Физика

УДК 539.12:530.145

В.А. ПЛЕТЮХОВ, В.И. СТРАЖЕВ

ВЕЩЕСТВЕННОЕ ПОЛЕ ДИРАКА – КЭЛЕРА И ДИРАКОВСКИЕ ЧАСТИЦЫ

It is shown, that the system of two Dirac fields is invariant under transformations of the internal symmetry group $SO(3,2)$. The real Dirac – Kaehler field has the same symmetry group.

1. Уравнение Дирака – Кэлера (Д – К) представляет собой максимально общее линейное дифференциальное уравнение первого порядка над полем комплексных чисел для полного набора антисимметричных тензорных полей в пространстве Минковского. Его тензорная формулировка, как известно, имеет вид (см., например [1–8]):

$$\begin{gathered}
\partial_{\mu}\Psi_{\mu}+m\Psi_{0}=0,\\
\partial_{\mu}\widetilde{\Psi}_{\mu}+m\widetilde{\Psi}_{0}=0,\\
\partial_{\nu}\Psi_{[\mu\nu]}+\partial_{\mu}\Psi_{0}+m\Psi_{\mu}=0,\\
\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\nu}\Psi_{[\alpha\beta]}+\partial_{\mu}\widetilde{\Psi}_{0}+m\widetilde{\Psi}_{\mu}=0,\\
-\partial_{\mu}\Psi_{\nu}+\partial_{\nu}\Psi_{\mu}+\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_{\alpha}\widetilde{\Psi}_{\beta}+m\Psi_{[\mu\nu]}=0,
\end{gathered}\tag{1}$$

где $\widetilde{\Psi}_{\mu}=\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Psi_{[\nu\alpha\beta]}$ – аксиальный вектор, $\widetilde{\Psi}_{0}=\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – псевдоскаляр, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{1234}=-i$).

Система (1) может быть записана в матричной форме

$$\left(\Gamma_{\mu}\partial_{\mu}+m\right)\Psi=0,\tag{2}$$

где Ψ – 16-компонентная волновая функция-столбец

$$\Psi=\left(\Psi_{0},\widetilde{\Psi}_{0},\Psi_{\mu},\widetilde{\Psi}_{\mu!},\Psi_{[\mu\nu]}\right)\tag{3}$$

и матрицы Γ_{μ} размерности 16×16 удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака. Вводя собирательный индекс $A=o,\tilde{o},\mu,\tilde{\mu},[\mu\nu]$, пробегающий значения от 1 до 16, матрицы Γ_{μ} можно выразить через элементы e^{AB} полной матричной алгебры [2] следующим образом:

$$\begin{gathered}
\Gamma_{\mu}=\beta_{\mu}^{(+)}+\beta_{\mu}^{(-)},\\
\beta_{\mu}^{(+)}=e^{\tilde{o}\tilde{\mu}}+e^{\tilde{\mu}\tilde{o}}+e^{\lambda[\lambda\mu]}+e^{[\lambda\mu]\lambda},\\
\beta_{\mu}^{(-)}=e^{o\mu}+e^{\mu o}+\frac{i}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}\left(e^{\tilde{\lambda}[\alpha\beta]}+e^{[\alpha\beta]\tilde{\lambda}}\right).
\end{gathered}$$

С точки зрения теории релятивистских волновых уравнений система Д – К описывает частицу с набором спинов 0, 1 и двукратным вырождением состояний по пространственной четности. Лагранжева формулировка теории Д – К инвариантна относительно преобразований группы внутренней (диальной) симметрии $SO(4,2)$ [3], генераторами которой являются матрицы

$$\Gamma'_\mu,\ \Gamma'_5,\ \Gamma'_\mu\Gamma'_5,\ \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma'_\mu\Gamma'_\nu - \Gamma'_\nu\Gamma'_\mu\right). \tag{4}$$

Здесь Γ'_μ – второй набор матриц размерности 16×16, удовлетворяющих, как и Γ_μ, алгебре матриц Дирака, взаимно коммутирующих с матрицами Γ_μ и имеющих в базисе (3) вид

$$\Gamma'_\mu = \beta_\mu^{(+)} - \beta_\mu^{(-)}.$$

Диальная симметрия позволяет сопоставить полю Д – К набор из четырех дираковских полей с некомпактной группой внутренней симметрии $SU(2,2)$ [1, 3–5], т. е. описывать на его основе (причем как на классическом, так и на квантовом уровне) дираковскую частицу с дополнительными (помимо спина) внутренними степенями свободы. Рассмотрим возможность описания частиц со спином $\frac{1}{2}$ и дополнительными внутренними степенями свободы на основе вещественного поля Д – К.

