ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ
И СОЦИАЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ БГУ

Кафедра управления финансами

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие

Минск
ГИУСТ БГУ
2013

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
З-15

Рекомендовано Советом
Государственного института управления и социальных технологий БГУ

С о с т а в и т е л и:
кандидат физико-математических наук, доцент *Н. Н. Рачковский*;
кандидат физико-математических наук, доцент *Л. Г. Третьякова*

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат экономических наук, доцент М. Л. Зеленкевич;
доктор физико-математических наук, профессор Н. В. Лазакович

З-15 **Задачи** и упражнения по высшей математике. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб.-метод. пособие / сост. Н. Н. Рачковский, Л. Г. Третьякова. – Минск : ГИУСТ БГУ, 2013. – 96 с.

ISBN 978-985-491-114-4.

В учебно-методическое пособие включены задачи и упражнения по разделам «Теория вероятностей. Математическая статистика» для проведения практических занятий, выполнения контрольных работ и для самостоятельной работы студентов.

Адресовано студентам высших учебных заведений, обучающимся по специальности «Менеджмент», «Маркетинг».

УДК 51(075.8)
ББК22.1я73

ISBN 978-985-491-114-4

© Рачковский Н. Н., Третьякова Л. Г., 2013
© ГИУСТ БГУ, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Конечное множество называется *неупорядоченным*, если оно описывается только составом своих элементов. Конечное множество называется *упорядоченным*, если оно описывается составом своих элементов и порядком их следования.

Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо порядком их следования.

Пусть Ω – конечное множество, состоящее из n различных элементов.

Неупорядоченное подмножество множества Ω, состоящее из k различных элементов, называется *сочетанием без повторений* из n элементов по k элементам.

Число всех таких сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Упорядоченное подмножество множества Ω, состоящее из k различных элементов, называется *размещением без повторений* из n элементов по k элементам.

Число всех таких размещений вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Различные упорядоченные множества, состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком их следования, называются *перестановками.*

Число перестановок n-элементного множества вычисляется по формуле

$$P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

Пусть Ω – множество, состоящее из n различных типов элементов. Упорядоченное подмножество множества Ω, состоящее из k необязательно различных элементов, называется *размещением с повторениями* из n элементов по k элементам.

Число таких размещений равно n^k.

Разбиение на группы

Пусть множество из n элементов требуется разбить на k групп, состоящих из $n_1, n_2, \ldots, n_k$ элементов соответственно $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$. Тогда число способов, которыми можно осуществить такое разбиение, вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Основной принцип комбинаторики (правило умножения)

Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2, и так до k – го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Правило сложения

Пусть задано множество Ω, состоящее из n различных элементов. Если некоторое подмножество A можно выбрать n_1 способами из множества Ω, а подмножество $B - n_2 -$ способами, причем $A \cap B = \varnothing$, то выбор хотя бы одного из подмножеств A или B можно осуществить $n_1 + n_2$ способами.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Из 15 кандидатов на одну и ту же должность должно быть выбрано 5. Сколькими способами можно осуществить этот выбор?

Задание 2. Сколькими способами можно избрать из 10 человек делегацию в составе трех человек?

Задание 3. Сколькими способами можно из шести коммерческих банков выбрать два для размещения в них денежных вкладов?

Задание 4. В программе к экзамену содержится 30 вопросов, студент выучил 20. Сколькими способами можно составить экзаменационный билет из 5 вопросов так, чтобы студент ответил на все вопросы?

Задание 5. Сколькими способами можно создать очередь в кассу из пяти покупателей?

Задание 6. Сколькими способами на книжной полке можно расставить 7 учебников?

Задание 7. Сколькими способами можно рассадить четырех студентов на 30 местах?

Задание 8. Студенты 1-го курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день?

Задание 9. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из девяти значащих цифр, из которых ни одна не повторяется?

Задание 10. Сколькими способами группа из 30 студентов может выбрать старосту и его заместителя?

Задание 11. Семь пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде.

Задание 12. Сколько различных четырехзначных чисел может быть составлено из девяти значащих цифр?

Задание 13. Сколькими способами можно разместить пять шаров в пяти ящиках?

Задание 14. Сколькими способами можно подбросить три игральные кости?

Задание 15. В урне лежат 4 белых и 9 черных шаров. Сколькими способами можно достать шесть шаров так, чтобы среди них было 2 белых и 4 черных?

Задание 16. Сколькими способами можно выбрать два карандаша и три ручки из пяти различных карандашей и шести различных ручек?

Задание 17. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,...,20\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Задание 18. Сколькими способами можно 15 человек расставить в ряд так, чтобы лица A и B не стояли рядом?

Задание 19. Имеется 7 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно расположить в ряд все шары так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

Задание 20. Сколькими способами из 10 пар ботинок можно выбрать шесть ботинок так, чтобы среди них была ровно одна пара ботинок?

Задание 21. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде шесть нападающих, три полузащитника, шесть защитников и один вратарь?

Задание 22. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано при этом?

Задание 23. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый изних сыграл с различными партнерами по одной партии. Сколько всего сыграно партий?

Задание 24. Сколько различных слов, получающихся перестановкой букв в слове «математика», можно получить?

Задание 25. Сколькими способами 12 предметов можно разделить между тремя людьми так, чтобы каждый получил по четыре предмета?

Задание 26. Сколькими способами можно распределить 15 книг между четырьмя студентами так, чтобы первый получил 3 книги, второй – четыре, третий – 2, четвертый – 6?

Задание 27. В лифте, который останавливается на 10 этажах, едут 7 пассажиров. Сколько существует способов двум пассажирам выйти на одном этаже, трем пассажирам выйти на другом этаже и двум пассажирам выйти на третьем этаже, отличном от первых двух?

Задание 28. Сколькими способами 5 шаров можно разместить в пяти ящиках так, чтобы ровно один ящик оказался пустым?

Задание 29. 52 карты раздаются поровну четырем игрокам. Сколькими способами можно раздать карты так, чтобы соответственно у 1-го игрока было четыре карты масти «пики», у 2-го – три, у 3-го – одна, у 4-го – пять?

Задание 30. Сколькими способами группу из четырех мужчин и восьми женщин можно разбить на подгруппы по три человека в каждой так, что в каждой из них будет ровно один мужчина?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета» так, чтобы все они начинались с буквы «р»?

Задание 2. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый шахматист сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

Задание 3. Сколько различных шестизначных номеров автомобиля в большом городе, начинающихся с единицы, можно составить?

Задание 4. Сколькими способами можно рассадить 30 студентов в аудитории, вмещающей 35 человек?

Задание 5. Сколькими способами можно разложить 36 карт в ряд так, чтобы места расположения тузов образовывали арифметическую прогрессию, разность которой равна 7.

Задание 6. Имеется 5 билетов стоимостью 1 евро, 3 билета по 5 евро и 2 билета по 10 евро. Сколькими способами можно выбрать три билета общей стоимостью 15 евро?

Задание 7. Сколькими способами из колоды, содержащей 52 карты, можно вытянуть 13 карт так, чтобы среди них не содержалось ни одной пары «туз-король» одной масти?

Задание 8. В гардероб сданы четыре шляпы. Сколькими способами гардеробщик может выдать четыре шляпы четырем посетителям так, чтобы только два посетителя получили свои шляпы?

