

РАСЧЕТ СДВИГА РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ РАДИАЛЬНЫХ МОД АКУСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА, ВЫЗВАННОГО ЕГО ВРАЩЕНИЕМ

The resonance frequency shift caused by rotation is calculated for radial modes of acoustic vibrations of rotating ideal gas constrained by a cylindrical wall. Analytical expressions describing dependence of these frequencies on gas rotating speed and cylinder radius in the broad range of frequencies are obtained by using quantum mechanic methods.

Влияние вращения на волновые процессы рассматривалось еще в классических работах по теории волн в океане и атмосфере (например, [1, 2]). Однако учету этого влияния для волн в сжимаемых средах уделялось недостаточно внимания. В настоящее время интерес к данной проблематике непрерывно растет. В работах [3–5] указано на необходимость учета влияния вращения на мощные акустические поля для широкого класса технических устройств с быстро вращающейся жидкой или газообразной рабочей средой (турбомашин, центрифуг, вихревых камер и т. д.). В [6, 7] выведена замкнутая система уравнений для возмущений скорости в равномерно вращающейся сжимаемой среде (жидкости, газе) с произвольным двухпараметрическим уравнением состояния. Там же был сделан вывод о существовании эффекта сдвига резонансных частот радиальных мод, вызванного вращением газа, а для идеального газа, ограниченного цилиндрической стенкой, численными методами определена величина этого сдвига.

Ввиду практической важности учета резонансных явлений в устройствах с быстро вращающейся рабочей средой, что связано как с необходимостью ограничения виброакустической нагрузки, так и непосредственным влиянием акустических полей на технологические процессы, представляет инте-

рес получение аналитических выражений зависимости резонансных частот от угловой скорости и размеров рабочей области в широком диапазоне их значений.

Радиальные моды вращающегося идеального газа, ограниченного цилиндрической стенкой

Замкнутая система уравнений для компонент $\mathbf{v}$ – скорости элемента среды относительно вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω системы отсчета – имеет вид [7]

$$\ddot{\mathbf{v}} - \text{grad}(c_0^2 \text{div} \mathbf{v}) = \text{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}) + (\gamma_0^* - 1) \mathbf{G} \text{div} \mathbf{v} + 2[\dot{\mathbf{v}} \cdot \Omega], \quad (1)$$

где $c_0^2 = c^2(p_0, \rho_0)$, $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ – скорость звука, $\gamma_0^* = c_0^2 (d\rho_0 / dp_0)$, ρ_0 и p_0 – равновесные плотность и давление, $\mathbf{G} = \text{grad}(\Omega^2 r^2 / 2)$, r – расстояние от оси вращения: точка над буквой означает дифференцирование по времени. Уравнения (1) в приближении линейной акустики описывают волновые процессы, происходящие на фоне произвольного механически-равновесного состояния равномерно вращающейся сжимаемой гидродинамической среды (жидкости, газа) с любым двухпараметрическим термодинамическим уравнением состояния.

Для важного частного случая – стоячих волн вида $v_r(r, t) = V_r^A(r) \sin(\omega t + \alpha)$, $v_\phi(r, t) = V_\phi^A(r) \sin(\omega t + \beta)$ (радиальных мод) в идеальном газе при изотермическом фоновом состоянии – из уравнений (1) следует [7]

$$\begin{aligned} \omega V_\phi^A(r) &= 2\Omega V_r^A(r), \quad \omega V_r^A(r, t) = 2\Omega V_r^A(r) \cos(\omega t + \alpha), \\ \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(\gamma_0 M^2 x + \frac{1}{x} \right) \frac{dw}{dx} + \left[K^2 + (\gamma_0 - 4)M^2 - \frac{1}{x^2} \right] w &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x = r/R$, $w(x) = V_r^A(r)$, $M = \Omega R / c_0$, $K = \omega R / c_0$. Отметим, что параметр M – это число Маха для максимальной скорости элементов среды, вызванной ее вращением. Если процессы происходят в объеме, ограниченном жесткой цилиндрической стенкой радиуса R , то для $w(x)$, кроме условия $w(0) = 0$ на оси, должно выполняться условие $w(1) = 0$ на стенке. Точное решение уравнения (2), отвечающее требованию $w(0) = 0$, имеет вид [8]