Вещественным полем Д – К называется такой выбор полевых функций в (3), при котором система исходных тензорных уравнений (1) становится вещественной. Это возможно, например, если выбрать компоненты $\Psi_0, \widetilde{\Psi}_0, \Psi_i, \widetilde{\Psi}_i, \Psi_{[ij]}$ вещественными, а $\Psi_4, \widetilde{\Psi}_4, \Psi_{[i4]}$ – чисто мнимыми (либо наоборот, что, по существу, одно и то же). Поскольку число независимых компонент (степеней свободы) у такого поля в два раза меньше, чем у комплексного поля Д – К, то очевидно, что речь в данном случае может идти о сопоставлении вещественному полю Д – К набора из **двух дираковских полей**. Необходимое условие эквивалентности этих теорий – соответствие их свойств внутренней симметрии. Прямое установление указанного соответствия в матричном подходе и является целью настоящей работы.

2. Будем исходить из определения преобразований внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории вещественного поля, описываемого уравнением вида (2), как преобразований

$$\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu),$$

удовлетворяющих следующим требованиям:

1) матрица Q коммутирует со всеми матрицами Γ_μ;

2) для матрицы Q выполняется условие $Q^+\eta Q = \eta$

(η – матрица билинейной формы), которое для бесконечно малых однопараметрических преобразований

$$Q = 1 + \omega J \tag{5}$$

(ω – параметр, J – генератор) принимает вид

$$(\omega J)^+\eta = -\eta\omega J; \tag{6}$$

3) преобразование Q оставляет вещественные (мнимые) компоненты волновой функции Ψ вещественными (мнимыми) в том смысле, что если Ψ_A – вещественная (мнимая) функция, то и $\Psi'_A = Q_{AB}\Psi_B$ – также вещественная (мнимая) функция.

Для удобства выберем базис, в котором волновая функция Ψ имеет структуру

$$\Psi = \left(\Psi_1, \Psi_{[23]}, \Psi_2, \Psi_{[31]}, \Psi_3, \Psi_{[12]}, i\widetilde{\Psi}_4, \Psi_0, i\widetilde{\Psi}_1, \Psi_{[14]}, i\widetilde{\Psi}_2, \Psi_{[24]}, i\widetilde{\Psi}_3, \Psi_{[34]}, \Psi_4, i\widetilde{\Psi}_0\right) \text{ – столбец,} \tag{7}$$

где первые восемь компонент являются вещественными, а последние восемь – чисто мнимыми. В базисе (7) генераторы (4) и матрица билинейной формы $\eta = \Gamma_4\Gamma'_4$ принимают соответственно вид

$$\begin{array}{lll} \Gamma'_1 = -\gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_4, & \Gamma'_2 = \gamma_2\gamma_5\otimes\gamma_2\gamma_5, & \Gamma'_3 = \gamma_4\otimes\gamma_2, \\ \Gamma'_4 = \gamma_4\gamma_5\otimes\gamma_1\gamma_3, & \Gamma'_5 = \gamma_5\otimes I_4, & \Gamma'_{[1}\Gamma'_{5]} = -\gamma_2\otimes\gamma_2\gamma_4, \\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{5]} = \gamma_2\otimes\gamma_2\gamma_5, & \Gamma'_{[3}\Gamma'_{5]} = \gamma_4\gamma_5\otimes\gamma_2, & \Gamma'_{[4}\Gamma'_{5]} = \gamma_4\otimes\gamma_1\gamma_3, \\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = \gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_5, & \Gamma'_{[3}\Gamma_{1]} = \gamma_1\gamma_3\otimes\gamma_4, & \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = I_4\otimes\gamma_5\gamma_4, \\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = -\gamma_2\gamma_4\otimes\gamma_5, & \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = -\gamma_2\gamma_4\otimes\gamma_4, & \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = \gamma_5\otimes\gamma_4\gamma_5, \end{array} \tag{8}$$