Тема 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Для математического описания экспериментов со случайными исходами необходимо понятие пространства элементарных событий (исходов). Таким пространством будем называть любое множество элементарных событий, обладающих свойствами: 1) все элементарные события взаимно исключают друг друга, т. е. в результате эксперимента происходит одно и только одно элементарное событие, 2) каждый интересующий нас результат эксперимента может быть однозначно описан с помощью элементарных событий.

Пространство элементарных событий будем обозначать Ω, элементарное событие – ω $(\omega \in \Omega)$.

Пространство элементарных событий можно трактовать как множество всех исходов изучаемого случайного явления.

Случайными событиями будем называть элементы σ-алгебры $\mathscr{A}$ подмножеств Ω.

Достоверным событием Ω назовем такое случайное событие, которое всегда происходит при осуществлении данного комплекса условий. Невозможным событием $\varnothing$ назовем случайное событие, которое никогда не происходит при осуществлении данного комплекса условий.

Произведением случайных событий A и B назовем такое случайное событие AB $(A \cap B)$, которое происходит в том и только в том случае, когда одновременно происходят случайные события A и B.

Случайные события A и B называются несовместными, если их произведение AB является невозможным событием $(AB = \varnothing)$.

Суммой случайных событий A и B назовем такое случайное событие $A + B (A \cup B),$ которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из случайных событий A или B.

Случайным событием, противоположным случайному событию A, назовем такое случайное событие $\overline{A}$, что $A + \overline{A} = \Omega.$

Вероятностью P случайного события A назовем числовую функцию, определенную на σ- алгебре случайных событий $\mathscr{A}$ и обладающую свойствами:

1. Для любого случайного события A справедливо неравенство $P(A) \geq 0;$
2. $P(\Omega) = 1;$
3. Для любых несовместных случайных событий A и B справедливо равенство $P(A + B) = P(A) + P(B);$
4. Для любой последовательности случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ таких, что $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$$

С в о й с т в а   в е р о я т н о с т и

1. $P(\varnothing) = 0.$
2. Для любого случайного события A верно неравенство $0 \leq P(A) \leq 1.$
3. Для любого случайного события A справедливо равенство: $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$
4. Для любых случайных событий A и B справедливо равенство: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

Тройка $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ называется вероятностным пространством.

I. КЛАССИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим в качестве примера вероятностного пространства классическое вероятностное пространство, которое описывается следующим образом: пространство элементарных событий Ω является конечным множеством. Все элементарные события ω являются равновозможными, т. е. для любого элементарного события ω имеет место равенство $P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|}$, где $|\Omega|$ – число всех элементарных событий. Вероятность любого случайного события A задается формулой

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ – число элементарных событий, принадлежащих множеству A.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. В магазин поступило 30 новых цветных телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность того, что он не имеет скрытых дефектов?

Задание 2. Ревизору нужно за определенный период времени проверить 100 предприятий. Известно, что одно из предприятий составляет неправильные бухгалтерские отчетности, имеет скрытые доходы. За первый квартал ревизор осуществил проверку на 10 предприятиях. Найти вероятность того, что среди 10 проверенных предприятий окажется предприятие, которое ведет неправильные бухгалтерские отчетности, имеет скрытые доходы.

Задание 3. Из 12 лотерейных билетов, содержащих 4 выигрышных, наугад берут 6. Какова вероятность того, что среди них ровно 2 выигрышных?

Задание 4. Библиотечка состоит из 10 книг: 5 книг ценой 20 рублей за 1 книгу, 3 книги по 10 рублей и 2 книги по 30 рублей. Найти вероятность того, что совокупная цена трех наугад взятых книг равна 60 рублям.

Задание 5. В группе 15 студентов, среди которых 4 получают повышенную стипендию. По списку наугад отобрано 6 человек. Найти вероятность того, что трое среди них получают повышенную стипендию.

Задание 6. Из колоды в 52 карты наудачу достают 6 карт. Найти вероятность того, что среди этих карт будут карты всех мастей.

Задание 7. Пусть в одном из рядов кинотеатра 10 мест. 10 зрителей случайным образом покупают10 билетов на этот ряд. Какова вероятность того, что два определенных лица сядут рядом? Найти соответствующую вероятность, если 10 человек будут занимать места за десятиместным круглым столом.

Задание 8. В коробке находится 5 одинаковых карточек, на каждой из которых записана одна из букв О, П, Р, С, Т. Найти вероятность того, что на вынутых наугад и расположенных в ряд карточках можно будет прочитать слово СПОРТ.

Задание 9. В коробке находится 6 одинаковых карточек, на каждой из которых записана одна из букв А, М, О, Р, С, Т. Найти вероятность того, что на вынутых наугад и расположенных в ряд четырех карточках можно будет прочитать слово СОРТ.

Задание 10. Кодовый замок открывается кодом, состоящим из 6 цифр. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет этот замок.

Задание 11. Найти вероятность того, что при случайном расположении 52 карт в ряд никакие два туза не будут находиться рядом.

Задание 12. В *5* ящиках размещают 5 шаров так, что для каждого шара равновозможно попадание в любой ящик. Найти вероятность следующих событий: а) ни один ящик не останется пустым, б) ровно один ящик окажется пустым.

Задание 13. Найти вероятность того, что дни рождения 6 человек придутся ровно на два месяца.

Задание 14. (Парадокс де Мере). Пусть A – случайное событие, состоящее в том, что при четырех бросаниях игральной кости хотя бы один раз выпадет шесть очков; B – случайное событие, состоящее в том, что при двадцати четырех бросаниях двух игральных костей хотя бы раз одновременно выпадут две шестерки. Какое из случайных событий A и B является более вероятным?

Задание 15. Каждый из 50 штатов представлен двумя сенаторами. Найти вероятность того, что в комитете из 50 случайно выбранных сенаторов представлен данный штат.

Задание 16. Студент знает 14 вопросов из 20. В билете содержатся 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит хотя бы на один из них.

Задание 17. Десять рукописей разложены по 30 папкам (на одну рукопись три папки). Найти вероятность того, что в случайно выбранных шести папках не содержится целиком ни одной рукописи.

Задание 18. Колода из 52 карт раздается поровну четырем игрокам. Какова вероятность того, что у каждого из игроков окажется по одному тузу?

Задание 19. Семь пассажиров поднимаются на лифте, который останавливается на 10 этажах. Какова вероятность того, что три пассажира выйдут на одном, два пассажира выйдут на другом и два пассажира – на третьем этаже?

Задание 20. За круглый стол рассаживаются в случайном порядке 20 гостей. Какова вероятность того, что гостей можно разбить на 10 непересекающихся пар так, чтобы любая пара состояла из сидящих рядом мужчины и женщины?

Задание 21. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов?

Задание 22. Из колоды, содержащей 52 карты, извлекаются 13 карт. Найти вероятность того, что среди них содержится ровно $k\ (k = 0,1,2,3,4)$ пар «туз-король» одной масти.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Программа вопросов к экзамену содержит 40 вопросов. Студент выучил ответы на 20 вопросов. Какова вероятность того, что вытащив билет, содержащий 5 вопросов, он правильно ответит на 2 вопроса?

Задание 2. В урне 10 красных и 5 синих шаров. Найти вероятность того, что из 6 взятых наугад шаров половина красных.

Задание 3. В шахматном турнире участвуют 18 человек, которых по жребию распределяют в группы по 9 человек. Найти вероятность того, что два наиболее сильных шахматиста будут играть в разных командах.

Задание 4. Для проверки шести магазинов случайным образом распределяют трех ревизоров. Найти вероятность того, что каждый ревизор будет проверять два магазина.