$$\begin{aligned} w(x) &= x \cdot {}_1F_1(\alpha, 2, z) = \\ &= x \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha z}{2! 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{3! 2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+m-1) z^m}{(m+1)! m!} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ${}_1F_1(\alpha, \beta, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, $\alpha = 1 - 2/\gamma_0 + K^2 / (2\gamma_0 M^2)$, $z = -\gamma_0 M^2 x^2 / 2$. Из (3) с учетом граничного условия $w(1) = 0$ следует

$${}_1F_1\left[1 - 2/\gamma_0 + K^2 / (2\gamma_0 M^2), 2, -\gamma_0 M^2 / 2\right] = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит в неявном виде зависимость K от M и тем самым – набор резонансных частот ω_n радиальных мод для любых Ω и R . Существенно, что согласно (4) параметр K зависит не от Ω и R по отдельности, а от их произведения ΩR .

В [7] приведены интерполяционные кривые (рис. 1), построенные по значениям $K_n(M)$, просчитанным на ПК для двадцати радиальных мод ($n = 1, 2, \dots, 20$) в интервале чисел M от 0 до 10 с шагом 0,1. Они дают зависимость резонансных частот $\nu_n = \omega_n / (2\pi)$ этих мод от частоты вращения $N = \Omega / (2\pi)$. Для рис. 1 взяты значения: $c_0 = 340$ м/с, $\gamma_0 = 1,4$, $R = 0,5$ м. Расчет для других значений радиуса R сводится к изменению масштабов на осях диаграммы

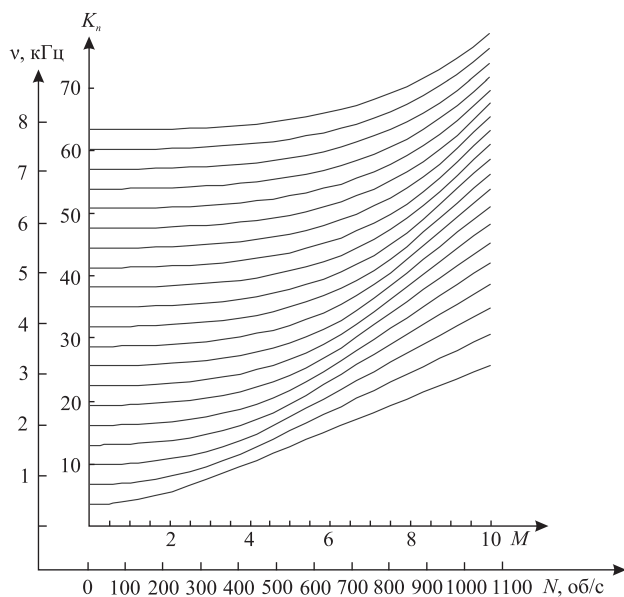


Рис. 1. Частоты радиальных мод при $c = 340$ м/с, $R = 0,5$ м, $\gamma = 1,4$

согласно формулам $K = 2\pi \nu R / c_0$, $M = 2\pi N R / c_0$. Видно, что для вполне достижимого значения числа Маха $M = 1$ сдвиг частоты первой моды будет порядка 10 %.

Номограмма на рис. 1 дает достаточно полную картину рассматриваемого сдвига частот. Однако как для теории, так и для практических приложений важно иметь явное аналитическое выражение для зависимости резонансных частот от угловой скорости, радиуса и номера моды n . Для получения такого выражения оказались эффективными методы, используемые в квантовой механике.

Расчет сдвига частот методами квантовомеханической теории возмущений

Подстановка $w(x) = x^{-\frac{1}{2}} \Psi(x) \exp(-\gamma_0 M^2 x^2 / 4)$ приводит уравнение (2) к виду

$$d^2 \Psi / dx^2 - (\gamma_0^2 M^4 x^2 / 4 + 3x^{-2} / 4) \Psi + (K^2 - 4M^2) \Psi = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) совпадает с одномерным стационарным уравнением Шредингера

$$\hat{H} \Psi = E \Psi, \quad (6)$$

в котором

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad U(x) = \frac{3}{8x^2} + \frac{b^2}{2} x^2, \quad b = \gamma_0 M^2 / 2, \quad E = (K^2 - 4M^2) / 2. \quad (7)$$

Из граничных условий для $w(x)$ следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\Psi(x) / \sqrt{x}) = 0, \quad \Psi(1) = 0. \quad (8)$$