$\eta = -i\gamma_4\otimes\gamma_1\gamma_2.$

Принимая во внимание блочную структуру генераторов (8), записанных в явном виде, структуру (7) волновой функции и исходя из приведенного определения 1) – 3) преобразований внутренней симметрии вещественного поля, устанавливаем, какие из параметров в (5) должны быть вещественными, а какие – мнимыми. Далее, с учетом этого находим однопараметрические преобразования, которые удовлетворяют условию (6). Тем самым выделяем искомую группу внутренней симметрии лагранжиана вещественного поля Д – К с одновременной ее явной параметризацией.

Проделав данный анализ, находим, что «хорошими» являются генераторы

$$\Gamma'_\mu,\ \Gamma'_{[\mu}\Gamma'_{\nu]}, \tag{9}$$

при этом шесть параметров $\omega_i,\ \omega_{[ij]}$ – вещественные, а четыре $\omega_4,\ \omega_{[i4]}$ – мнимые. Таким образом, устанавливаем группу инвариантности $SO(3,2)$ внутренней симметрии лагранжевой формулировки вещественного поля Д – К (см. также [6], где указанная симметрия рассмотрена в рамках кватернионного подхода).

3. Теперь рассмотрим систему из двух уравнений Дирака

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi_{\mathrm{I}} = 0, \tag{10а}$$

$$\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right)\Psi_{\mathrm{II}} = 0 \tag{10б}$$

с лагранжианом

$$L = L_{\mathrm{I}} - L_{\mathrm{II}}, \tag{11}$$

который соответствует выбору

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_4 \tag{12}$$

матрицы билинейной формы. Для решения поставленной задачи запишем данную полевую систему в вещественной форме. Возьмем от уравнений (10) комплексное сопряжение и, учитывая, что $\nabla_i^* = \nabla_i$, $\nabla_4^* = -\nabla_4$, $\gamma_1^* = -\gamma_1$, $\gamma_2^* = \gamma_2$, $\gamma_3^* = -\gamma_3$, $\gamma_4^* = \gamma_4$, получим

$$\left(-\gamma_1\nabla_1 + \gamma_2\nabla_2 - \gamma_3\nabla_3 - \gamma_4\nabla_4 + m\right)\Psi_{\mathrm{I}}^* = 0, \tag{13а}$$

$$\left(-\gamma_1\nabla_1 + \gamma_2\nabla_2 - \gamma_3\nabla_3 - \gamma_4\nabla_4 + m\right)\Psi_{\mathrm{II}}^* = 0. \tag{13б}$$

Объединяя уравнения (10а), (10б) с (13а), (13б), приходим к системе из четырех (шестнадцати) уравнений, которая может быть записана в матричной форме (2). Матрицы Γ_μ 16×16 и матрица билинейной формы η в базисе

$$\Psi = \left(\Psi_{\mathrm{I}}, \Psi_{\mathrm{II}}, \Psi_{\mathrm{I}}^*, \Psi_{\mathrm{II}}^*\right)$$

для такой системы будут иметь вид

$$\Gamma_1 = \gamma_4\otimes\gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4\otimes\gamma_2,\ \Gamma_3 = \gamma_4\otimes\gamma_3,\ \Gamma_4 = \gamma_4\otimes\gamma_4,$$

$$\eta = I_2\otimes\left(\sigma_3\otimes\gamma_4\right) = -i\gamma_1\gamma_2\otimes\gamma_4. \tag{14}$$

Складывая и вычитая уравнения (10а) и (13а), а также (10б) и (13б) и вводя функции

$$\Psi_{\mathrm{I}}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\mathrm{I}} + \Psi_{\mathrm{I}}^*\right),\quad \Psi_{\mathrm{I}}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\mathrm{I}} - \Psi_{\mathrm{I}}^*\right),$$

$$\Psi_{\mathrm{II}}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\mathrm{II}} + \Psi_{\mathrm{II}}^*\right),\quad \Psi_{\mathrm{II}}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\mathrm{II}} - \Psi_{\mathrm{II}}^*\right),$$