Задание 5. Подбросили две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков – четное число.

Задание 6. Шеститомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что первый и второй тома будут стоять рядом в указанном порядке.

Задание 7. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в большом городе имеет только две одинаковые цифры?

Задание 8. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятность случайного события, состоящего в том, что места расположения тузов образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 7.

Задание 9. Из колоды, состоящей из 52 карт, наудачу вынимаются три карты. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один туз?

Задание 10. В аудитории находится 30 студентов. Пусть день рождения каждого из них приходится на один из 365 дней года. Найти вероятность того, что найдутся хотя бы два студента, дни рождения которых совпадают.

II. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Определение 1. Геометрическим вероятностным пространством на прямой называется тройка (Ω, $\mathscr{A}$, P), в которой пространством элементарных событий является некоторый отрезок, имеющий длину $l(\Omega)$, $\sigma-$ алгебра случайных событий $\mathscr{A}$ состоит из борелевских подмножеств Ω, вероятность P определяется формулой

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)},$$

где $l(A)-$ длина множества A.

Определение 2. Геометрическим вероятностным пространством на плоскости называется тройка (Ω, $\mathscr{A}$, P), в которой пространством элементарных событий является некоторая область, имеющая площадь $S(\Omega)$, $\sigma-$ алгебра случайных событий $\mathscr{A}$ состоит из борелевских подмножеств Ω, вероятность P определяется формулой

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)-$ площадь множества A.

Отличие в определении геометрического вероятностного пространства от классического вероятностного пространства состоит в том, что пространство элементарных событий Ω является бесконечным множеством, не каждое подмножество Ω является случайным событием, вероятность случайного одноэлементного события равна нулю.

При описании вероятностных экспериментов используется термин «наудачу», который имеет разный смысл в случае классического и геометрического вероятностных пространств. В случае классического вероятностного пространства «наудачу» означает, что все элементарные события равновозможны, а вероятность любого случайного события пропорциональна числу элементарных событий, составляющих это случайное событие. В случае же геометрического вероятностного пространства «наудачу» означает, что брошенная в Ω точка может попасть в любую точку из Ω, вероятность попадания в какую-либо часть области Ω пропорциональна (длине, площади и т. д.) этой части и не зависит от ее расположения и формы.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. (Задача о встрече). Парень с девушкой договорились встретиться в промежутке времени между 12.00 и 13.00. Момент прихода каждого из них на место встречи в течение этого промежутка времени случаен и равновозможен. Парень может ждать девушку не более 15 минут, а девушка парня – не более 5 минут. Найти вероятность того, что встреча в условленном месте состоится.

Задание 2. (Задача Бюффона). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается игла длиной $2l\ (l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Задание 3.(Парадокс Бертрана).

3.1. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Найти вероятность того, что длина этой хорды больше длины стороны правильного треугольника, вписанного в круг, если середина хорды равномерно распределена в круге.

3.2. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Найти вероятность того, что длина этой хорды больше длины стороны правильного треугольника, вписанной в круг, если середина хорды равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном хорде.

3.3. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Найти вероятность того, что длина этой хорды больше длины стороны правильного треугольника, вписанного в круг, если один конец хорды жестко закреплен на окружности, а другой распределен на ней равномерно.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Внутрь круга радиуса R случайным образом ставится точка. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в этот круг квадрата.

Задание 2. На отрезок OA длиной l наугад ставится точка B. Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB, BA имеет длину, меньшую, чем $l/3$.

Тема 3. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Определение 1. Пусть зафиксировано случайное событие B, вероятность которого $P(B)$ – положительна, т. е. $P(B)>0$. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$P\left(A/B\right)=P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Определение 2. Случайные события A и B называются независимыми, если $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Бросают три кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадает единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

Задание 2. Из колоды в 36 карт вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что они красные, если среди них есть ровно одна дама.

Задание 3. Пусть случайное событие A таково, что $P(A)=0$ или $P(A)=1$. Доказать, что случайное событие A и любое случайное событие B независимы.

Задание 4. Доказать, что если случайные события A и B независимы, то независимы случайные события $\overline{A}$ и B; A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Семь шаров случайным образом распределяются по семи ящикам. Известно, что ровно два ящика оказались пустыми. Найти вероятность того, что в одном из ящиков окажется три шара.

Задание 2. Пусть A и B – случайные независимые события, причем $P(A+B)=1$. Доказать, что либо $P(A)=1,$ либо $P(B)=1$.

Тема 4. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теорема 1 (теорема сложения). Пусть задана конечная последовательность попарно несовместных случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, т. е. для любых $k,m \quad A_k A_m=\varnothing$. Тогда $P\left(A_1+A_2+...+A_n\right)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$.

Теорема 2 (теорема умножения). Пусть задана конечная последовательность случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, тогда имеет место равенство

$$P\left(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n\right)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)\,P_{A_1A_2}(A_3)\cdot ...\cdot P_{A_1A_2\cdot ...\cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Если $n=2$ и $P(A)>0,\ P(B)>0,$ то имеем равенство

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

В случае независимых случайных событий A и B имеем, что

$$P_A(B)=P(B),\ P_B(A)=P(A).$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. В городе работает 3 коммерческих банка. Вероятность того, что в течение года обанкротится первый банк, равна 0,2; второй банк обанкротится с вероятностью 0,1, а третий – с вероятностью 0,3 (банкротство любого из этих банков никак не влияет на возможность банкротства остальных банков). Найти вероятности следующих событий: а) обанкротится только один из трех банков; б) обанкротится хотя бы один банк; в) обанкротится не более одного банка; г) обанкротится только первый банк; д) обанкротятся только два банка; е) обанкротятся хотя бы два банка.

Задание 2. Монета бросается до тех пор, пока она два раза подряд не выпадает одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное количество бросаний.

Задание 3. Вероятность того, что студент купит книгу по экономике в магазине, равна 0,2, а вероятность того, что он купит книгу по английскому языку на книжной ярмарке, равна 0,35. Предполагая, что оба события независимы, найти вероятность того, что он купит хотя бы одну книгу.

Задание 4. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 наугад выбирается одна, а затем из оставшихся четырех – еще одна. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) только в первый раз; в) во второй раз; г) только во второй раз; д) в оба раза.

Задание 5. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами B_1, B_2, B_3 спортивного общества B. Вероятность того, что команды общества A выиграют матчи у команд общества B, таковы: при встрече A_1 с B_1 – 0,8; A_2 с B_2 – 0,4; A_3 с B_3 – 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех. Победа какого из обществ вероятнее?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность одновременного выпадения «орла» и шести очков.

Задание 2. Вероятность попадания первым стрелком в цель при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность попадания в цель: а) только одним стрелком; б) хотя бы одним стрелком; в) первым стрелком; г) только первым стрелком.

Задание 3. Некий гражданин, располагая суммой 3000 у. е., решил вложить по одной тысяче в каждый из трех банков под 12 % годовых на семь лет. Вероятность банкротства любого из этих банков в течение срока хранения вклада равна 0,1. Какова вероятность того, что по истечении семи лет гражданин получит обратно, по меньшей мере, вложенную сумму 3000 у. е.?

Тема 5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Определение 1. Случайные события $H_1, H_2, ..., H_n$ называются полной группой случайных событий, если они удовлетворяют условиям:

1. Для любых $k \neq l$ выполняется равенство $H_k \cdot H_l = \varnothing$,
2. $H_1 + H_2 + ... + H_n = \Omega$.
3. $P(H_k) > 0$ для любого $k = 1, 2, ..., n$.