Уравнения (6) – (8) означают, что рассматриваемая акустическая задача формально эквивалентна задаче о квантовании энергии изотропного гармонического осциллятора (см., например, [9]) при квантовом числе $l = 1/2$ и наличии непроницаемой потенциальной стенки при $x=1$. Уровни энергии E_n такой квантовой задачи согласно (7) дают спектр акустических частот ω_n :

$$\omega_n = (c_0 / R) \sqrt{2E_n + 4M^2} = \sqrt{2(c_0 / R)^2 E_n + 4\Omega^2}. \quad (9)$$

Рис. 2 поясняет характер квантовой задачи. На нем для $b = 40$ (т. е. для $M \approx 8$) изображены:

потенциальная «яма» $U(x) = \frac{3}{8x^2} + \frac{b^2}{2} x^2$, две вертикальные «стенки» (при $x=0$ и $x=1$), уровни энергии E_n и графики функций $\Psi_n(x)$ (от $n=1$ до $n=15$). Видно, что наличие стенки играет решающую роль при больших n , но почти не сказывается на расположении уровней с малыми номерами. Вследствие этого для предельных случаев имеют место приближенные зависимости:

$$E_n \approx \pi^2 n^2 / 2, \quad n \ll 4b \quad (10)$$

(уровни в прямоугольном «ящике») и

$$E_n \approx 2bn, \quad n \gg 4b$$

(уровни изотропного осциллятора с $l = 1/2$ без правой стенки [9]). Критическое значение $n_{кр} = 4b$ определяется положением точки пересечения графика $U(x)$ с правой стенкой.

При не слишком высоких скоростях вращения ($M < 0,5$) даже грубая оценка (10) дает при учете (9) правильное качественное представление о сдвиге частот:

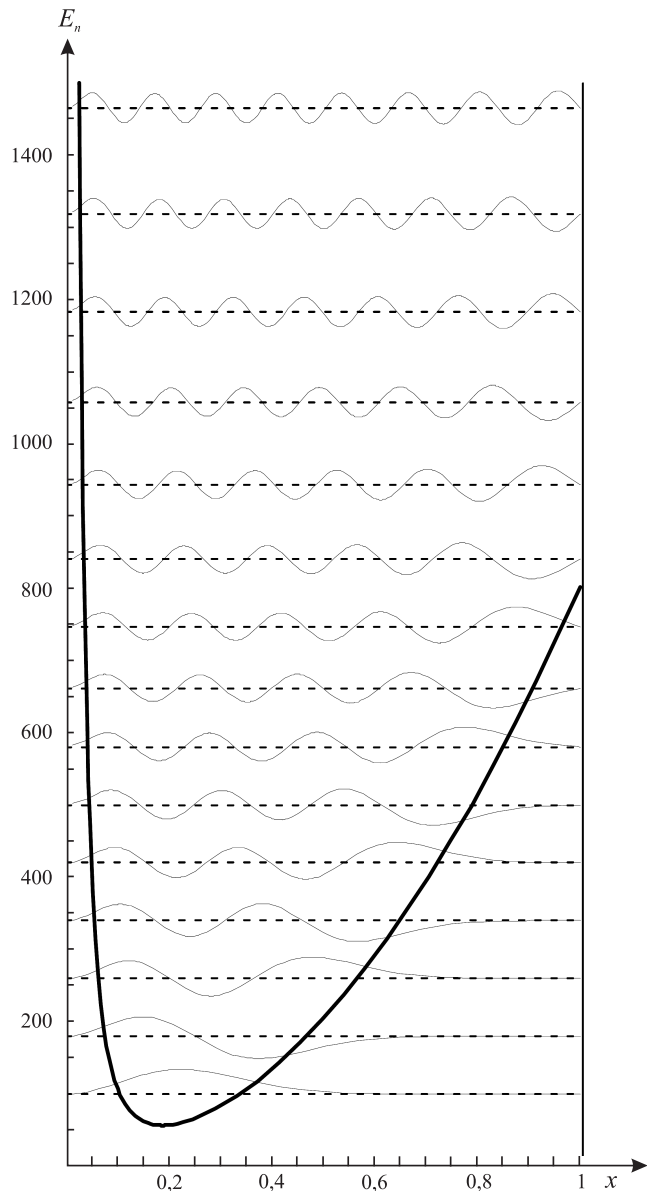


Рис. 2. Эквивалентная квантовая задача

$$\omega_n \approx (c_0/R) \sqrt{\pi^2 n^2 + 4M^2} = \sqrt{2(c_0/R)^2 \pi^2 n^2 + 4\Omega^2}, \quad M < 0,5.$$

