множество состояний СМО конечно и равняется $n + m + 1$ (см. рис. 3).

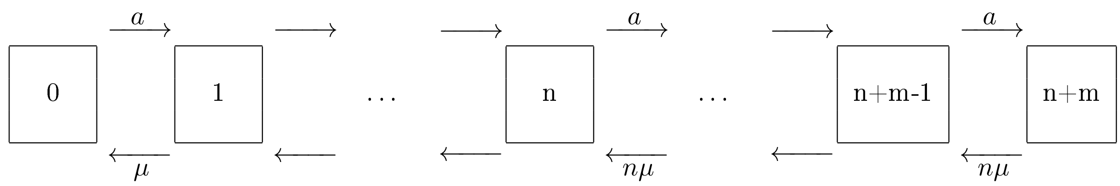

Рис. 3. Граф состояний Марковской СМО при $1 \le n < \infty$, $1 \le m < \infty$

Можно показать, что при $\rho = a(n\mu) < \infty$, существует единственное стационарное распределение вероятностей нахождения системы в каждом из состояний, которое можно найти из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} ap_{k-1} = k\mu p_k, \quad 1 \le k \le n, \\ \\ ap_{k-1} = n\mu p_k, \quad n \le k \le n+m, \end{cases} \tag{29}$$

где p_k — вероятность присутствия системы в состоянии k в стационарном режиме (или вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет k требований).

Из (29) следует, что

$$p_k = \frac{a}{k\mu} p_{k-1} = \frac{n\rho}{k} p_{k-1} = \frac{(n\rho)^k}{k!} p_0 \quad \text{при} \quad 1 \le k \le n;$$

$$p_k = \frac{a}{n\mu}p_{k-1} = \rho p_{k-1} = \rho^{k-n}p_n = \frac{n^n\rho^k}{n!}p_0 \quad \text{при} \quad n \le k \le n+m.$$

Окончательно получаем:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^k}{k!}p_0, & 1 \le k \le n, \\ \\ \dfrac{n^n\rho^k}{n!}p_0, & n \le k \le n+m, \end{cases}$$

Вероятность p_0 найдем из условия нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1,$$

откуда

$$p_0\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!}\sum_{k=1}^{m}\rho^k\right] = 1. \tag{30}$$

Очевидно, что вторая сумма в (30) представляет геометрическую прогрессию с конечным числом членов

$$\sum_{k=1}^{m}\rho^k = \frac{\rho(1-\rho^m)}{1-\rho}.$$

Тогда в итоге имеем

$$p_0 = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{n^n\rho^{n+1}(1-\rho^m)}{n!(1-\rho)}\right]^{-1}.$$

Математическое ожидание числа требований (их среднее количество), находящихся в системе в стационарном режиме, вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{E}\eta = \sum_{k=0}^{n+m} kp_k =$$

$$\rho_0\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{n^n\rho^{n+1}}{n!(1-\rho)}\left[n-(n+m)\rho^m + \frac{1-\rho^m}{1-\rho}\right]\right).$$

Марковская СМО при $1 \le n < \infty$, $m = \infty$

В этом случае множество состояний СМО бесконечно (см. рис. 4).

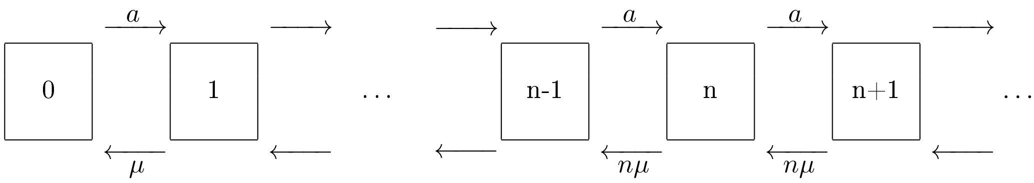

Рис. 4. Граф состояний Марковской СМО при $1 \le n < \infty$, $m = \infty$

Аналогично получаем:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^k}{k!} p_0, & 1 \le k \le n, \\[2ex] \dfrac{n^n \rho^k}{n!} p_0, & k \ge n+1. \end{cases}$$