Случайные события $H_1, ..., H_n$, образующие полную группу случайных событий, называют гипотезами.

Если $H_1, ..., H_n$ – полная группа случайных событий, то $\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k) = 1$.

Формула полной вероятности

Пусть $H_1, ..., H_n$ – полная группа случайных событий, A – произвольное случайное событие, тогда

$$P(A) = P_{H_1}(A)P(H_1) + P_{H_2}(A)P(H_2) + ... + P_{H_n}(A)P(H_n).$$

Формулы Байеса

Пусть $H_1, ..., H_n$ – полная группа случайных событий, A – произвольное случайное событие. Тогда

$$P_A(H_k) = \frac{P_{H_k}(A) \cdot P(H_k)}{P_{H_1}P(H_1) + ... + P_{H_n}(A)P(H_n)}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Формулы Байеса дают ответ на вопрос: среди всех испытаний, в которых происходит случайное событие A, каков процент испытаний, в которых осуществляется гипотеза H_k.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность сдачи норматива лыжником равна 0,9, велосипедистом – 0,8, бегуном – 0,7. Найти вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен сдаст норматив.

Задание 2. В первой бригаде 8 рабочих имеют первый разряд и 6 рабочих – второй разряд. Во второй бригаде 5 рабочих имеют первый разряд и 5 рабочих – второй разряд. Из первой бригады во вторую переведены двое рабочих. Найти вероятность того, что двое рабочих, наугад взятых из нового состава второй бригады, имеют первый разряд.

Задание 3. Надежность автомобиля, собранного из высококачественных деталей, равна 0,95. Если автомобиль собирают из деталей серийного производства, его надежность равна 0,6. Высококачественные детали составляют 30 % общего числа деталей. Найти: а) вероятность того, что наугад взятый автомобиль безотказно проработает в течение указанного времени; б) вероятность того, что автомобиль собран из высококачественных деталей, если он безотказно проработал в течение указанного времени.

Задание 4. В первом ящике находится 12 деталей, из них 2 бракованных, а во втором – 10 деталей, из них 1 бракованная. Из первого ящика во второй случайным образом переложена одна деталь, затем из второго ящика наугад взята одна деталь. Найти вероятность того, что взятая из второго ящика деталь бракованная.

Задание 5. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы курса четыре, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятности того, что студент первой, второй, третьей группы в результате этих соревнований попадет в сборную института, равны соответственно 0,9, 0,7, 0,8. Наудачу выбранный студент в результате соревнований попал в сборную. Какой из групп вероятнее всего принадлежит студент?

Задание 6. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетворять стандарту равна 0,96. Предложена упрощенная система проверки детали на стандартность, дающая положительный результат (деталь признается стандартной) с вероятностью 0,98 для стандартной детали и с вероятностью 0,05 для нестандартной. Найти вероятность того, что признанная в результате проверки стандартной деталь действительно стандартна.

Задание 7. Компания, занимающаяся страхованием рисков, связанных с автомобильными авариями, разделяет водителей в зависимости от квалификации и стажа на три группы A, B и C, составляющие соответственно 25 %, 35 %, 40 %. Вероятность наступления страхового случая по группам составляет соответственно 0,05, 0,04 и 0,02. Какова вероятность того, что случайно взятый страховой случай относится к группе A?

Задание 8. Клиенты, с которыми работает банк, делятся на две группы в отношении 1:5. Вероятность просрочки платежа клиентами первой группы равна 0,6, второй – 0,06. Найти вероятность того, что произвольный клиент, просрочивший первый платеж, просрочит также и второй. Предполагается, что клиент, просрочивший платеж, остается в той же группе.

Задание 9. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет для студента меньше: когда он берет билет первым или последним?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Фирма совершает сделки, 80 % из которых прибыльные, а 20 % – неприбыльные. Вероятность банкротства фирмы за время t в случае, когда она заключает прибыльные сделки, равна 0,01, а в случае заключения неприбыльных сделок равна 0,7. Определить вероятность банкротства фирмы за время t.

Задание 2. Имеются три одинаковые урны, в первой из которых пять зеленых и три синих шара, во второй – два зеленых и четыре синих шара, в третьей один зеленый и три синих шара. а) Найти вероятность того, что шар, взятый из наугад выбранной урны будет зеленым; б) Наугад взятый шар оказался зеленым. Найти вероятность того, что он из первой урны.

Задание 3. Два предпринимателя занимаются реализацией одинаковой продукции, которая поставляется ими в один и тот же магазин. Первый предприниматель поставляет продукции в 2 раза больше, чем второй, причем продукция высшего качества у него составляет 60 %, а у второго – 80 %. Случайный покупатель покупает продукцию высшего качества. Какова вероятность того, что она поставлена первым предпринимателем?

Задание 4. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала А или в одну из пяти касс вокзала В. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала А имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала В – 0,5. 1.) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет; 2.) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен?

Задание 5. В первом ящике находится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных, а в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность следующих событий: а) наудачу выбранная из наугад взятого ящика деталь является бракованной; б) после того, как все детали ссыпаны в один ящик, наудачу выбранная деталь является бракованной.

Тема 6. СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Пусть проводится n независимых испытаний. Известно, что в каждом испытании возможны два исхода: либо происходит событие A («Успех»), либо событие A не происходит («Неуспех»). При этом предполагается, что $P(A)=p$, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-p=q, (p+q=1)$ и вероятность успеха p не изменяется от испытания к испытанию.

Описанная выше схема и называется схемой независимых испытаний Бернулли.

Вероятность того, что в схеме независимых испытаний Бернулли произошло ровно k успехов, вычисляется по формуле

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Обозначим $k-$ число успехов в схеме независимых испытаний Бернулли. Тогда вероятность того, что в схеме независимых испытаний Бернулли произошло не менее k_1 успехов, вычисляется по формуле

$$P_n(k \ge k_1)=\sum_{k=k_1}^{n} P_n(k),$$

а вероятность того, что произошло не более k_2 успехов – по формуле

$$P_n(k \le k_2) = \sum_{k=0}^{k_2} P_n(k).$$

В задаче: при каком количестве испытаний n с вероятностью успеха p в схеме независимых испытаний Бернулли с вероятностью P произойдет хотя бы один успех – число независимых испытаний n можно определить по формуле

$$n = \frac{\ln(1-P)}{\ln q};$$

вероятность успеха p – по формуле $p = 1 - \sqrt[n]{1-P}$;
а вероятность P – по формуле $P = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.

Вероятности $P_n(k)$ можно рассматривать как значения функции, зависящей от числа успехов k. Число успехов k_0 называется наивероятнейшим числом успехов, если $\max\limits_{0 \le k \le n} P_n(k) = P_n(k_0)$.

Теорема. Если число $np + p$ является целым, то каждое из чисел $np - q$ и $np + p$ является наивероятнейшим числом успехов. Если $np + p \notin \mathbb{N}$, то наивероятнейшее число успехов k_0 определяется по формуле

$$k_0 = [np + p], \text{ где } [\ldots] \text{ – целая часть числа.}$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Банк выдал 48 кредитов независимым заемщикам. Вероятность того, что деньги будут возвращены точно в срок, для каждого заемщика равна 0,9. Каково наивероятнейшее число просроченных кредитов?