Для получения формул, дающих необходимую точность в большом интервале скоростей вращения, применим квантовомеханическую теорию возмущений [10]. С этой целью представим оператор (7) в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad \hat{H}_0 = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{8x^2}, \quad \hat{H}_1 = \frac{b^2 x^2}{2}$$

и воспользуемся тем, что «невозмущенное» уравнение

$$\hat{H}_0 \Psi_{0n} = E_{0n} \Psi_{0n}$$

имеет точное аналитическое решение [8]

$$\Psi_{0n}(x) = \sqrt{2x} J_1(j_{1n}x)/J_0(j_{1n}), \quad \int_0^1 \Psi_{0n}^2 dx = 1, \quad E_{0n} = j_{1n}^2/2. \quad (11)$$

Здесь $J_0(z)$ и $J_1(z)$ – функции Бесселя, j_{1n} – корни функции $J_1(z)$, т. е. решения уравнения $J_1(z) = 0$. Значения этих корней хорошо известны [8]. Вычисление поправки к «энергии» в первом приближении теории возмущений на основе (11) с помощью [8] приводит к результатам:

$$\Delta E_n^{(1)} = \int_0^1 \Psi_{0n} \hat{H}_1 \Psi_{0n} dx = \int_0^1 \frac{b^2 x^2}{2} \Psi_{0n}^2 dx = \frac{b^2}{J_0^2(j_{1n})} \int_0^1 x^3 J_1^2(j_{1n}) dx = \frac{b^2}{6},$$

$$\omega_n^{(1)} = (c_0/R) \sqrt{j_{1n}^2 + 4M^2 + \gamma_0^2 M^4/12}. \quad (12)$$

Формула (12) дает значения частот с относительной точностью 1 % при любых n для $M \leq 3$, что, как правило, покрывает практически значимую область.

Для получения приближения, которое выполняется для любых значений n и M , используем найденные выше асимптотики: $E_n(b) \rightarrow 2bn$ при $b \rightarrow \infty$ и $E_n(b) \rightarrow E_{0n} + b^2/6$ при $b \rightarrow 0$ и будем искать выражение для $E_n(b)$ в виде

$$\begin{cases} E_{0n} + b^2/6, & 0 < b < b_1, \\ A_n + B_n b_1 + C_n b_1^2 + D_n b_1^3, & b_1 < b < b_2, \\ 2bn, & b_2 < b. \end{cases} \quad (13)$$

Проверка показывает, что при n от 1 до 200 с точностью 0,5 % первое выражение из (13) применимо для $0 < b < b_1 = 2,2n + 0,5$, а третье – для $b > b_2 = 4,4n + 6,5$.

Из условий сшивки функции $E_n(b)$ и ее производной по b в точках b_1 и b_2

$$\begin{cases} A_n + B_n b_1 + C_n b_1^2 + D_n b_1^3 = E_{0n} + b_1^2/6, & B_n + 2C_n b_1 + 3D_n b_1^2 = b_1/3, \\ A_n + B_n b_2 + C_n b_2^2 + D_n b_2^3 = 2b_2 n, & B_n + 2C_n b_2 + 3D_n b_2^2 = 2n, \end{cases}$$

при $b_1 = 2,2n + 0,5$, $b_2 = 4,4n + 6,5$ получим

$$\begin{aligned} A_n &= (-12,32 - 94,49n - 80,01n^2 + 599,3n^3 + 817n^4 + 271n^5 + \\ &\quad + E_{0n}(211,3 + 193,1n - 29,04n^2 - 42,59n^3)) / (6 + 2,2n)^3, \\ B_n &= (49,56 + 161,4n - 404,7n^2 - 749,7n^3 - 295,3n^4 + \\ &\quad + E_{0n}(19,5 + 99n + 58,08n^2)) / (6 + 2,2n)^3, \\ C_n &= (-14,38 + 99,13n + 205,2n^2 + 101,8n^3 + \\ &\quad + E_{0n}(-21 - 19,8n)) / (6 + 2,2n)^3, \\ D_n &= (1,083 - 8,5n - 9,973n^2 + 2E_{0n}) / (6 + 2,2n)^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Расчетная формула (13) с коэффициентами (14) обеспечивает точность 0,5 % во всем диапазоне возможных значений резонансных частот и угловых скоростей вращения среды. Соответствие приближения (13) с численно рассчитанными данными представлено на рис. 3.