получаем систему, которая также может быть записана в форме (2). При этом волновая функция Ψ имеет структуру

$$\Psi = \left(\Psi_{\mathrm{I}}^r, \Psi_{\mathrm{II}}^r, \Psi_{\mathrm{I}}^i, \Psi_{\mathrm{II}}^i\right) \tag{15}$$

($\Psi_{\mathrm{I}}^r, \Psi_{\mathrm{II}}^r$ – вещественные, $\Psi_{\mathrm{I}}^i, \Psi_{\mathrm{II}}^i$ – чисто мнимые компоненты), а матрицы Γ_μ трансформируются к виду

$$\Gamma_1 = -\gamma_5\otimes\gamma_1,\ \Gamma_2 = I_4\otimes\gamma_2,\ \Gamma_3 = -\gamma_5\otimes\gamma_3,\ \Gamma_4 = -\gamma_5\otimes\gamma_4, \tag{16}$$

где $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Для матрицы η сохраняется выражение (14).

Система (2), (14), (16) удовлетворяет определению вещественного поля. Поэтому будем называть ее вещественной формой исходной комплексной системы (10) – (12), или 16-компонентным вещественным полем Дирака. Как видно, размерность этого поля совпадает с размерностью вещественного поля Д – К. Волновые функции (7) и (15) имеют одинаковое число вещественных и мнимых компонент. Наконец, оба поля являются диракоподобными в смысле алгебры матриц Γ_μ. Указанные обстоятельства облегчают сопоставление свойств внутренней симметрии данных полевых систем.

Диракоподобность матриц Γ_μ (16) позволяет привести их к виду

$$\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu$$

(соответствующий базис называем «фермионным»). Этот переход осуществляется посредством унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции Ψ, задаваемого матрицей

$$A = \frac{1}{2}\left[I_4 \otimes \left(I_4 + i\gamma_2\right) - \gamma_5 \otimes \left(I_4 - i\gamma_2\right)\right],$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}\left[I_4 \otimes \left(I_4 - i\gamma_2\right) - \gamma_5 \otimes \left(I_4 + i\gamma_2\right)\right]. \tag{17}$$

Группа внутренней симметрии лагранжиана 16-компонентного **комплексного** поля Дирака, как и комплексного поля Д – К, может быть параметризована с помощью генераторов типа (4), где Γ'_μ – четверка квадратных матриц, имеющих в фермионном базисе вид

$$\Gamma'_\mu = \gamma_\mu \otimes I_4. \tag{18}$$

Очевидно, что генераторы внутренней симметрии 16-компонентного вещественного поля Дирака содержатся среди этих генераторов. Для того чтобы найти их, поступим следующим образом. С помощью преобразования A^{-1} (17) переведем генераторы (4), (18) обратно в базис (15), в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены. В результате получим

$$\begin{array}{lll} \Gamma'_1 = i\gamma_1\gamma_5 \otimes \gamma_2, & \Gamma'_2 = i\gamma_2\gamma_5 \otimes \gamma_2, & \Gamma'_3 = i\gamma_3\gamma_5 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma'_4 = i\gamma_4\gamma_5 \otimes \gamma_2, & \Gamma'_5 = \gamma_5 \otimes I_4, & \Gamma'_1\Gamma'_5 = i\gamma_1 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma'_2\Gamma'_5 = i\gamma_2 \otimes \gamma_2, & \Gamma'_3\Gamma'_5 = i\gamma_3 \otimes \gamma_2, & \Gamma'_4\Gamma'_5 = i\gamma_4 \otimes \gamma_2, \\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]} = \gamma_2\gamma_3 \otimes I_4, & \Gamma'_{[3}\Gamma_{1]} = \gamma_3\gamma_1 \otimes I_4, & \Gamma'_{[1}\Gamma'_{2]} = \gamma_1\gamma_2 \otimes I_4, \\ \Gamma'_{[1}\Gamma'_{4]} = \gamma_1\gamma_4 \otimes I_4, & \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]} = \gamma_2\gamma_4 \otimes I_4, & \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]} = \gamma_3\gamma_4 \otimes I_4. \end{array} \tag{19}$$