Задание 2. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании монеты сработает правильно, равна 0,97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наиболее вероятное число правильных срабатываний было равно 100?

Задание 3. Контрольная работа состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос предлагается четыре варианта ответа, из которых только один правильный. Студент не готов к контрольной и поэтому выбирает ответы наугад. Какова вероятность того, что он правильно ответит на k вопросов ($k = 0; 1; 2; 3; 4; 5$)?

Задание 4. Четыре покупателя приехали на оптовый склад. Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется телевизор фирмы «Филлипс», равна 0,4. Найти вероятности следующих событий: а) телевизор фирмы «Филлипс» потребуется всем четырем покупателям, б) телевизор фирмы «Филлипс» потребуется не менее, чем двум покупателям, в) телевизор фирмы «Филлипс» потребуется не более, чем трем покупателям.

Задание 5. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы мишень была поражена с вероятностью 0,8?

Задание 6. Вероятность того, что событие A появится хотя бы один раз в двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события А в одном испытании.

Задание 7. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,91. Найти вероятности следующих событий: а) трех попаданий при шести выстрелах, б) не менее двух попаданий при четырех выстрелах.

Задание 8. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,9. Вероятность поражения цели при k попаданиях равна $1-0{,}1^k$. Произведено два выстрела. Найти вероятность поражения цели.

Задание 9. Для поиска месторождения нефти на заданной территории организовано 10 геологоразведывательных партий, каждая из которых независимо от других обнаруживает залежь при ее наличии с вероятностью 0,7. После обработки и анализа сейсмографических записей вся территория была поделена на два района. В первом районе нефть может залегать с вероятностью 0,55, а во втором с вероятностью 0,45. Как следует распределить 10 геологоразведывательных партий по двум районам, чтобы вероятность обнаружения нефти была максимальной?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включены 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Задание 2. Производится 4 независимых испытания, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет: а) ровно 3 раза; б) хотя бы 3 раза; в) более трех раз; г) менее трех раз.

Задание 3. Событие B появится, если событие A произойдет хотя бы 2 раза, и не появится в противном случае. Найти вероятность наступления события B, если произведено 5 независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью 0,4.

Задание 4. Событие B может появиться, если событие A произойдет хотя бы 3 раза, причем вероятность появления события B при k появлениях события A, равна $\left(k(k-1)(k-2)\right)/(k+1)^3$. Найти вероятность наступления события B, если произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же вероятностью 0,8.

Задание 5. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью не меньшей чем 0,5 хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

Задание 6. Вероятность того, что пассажир опоздает к поезду, равна 0,01. Найти наивероятнейшее число пассажиров, опоздавших на поезд из 500 человек и вероятность этого числа.

Тема 7. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПУАССОНА И МУАВРА-ЛАПЛАСА

I. *Формула Пуассона*

Если $p < 0{,}1, npq \le 9$, то в схеме независимых испытаний Бернулли имеет место приближенная формула Пуассона:

$$P_n(k) \cong e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n, \lambda = np,$$

а значения $P(\lambda, k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ находятся в таблице 3 приложения.

II. *Локальная формула Муавра-Лапласа*

Если $n \ge 100, npq \ge 20,$ то в схеме независимых испытаний Бернулли имеет место приближенная локальная формула Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) \cong \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, k = 0, 1, 2, ..., n,$$

а значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ находятся в таблице 1 приложения.

III. *Интегральная формула Муавра-Лапласа*

Если $n \ge 100, npq \ge 20,$ то в схеме независимых испытаний Бернулли имеет место приближенная интегральная формула Муавра-Лапласа:

$$P_n(a \le k \le b) \cong \Phi_0\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}dt.$

Значения функции $\Phi_0(x)$ находятся в таблице 2 приложения, причем $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x),$ если $x > 0.$

Отношение числа «Успехов» m в схеме независимых испытаний Бернулли к числу всех испытаний n называется частотой «Успеха». Тогда вероятность того, что частота $\frac{m}{n}$ отклоняется по модулю от теоретической вероятности «Успеха» p не более, чем на ε, вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. В банк поступила тысяча стодолларовых купюр. Какова вероятность того, что среди этих купюр окажется 5 фальшивых, если 0,1 % купюр фальшивые?

Задание 2. Магазин получил 900 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) хотя бы одну; б) менее двух; в) ровно две; г) более двух.

Задание 3. При наборе слова оператор делает ошибку с вероятностью 0,002. Какова вероятность того, что в набранной статье, состоящей из 3000 слов, будет не более 4 ошибок?

Задание 4. Сборник задач содержит 350 задач с ответами. В каждом ответе может быть ошибка с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что ответы в четырех задачах даны с ошибками?

Задание 5. Вероятность того, что автомобиль, сошедший с конвейера, не будет иметь мелких неполадок, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 600 сошедших с конвейера автомобилей 550 не будут иметь мелких неполадок?

Задание 6. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из ста покупателей обувь 41-го размера потребуется а) 25 покупателям; б) не более 30 покупателям.

Задание 7. Вероятность банкротства отдельной фирмы равна 0,75. Найти вероятность того, что из 200 фирм обанкротятся не менее 140 и не более 180 фирм.

Задание 8. Производится 500 бросаний симметричной монеты. В каких пределах будет с вероятностью 0,99 находиться отклонение частоты выпадений герба от теоретической вероятности $p = 0,5$?

Задание 9. На симпозиум приглашены 75 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0,8. В гостинице для гостей заказано 65 мест. Какова вероятность того, что все приезжающие будут поселены в гостинице?

Задание 10. Сколько нужно произвести бросаний симметричной монеты, чтобы с вероятностью 0,9 отклонение частоты выпадения герба отличалось от 0,5 не более, чем на 0,01?

Задание 11. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два различных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли (рассмотреть два случая: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят по одиночке)? Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

Задание 12. Появление тайфуна в Мексиканском заливе ожидается каждый день с вероятностью 0,1. Сколько раз можно ожидать появление тайфуна в июне с вероятностью 0,2?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) ровно 50 раз; б) не более 75 раз; в) не менее 60 раз; г) не менее 65 и не более 80 раз.

Задание 2. Перевозится партия в 1000 ламп. Для каждой лампы вероятность того, что она будет разбита при перевозке, равна 0,002. Найти вероятность того, что при перевозке будет разбито: а) ровно 5 ламп; б) не менее 4 ламп; в) не более 3 ламп; г) не менее 1 и не более 6 ламп; д) не менее 250 ламп; е) не более 100 ламп; ж) не менее 20 и не более 50 ламп.

Задание 3. Производится 400 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,3. Найти вероятность того, что событие *A* в этих испытаниях произойдет: а) ровно 110 раз; б) не более 140 раз; в) не менее 105 раз; г) не менее 115 и не более 130 раз.

Задание 4. Сколько нужно произвести бросаний симметричной монеты, чтобы с вероятностью 0,99 отклонение частоты выпадения герба отличалось от 0,5 не более, чем на 0,01?

Задание 5. 100 фирм одной отрасли работают независимо друг от друга. Известно, что каждая фирма обеспечена работой в течение месяца с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что в течение месяца будут работать от 70 до 86 фирм.

Тема 8. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Пусть Ω – пространство элементарных событий, на котором задана функция X, принимающая действительные значения. Обозначим $(X < x)$ подмножество пространства элементарных событий $\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$, где x – произвольное действительное число.