Таким образом:

– показана эквивалентность акустических уравнений для обобщенных радиальных мод вращающегося идеального газа в цилиндре и одномерного стационарного уравнения Шредингера с потен-

циалом сферического гармонического осциллятора, дополненным вертикальной потенциальной стенкой;

– с помощью квантовомеханической стационарной теории возмущений найдено простое математическое выражение, описывающее зависимость резонансных частот акустических радиальных мод от частоты вращения газа в цилиндре, применимое практически для всех достижимых угловых скоростей быстровращающихся технических устройств;

– путем дополнения полученных формул простым кубическим сплайном найдено приближение, описывающее указанную зависимость с точностью 0,5 % во всем диапазоне возможных акустических частот и скоростей вращения среды.

Результаты представляются полезными как для теории волновых процессов во вращающихся сжимаемых средах, так и для применения при расчетах акустических полей в технических устройствах, вращающихся с большими угловыми скоростями.

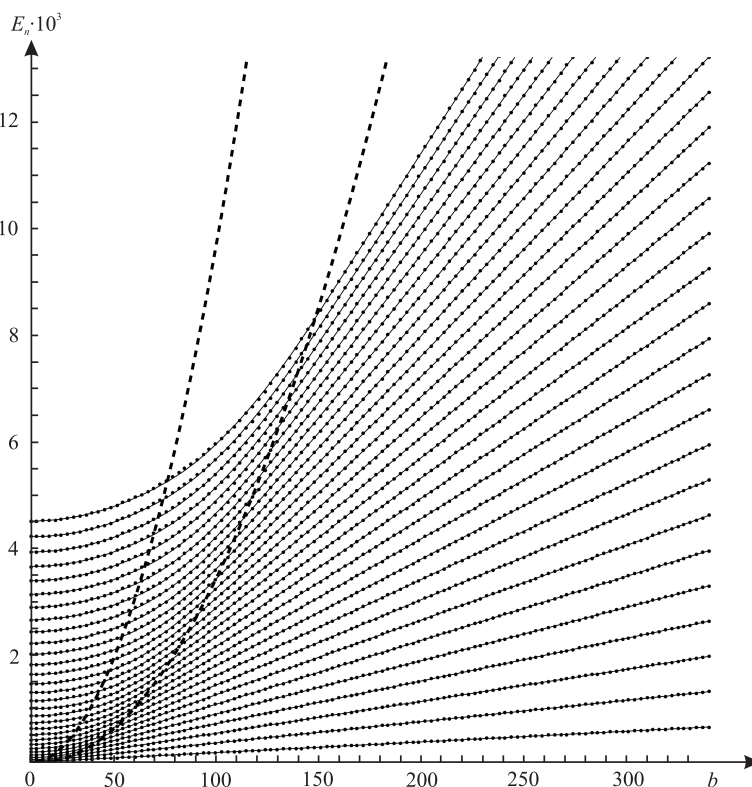


Рис. 3. Приближение (13) (сплошные линии) и численно рассчитанные значения (точки) для n от 1 до 30.

Сплайновые участки расположены между штриховыми линиями

1. Физика океана: в 2 т. Т. 2. Гидродинамика океана / Под ред. В.М. Каменковича, А.С. Мониной. М., 1978. С. 323.

2. Greenspan Н.Р. The Theory of Rotating Fluids. Cambridge, 1968; Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., 1975.

3. Kurosaka М., Caruthers J.E. // AIAA J. 1982. Vol. 20. № 8. P. 1148.

4. Хитрик В.Л. // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 1. С. 110.

5. Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. // Там же. 2000. Т. 46. № 5. С. 644.

6. Сокольский А.А., Садчиков В.И. Волновое уравнение акустики вращающейся жидкости (газа) и радиальные моды в цилиндрическом резонаторе. Мн., 2003. (Препринт НАН Беларуси; ОИЭЯИ № 11).

7. Сокольский А.А., Садчиков В.И. // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 645.

8. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., 1979. С. 321.

9. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. М., 1981. С. 223.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика: в 3 т. М., 1981. С. 167.

Поступила в редакцию 20.02.09.

Виктор Васильевич Малыш – аспирант кафедры атомной физики и физической информатики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.П. Клищенко.

Анатолий Алексеевич Сокольский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры атомной физики и физической информатики.