Затем, по аналогии с п. 2, принимая во внимание блочную структуру генераторов (19) и определение преобразований внутренней симметрии вещественного поля, устанавливаем вещественность (мнимость) параметров ω для бесконечно малых однопараметрических преобразований, задаваемых генераторами (19). После этого проверяем, для каких преобразований (генераторов) выполняется условие (6), и находим группу внутренней симметрии лагранжиана рассматриваемого 16-компонентного вещественного поля Дирака. Искомая группа задается в данном случае десятью генераторами

$$\Gamma'_2,\ \Gamma'_3,\ \Gamma'_4,\ \Gamma'_5,\ \Gamma'_2\Gamma'_5,\ \Gamma'_3\Gamma'_5,\ \Gamma'_4\Gamma'_5,\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{3]},\ \Gamma'_{[2}\Gamma'_{4]},\ \Gamma'_{[3}\Gamma'_{4]}, \tag{20}$$

которым соответствует шесть мнимых и четыре вещественных параметра.

Заметим, что набор генераторов (20) отличается от набора (9) заменой Γ'_1 на Γ'_5. Это отличие не имеет принципиального значения, поскольку с помощью унитарного преобразования базиса

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & -i & & \\ -i & 1 & & \\ & & -1 & -i \\ & & -i & -1 \end{vmatrix},\quad U^{-1} = U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & i & & \\ i & 1 & & \\ & & -1 & i \\ & & i & -1 \end{vmatrix}$$

матрицу γ_5 можно перевести в γ_1, не изменяя при этом вида матриц $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Это означает, что система двух дираковских полей, как и вещественное поле Д – К, обладает внутренней симметрией $SO(3,2)$. В рамках релятивистской квантовой механики эта симметрия соответствует перемешиванию в том числе состояний с противоположными значениями энергии для решений из двух различных уравнений Дирака.

4. Итак, вещественному полю Д – К может быть поставлена в соответствие система двух дираковских полей. С теоретико-групповой точки зрения данная возможность объясняется тем, что рассмотренная выше группа преобразований $SO(3,2)$ образует для случая поля Д – К полупрямое произве-

дение с преобразованиями группы Лоренца. При переходе от полупрямого произведения этих групп к прямому, что достигается соответствующим переопределением лоренцевских трансформационных свойств волновой функции, получаем уже систему дираковских полей (см. [1]). В работах [7, 8] было показано, что обе полевые системы допускают непротиворечивое квантование (с использованием индефинитной метрики) как по статистике Ферми – Дирака, так и Бозе – Эйнштейна.

С физической точки зрения наличие симметрии $SO(3,2)$ у системы двух дираковских полей вместо ожидаемой группы $SU(2)$ или $SU(1,1)$ объясняется в рамках квантовой теории тем, что в отсутствие (электромагнитного) взаимодействия состояния частицы и античастицы являются неразличимыми.

1. Стражев В.И., Сатиков И.А., Ционенко Д.А. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле. Мн., 2007.
2. Богуш А.А., Федоров Ф.И. // ДАН БССР. 1968. Т. 12. № 1. С. 21.
3. Богуш А.А.. Круглов С.И., Стражев В.И. // Там же. 1978. Т. 22. № 10. С. 893.
4. Becher P., Joos H. // Zeit. f. Phys. 1982. Bd. C15. S. 343.
5. Kato J., Kawamoto N., Miyake A. // Nucl. Phys. B721: 229–286, 2005 [Электронный ресурс]. Режим доступа: arXiv: hep-th/0502119.
6. Круглов С.И., Стражев В.И., Толкачев Е.А., Школьников П.Л. Мн., 1980. (Препринт / Ин-т физики АН БССР: 212).
7. Сатиков И.А., Стражев В.И. // ТМФ. 1987. Т. 73. № 1. С. 16.
8. Плетюхов В.А., Стражев В.И. // Acta Phys. Pol. 1988. Vol. B19. № 9. P. 751.

Поступила в редакцию 05.03.09.

Владимир Анестиевич Плетюхов – доктор физико-математических наук, профессор БрГУ им. А.С. Пушкина.
Василий Иванович Стражев – доктор физико-математических наук, профессор.