Определение 1. Случайной величиной (СВ) называется числовая функция X, определенная на пространстве элементарных событий Ω, такая, что для любого действительного числа x подмножество $(X < x)$ является случайным событием.

Определение 2. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, которая для любого действительного x определена равенством

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения СВ *X*.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;$
3. $F(x)$ является неубывающей функцией;
4. $F(x)$ непрерывна слева в каждой точке.

Любая функция, обладающая этими четырьмя свойствами, является функцией распределения некоторой СВ.

Теорема 1. Если X – СВ, f – непрерывная функция, то $Y = f(X)$ является случайной величиной.

Например, если X – СВ, то $X^2, |X|$ являются случайными величинами.

I. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ) И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Определение 3. Случайная величина X называется дискретной случайной величиной (ДСВ), если с вероятностью, равной единице, она принимает не более чем счетное множество значений.

Законом распределения ДСВ X, принимающей конечное множество значений $x_1, x_2, ..., x_n$, называется таблица

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где $x_1 < x_2 < x_3 ... < x_n$; $p_i \geq 0, i = \overline{1,n}$; $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$; $p_i = P\left(X = x_i\right), i = \overline{1,n}$.

Законом распределения ДСВ X, принимающей счетное множество значений $x_1, x_2, ..., x_n ...$, называется бесконечная таблица

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

где $p_i \geq 0$, $p_i = P\left(X = x_i\right), i \in N, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Определение 4. Математическим ожиданием ДСВ X, принимающей конечное множество значений, называется число $M(X)$, определяемое по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Если ДСВ X принимает счетное множество значений, то ее математическим ожиданием называется число $M(X)$, равное сумме ряда $\sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$, если он сходится абсолютно, в противном случае ДСВ X не имеет конечного математического ожидания.

Математическое ожидание характеризует среднее значение ДСВ X.

Определение 5. Дисперсией СВ X называется число $D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - M(X)^2$.

Дисперсия СВ X характеризует меру рассеивания случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Средним квадратическим отклонением СВ X называется число $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Для вычисления $M(X^2)$, если X – ДСВ, используют формулу

$$M(X^2) = \sum_k p_k x_k^2 .$$

Функция распределения ДСВ X, принимающей конечное множество значений, вычисляется по формуле

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1, \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \\ 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Пусть X – ДСВ, характеризующая процентное изменение стоимости акций в отношении к текущему курсу через один месяц в будущем. Вероятностный прогноз для ДСВ X задан законом распределения:

X	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Какова, согласно прогнозу, вероятность того, что покупка акции будет более выгодна, чем помещение денег на вклад при ставке банковского процента 12 % годовых?

Задание 2. Прогноз будущей инфляции через три месяца в процентах к текущему уровню цен задан распределением

X	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

Текущая ставка по трехмесячным кредитам – 11 % годовых. Текущая ставка по трехмесячным вкладам – 5 % годовых. Какова вероятность того, что реальный процент по кредитам будет положительным, а по вкладам – отрицательным?

Задание 3. В течение года некоторая фирма трижды обращается за кредитом в банк. Вероятность получения кредита для фирмы равна 0,8. ДСВ X характеризует число кредитов фирмы за год. Составить закон распределения ДСВ X. Найти ее математическое ожидание и дисперсию. Вычислить функцию распределения ДСВ X и построить ее график.

Задание 4. На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля. Составить закон распределения ДСВ X, характеризующей число светофоров, пройденных автомобилем без остановки. Найти ее математическое ожидание и дисперсию. Вычислить функцию распределения и построить ее график.

Задание 5. Исследуются одни торги на бирже, при которых изучается повышение курса акций двух компаний. Вероятность повышения курса акций для одной компании равна 0,7, а для другой – 0,8. Пусть ДСВ X характеризует суммарное число повышений курса акций, изучаемых компаний на данных торгах. Составить закон распределения ДСВ X, вычислить ее математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения. Построить график функции распределения.

Задание 6. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из первого, второго, третьего орудий батареи равны соответственно 0,6; 0,8; 0,7. Каждое орудие стреляет по некоторой цели один раз. ДСВ X характеризует число попаданий в цель. Составить закон распределения ДСВ X. Найти ее математическое ожидание и дисперсию. Вычислить функцию распределения ДСВ X и построить ее график.

Задание 7. На столе в беспорядке находятся 15 ведомостей, среди которых 10 непроверенных. Бухгалтер наудачу извлекает 3 ведомости. Составить закон распределения ДСВ X, характеризующей количество непроверенных ведомостей среди трех отобранных. Найти математическое ожидание и дисперсию. Вычислить функцию распределения ДСВ X и построить ее график.

Задание 8. В трех из 15 составленных кассиром счетов имеются ошибки. Ревизор решил проверить два счета. Составить закон распределения ДСВ X, характеризующей количество ошибочных счетов среди двух отобранных. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Два стрелка попеременно стреляют по одной мишени до ее поражения. Вероятность поражения мишени при одном выстреле первым стрелком равно 0,7, а вторым – 0,6. Написать закон распределения случайной величины X, характеризующей количество произведенных выстрелов, и найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Задание 2. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Из партии наугад вынимаются 5 деталей. Написать закон распределения случайной величины X, характеризующей количество нестандартных деталей среди наугад вынутых. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задание 3. Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 43-го размера, равна 0,4. В обувной магазин вошли трое покупателей. Составить закон распределения ДСВ X, характеризующей число покупателей, которым требуется обувь 43-го размера, из трех вошедших в магазин. Найти ее математическое ожидание, дисперсию, вероятность $P(X \geq 2)$.

Задание 4. ДСВ X имеет следующий закон распределения

X	1	2	3	4	5
P	c	$4c$	$9c$	$16c$	$25c$

Найти а) постоянную c, б) $P(|X-2| \leq 1)$.

II. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (АНСВ) И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Определение 6. Случайная величина X называется абсолютно непрерывной СВ, если существует такая интегрируемая положительная функция $f(x)$, что функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du .$$

Функция $f(x)$ называется плотностью распределения СВ X.

Свойства плотности распределения АНСВ X:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$

2. $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) =$
$= P(a \le X \le b);$

3. В точках дифференцируемости функции распределения выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Определение 7. Математическим ожиданием $M(X)$ АНСВ X, называется число, которое вычисляется по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение АНСВ X.

Определение 8. Дисперсией АНСВ X называется число, которое вычисляется по формуле $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2$.

Дисперсия СВ X характеризует меру рассеивания случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Задана функция распределения АНСВ X. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания значений АНСВ X на отрезок $[\alpha; \beta]$. Построить графики функции распределения, плотности распределения АНСВ X.

№	Функция распределения	α	β
1	$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -1, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}, & \text{если } -1 < x \le 2, \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$	-2	1

2	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ 0,5\left(1-cosx\right), & если\ 0<x\le\pi,\\ 1, & если\ x>\pi.\end{cases}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$
3	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ \dfrac{1}{20}\left(x^2+x\right), & если\ 0<x\le 4,\\ 1, & если\ x>4.\end{cases}$	1	1,5
4	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le -10,\\ \dfrac{(x+10)}{11}, & если\ -10<x\le 1,\\ 1, & если\ x>1.\end{cases}$	2	3
5	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ \dfrac{x^3-2x}{4}, & если\ 0<x\le 2,\\ 1, & если\ x>2.\end{cases}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{2}$

Задание 2. Задана плотность распределения АНСВ X. Найти ее функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию. Построить графики функции распределения и плотности распределения АНСВ X.