Условие нормировки в этом случае имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^k \right] = 1. \tag{31}$$

Здесь вторая сумма в (31) представляет геометрическую прогрессию с бесконечным числом членов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Тогда в итоге имеем:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{n^n \rho^{n+1}}{n!(1-\rho)} \right]^{-1}.$$

Стационарный первый момент числа требований, находящихся в системе, в этом случае вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{E}\eta = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \rho_0 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{n^n \rho^{n+1} [1 + n(1-\rho)]}{n!(1-\rho)^2} \right).$$

Марковская СМО при $n = \infty$

В такой СМО число обслуживающих приборов бесконечно. Поэтому все прибывающие требования обслуживаются без ожидания. Граф состояний этой СМО представлен на рис. 5.

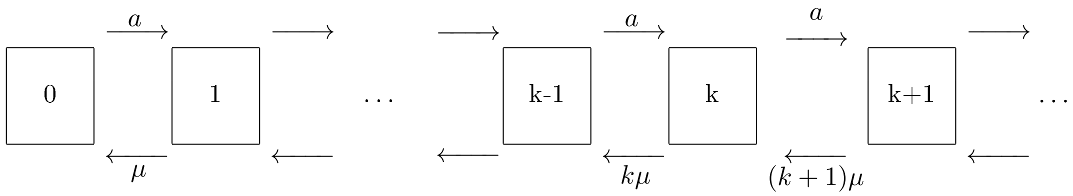

Рис. 5. Граф состояний Марковской СМО при $n = \infty$

Для достаточно больших k имеем $a(k\mu)^{-1} \leq \gamma < 1$. в этом случае всегда существует единственное стационарное распределение числа требований, находящихся в системе, которое можно определить из уравнений равновесия $ap_{k-1} = k\mu p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, откуда следует, что

$$p_k = \frac{y^k}{k!} p_0, \quad \text{где} \quad y = \frac{a}{\mu}.$$

Тогда условие нормировки:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right] = 1. \tag{32}$$

Здесь выражение в скобках (32) представляет собой разложение в ряд Тейлора соответствующей экспоненты. Следовательно:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right]^{-1} = e^{-y}, \quad \text{и} \quad p_k = \frac{y^k}{k!} e^{-y}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Стационарный первый момент числа требований, находящихся в системе, при этом вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{E}\eta = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{y_k}{k!} e^{-y} = e^{-y} y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-y} y e^{y} = y.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Берман, Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

[2] **Демидович, Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П.Демидович. — М.: «АСТ», изд-во «Астрель», 2009. — 558 с.

[3] **Ляшко, И.И.** Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Ч.1: Ряды / И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач. — М.: изд-во ЛКИ, 2008. — 224 с.

[4] **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. / Н.С.Пискунов. — М.: Наука, 1976. — Т. 2. — 576 с.

[5] **Рябушко, А.П.** Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / А.П.Рябушко, В.В.Бархатов, В.В.Державец, И.Е.Юруть. — Минск: Выш. шк., 1991. — 288 с.

[6] **Тихоненко, О.М.** Модели массового обслуживания в информационных системах / О.М.Тихоненко. — Минск: УП «Технопринт», 2003. — 327 с.

[7] **Чупрыгін, А.А.** Матэматычны аналіз: лікавыя шэрагі / А.А.Чупрыгін. — Мінск: Белдзяржуніверсітэт, 1997. — 93 с.

[8] **Шмелев, П.А.** Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А.Шмелев. — М.: Высш. шк., 1983. — 176 с.

Учебное издание

Числовые ряды

А в т о р ы:
Ахраменко Виктор Корнеевич
Прохорович Михаил Александрович
Козадаев Константин Владимирович

Компьютерная верстка *М. А. Прохоровича*

Ответственный за выпуск *М. А. Прохорович*

Подписано в печать 02.07 .2013. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 50 экз.

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220050, Минск, проспект Франциска Скорины, 4.