№	Плотность распределения	№	Плотность распределения
1	$f(x)=\begin{cases}0, & если\ x\notin\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right],\\ -\cos x, & если\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right].\end{cases}$	2	$f(x)=\begin{cases}0, & если\ x\notin[0;4],\\ \dfrac{3x^2+8}{96}, & если\ x\in[0,4].\end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Задана функция распределения АНСВ X. Найти плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию, вероятность попадания значений АНСВ X на отрезок $[\alpha;\beta]$. Построить графики функции распределения и плотности распределения АНСВ X.

№	Функция распределения	α	β
1	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le -2,\\ 0,5x-1, & если\ 2<x\le 4,\\ 1, & если\ x>4.\end{cases}$	-3	3

2	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ x^2, & если\ 0<x\le 1,\\ 1, & если\ x>1.\end{cases}$	0.5	0,75
3	$F(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le -\frac{\pi}{2},\\ \cos x, & если\ -\frac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 1, & если\ x>0.\end{cases}$	$-\frac{3\pi}{2}$	π

Задание 2. Задана плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & если\ x\le 0,\\ a\sin x, & если\ 0<x\le \pi,\\ 0, & если\ x>\pi\end{cases}$$

АНСВ *X*. Найти параметр *a*. Вычислить вероятность $P(-\pi \le X \le 0{,}5\pi)$. Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

III. НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 9. Пусть X и Y – две СВ. Случайным вектором называется упорядоченная пара (X,Y).

Определение 10. Функцией распределения случайного вектора (X,Y) называется функция $F(x,y)$, которая для любых действительных чисел x и y определяется равенством

$$F(x,y)=P\big((X<x)\cap(Y<y)\big).$$

Определение 11. Случайные величины X и Y называются независимыми СВ, если для любых действительных x и y выполняется равенство

$$F(x,y)=F(x)\cdot F(y).$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Пусть p – цена, $S(p)$ – функция предложения, $D(p)$ – функция спроса. Найти закон распределения равновесной цены p_0 и ее математическое ожидание, если $S(p)=p$, $D(p)=\dfrac{A}{p+B}$, где A и B – независимые дискретные случайные величины, законы распределения которых имеют вид:

A	36	225
P	0,5	0,5

B	0	16
P	0,6	0,4

Задание 2. Пусть R_d – выручка фирмы в долларах. Найти закон распределения выручки в рублях $R = R_d \cdot D$ в пересчете по курсу доллара D, если выручка R_d не зависит от курса D, и законы распределения R_d и D имеют вид:

R_d	100	200
P	0,7	0,3

D	30	40
P	0,8	0,2

Задание 3. Пусть заданы функции предложения $S(p) = 20p - 100$ и спроса $D(p) = A - Bp,$ зависящие от цены p. Коэффициенты A и B являются независимыми ДСВ, законы распределения которых имеют вид:

A	200	240
P	0,5	0,5

B	10	20
P	0,6	0,4

Пусть p_0 – равновесная цена, зависящая от случайных коэффициентов A и B, Q_0 – равновесное количество проданного товара, также зависящее от A и B и определяемое равенствами $Q_0 = S(p_0) = D(p_0).$ Найти математические ожидания ДСВ p_0 и Q_0.

Задание 4. Пусть X – ДСВ, характеризующая объем товаров, произведенных некоторой фирмой, Y – ДСВ, характеризующая стоимость единицы продукции. ДСВ X и Y являются независимыми и имеют следующие законы распределения:

X	50	100	250
P	0,3	0,5	0,2

Y	2	2,5	3
P	0,7	0,2	0,1

Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию ДСВ Z, характеризующей выручку фирмы и равной $Z = X \cdot Y$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Пусть $R-$ ДСВ, характеризующая выручку фирмы, $C-$ ДСВ, характеризующая затраты фирмы, Y – ДСВ, характеризующая прибыль фирмы и равная $Y = R - C$. Найти закон распределения прибыли Y и ее математическое ожидание, если ДСВ R и C независимы и имеют законы распределения

R	3	4	5	6	7
P	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

C	1	2
P	0,5	0,5

Задание 2. Пусть ДСВ X и $Y-$ независимы и имеют одинаковые законы распределения:

$X(Y)$	-1	0	1	2
P	0,25	0,25	0,25	0,25

Найти вероятность $P(X > Y)$.

Задание 3. Пусть ДСВ X и Y – независимы и имеют законы распределения:

X	2	4	6
P	0,3	0,5	0,2

Y	1	2
P	0,5	0,5

Вычислить $M\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

Тема 9. ОСНОВНЫЕ ПРИМЕРЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (РАСПРЕДЕЛЕНИЙ)

1. *Биномиальное распределение с параметрами* $p \in (0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$.

Дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, если ее закон распределения задается по формулам

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,...,n,\ q = 1 - p.$$

В этом случае $M(X) = np,\ D(X) = npq.$

2. *Распределение Пуассона с параметром* $\lambda > 0$.

Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона, если ее закон распределения задается по формулам

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,...,$$

в этом случае $M(X)=D(x)=\lambda.$

3. *Геометрическое распределение с параметром* $p\in(0,1).$

Дискретная случайная величина X имеет геометрическое распределение, если ее закон распределения задается по формулам

$$P(X=k)=pq^{k-1}, \qquad k\in\mathbb{N}, \qquad p+q=1.$$

В этом случае

$$M(X)=\frac{1}{p}, \; D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

4. *Равномерное распределение на отрезке* $[a;b]$ *с параметрами* $a,b\ \in\ \mathbb{R}, -\infty<a<b<+\infty.$

Абсолютно непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если ее плотность распределения задается по формуле

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \textit{если } x\in[a,b],\\ \quad 0, \quad \textit{если } x\notin[a,b].\end{cases}$$

В этом случае $M(X)=\dfrac{a+b}{2}, \quad D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12},$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \textit{если } a<x\le b,\\ 1, & \textit{если } x>b.\end{cases}$$

5. *Показательное распределение с параметром* $\lambda>0.$

Абсолютно непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda>0,$ если ее плотность распределения задается по формуле

$$f(x)=\begin{cases}0, & \textit{если } x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \textit{если } x>0.\end{cases}$$

В этом случае $M(X)=\frac{1}{\lambda}, D(X)=\frac{1}{\lambda^2},$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если x } \le 0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{x}}, & \text{если x } >0.\end{cases}$$

6. *Нормальное распределение с параметрами* a и σ $(a\in R, \sigma>0).$

Абсолютно непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение, если ее плотность распределения задается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

В этом случае $M(X)=a, D(X)=\sigma^2,\ F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}}du.$

Важнейшим частным случаем является абсолютно непрерывная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами $a=0, \sigma=1$.

В этом случае

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad M(X)=0, D(X)=1.$$

Значения функции распределения $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$ находятся в соответствующей таблице. Для нахождения значения функции *Ф* от отрицательных *x* используют следующее равенство $\Phi(-x)=1-\Phi(x),$ если $x>0.$

Часто таблица содержит значения функции $\Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$ (см. Приложение, табл. 2), для которой имеют место равенства $\Phi_0(-x)=-\Phi_0(x),$ $\Phi(x)=0,5+\Phi_0(x)$ для любого положительного *x.*

Функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины *X* имеющей нормальное распределение с параметрами *a, σ* связана с функцией $\Phi(x)$ следующим образом: $F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Имеются три банка, обещающие своим вкладчикам доход 30 % годовых. Вероятность разорения такого банка в течение года равна 0,5. ДСВ *X* характеризует число разорившихся банков в течение года среди упомянутых трех банков. Составить закон распределения ДСВ *X* найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Задание 2. Банк выдал 5 кредитов, оценив вероятность невозврата денег в 0,1 для каждого из пяти заемщиков. Пусть *X* – ДСВ, характеризующая количество заемщиков, не вернувших денег по истечении установленного срока. Необходимо составить закон распределения ДСВ *X*, найти ее математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, считая получение кредита каждым заемщиком, независимым друг от друга.

Задание 3. Банк выдал 10 кредитов независимым заемщикам по *X* ден. ед. каждому на одинаковый срок. В конце срока каждый заемщик либо с вероятностью 0,9 возвращает банку 1,3 *X* ден. ед., либо разоряется с вероятностью 0,1 и не возвращает ничего. Какова вероятность того, что банк будет иметь прибыль?

Задание 4. Страховая компания заключила 1000 независимых договоров на следующих условиях: страховой взнос составляет K ден. ед. Страховка равна 100 K ден. ед. Вероятность наступления страхового события по каждому договору равна 0,002. Найти вероятность того, что прибыль страховой компании будет больше половины своего математического ожидания.

Задание 5. Найти среднее количество опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что количество опечаток имеет распределение Пуассона.

Задание 6. Рукопись объемом в 1000 страниц содержит 1000 опечаток. Предполагается, что количество опечаток на странице рукописи имеет распределение Пуассона. Найти вероятность того, что наугад взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки; в) не менее двух опечаток.

Задание 7. Производятся бросания игральной кости до первого выпадения шести очков. Написать закон распределения случайной величины X характеризующей количество произведенных бросаний? и найти ее математическое ожидание.

Задание 8. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус: а) менее 3 минут; б) более 1 минуты. Вычислить среднее время ожидания.

Задание 9. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05. Вычислить среднюю ошибку.

Задание 10. Цена на акции компании в течение года есть СВ, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием 30 у. е. и средним квадратическим отклонением 10 у. е. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день обслуживаемого периода цена за акцию была между 10 и 50 у. е.

Задание 11. Финансовый аналитик занимается экономическим прогнозом банковской процентной ставки, которая в текущем году описывается случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием равным 20 % и средним квадратическим отклонением равным 10 %. Найти вероятность того, что согласно прогнозу аналитика величина банковской процентной ставки будет находиться в пределах от 17 % до 23 %.

Задание 12. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Ее среднее квадратическое отклонение равно 0,4. Найти вероятность того, что отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превысит 0,3.

Задание 13. Валик, изготовляемый станком-автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера по абсолютной величине не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметров валиков от проектного размера имеют нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием 0 мм. Каков процент брака среди валиков, изготовляемых станком-автоматом?

Задание 14. На рынок поступила партия говядины. Считается, что вес туши – нормально распределенная СВ с неизвестным математическим ожиданием и средне квадратическим отклонением $\sigma = 150$ кг. Известно, что 37 % туш имеют вес не более 1000 кг. Определить средний вес случайно выбранной туши.

Задание 15. Испытывают 3 независимо работающих элемента, время безотказной работы которых имеет показательное распределение с параметрами $\lambda_1 = 0{,}1; \lambda_2 = 0{,}2; \lambda_3 = 0{,}3$ соответственно. Найти вероятность того, что за 5 часов откажет: а) только один элемент; б) только два элемента; в) хотя бы один элемент.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения ДСВ X, характеризующей количество выпадений шести очков. Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Задание 2. Составить закон распределения ДСВ, характеризующей число появлений события A в четырех независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6.

Задание 3. Коммутатор обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Записать первые 4 возможные значения и соответствующие вероятности случайной величины X – количество абонентов, в течение 1 минуты позвонивших на коммутатор. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Задание 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно равны 15 и 5. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (5; 20).

Задание 5. Случайные ошибки измерения имеют нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 1 мм и математическим ожиданием 0 мм. Найти вероятность того, что из двух независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28 мм.

Задание 6. Испытывают 2 независимо работающих элемента, время безотказной работы которых имеет показательное распределение с параметрами $\lambda_1 = 0{,}02$ и $\lambda_2 = 0{,}05$ соответственно. Найти вероятность того, что за 6 часов: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один откажет; г) хотя бы один откажет.

Задание 7. В каком случае вероятнее истратить более трех минут на ожидание транспорта: если ехать на автобусе с интервалом движения 4 минуты или дважды садиться в поезд метро с интервалом движения 2 минуты? (Считать, что время ожидания транспорта – СВ, имеющая равномерное распределение).

Задание 8. Число заказов N, поступающих на фирму, распределено по закону Пуассона с параметром λ. Каждый заказ выполняется с вероятностью $p = 0{,}95$ независимо от остальных. Найти распределение ДСВ X, равной числу заказов, выполненных за день.

Задание 9. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Записать первые 5 возможных значений и соответствующих вероятностей ДСВ X, характеризующей количество веретен, на которых в течение 1 минуты оборвалась нить. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Тема 10. ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Определение 1. Пусть X, Y – дискретные случайные величины. Упорядоченная пара (X, Y) называется двумерным дискретным случайным вектором. Таблица

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

где $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, называется совместным законом распределения двумерного случайного вектора (X, Y) или совместным законом распределения дискретных случайных величин X и Y.

Законы распределения дискретных случайных величин X и Y задаются таблицами

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
P	$\sum_{j=1}^{n} p_{1j}$	$\sum_{j=1}^{n} p_{2j}$	$\dots$	$\sum_{j=1}^{n} p_{mj}$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
P	$\sum_{i=1}^{m} p_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} p_{i2}$	$\dots$	$\sum_{i=1}^{m} p_{in}$

Определение 2. Дискретные случайные величины X и Y называются независимыми, если для любых x_i и y_j выполняется равенство

$$P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = P\big(X = x_i\big) \cdot P\big(Y = y_j\big).$$

Определение 3. Коэффициентом корреляции называется число

$$\rho(X,Y) = \frac{M((X - M(X))(Y - M(Y)))}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Если случайные величины X и Y являются независимыми, то $\rho(X,Y) = 0$. Обратное утверждение неверно, т. е. если $\rho(X,Y) = 0$, то случайные величины X и Y не обязательно являются независимыми.

Если коэффициент корреляции $\rho(X,Y) \neq 0$, то случайные величины не являются независимыми.

Если $|\rho(X,Y)| = 1$, то случайные величины X и Y линейно зависят друг от друга, т. е. с вероятностью, равной 1, $Y = aX + b$, где a,b – заданные числа.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Две фирмы выпускают одинаковую продукцию. Каждая независимо от другой может принять решение о модернизации производства. Вероятность того, что первая фирма приняла такое решение, равна 0,6. Вероятность принятия такого решения второй фирмой равна 0,65. Написать закон распределения двумерного случайного вектора, характеризующего принятие решения о модернизации производства двух фирм.

Задание 2. Совместное распределение случайных доходов фирм X и Y в течение двух последних дней задано таблицей

$X \setminus Y$	–100	0	100
–100	0,2	0,1	0,05
0	0,05	0,25	0,02
100	0,01	0,02	0,3

Найти а) законы распределения СВ X и Y,

б) закон распределения среднего дохода $Z = \dfrac{X+Y}{2}$,

в) совместное распределение среднего дохода Z и прироста дохода $U = Y - X$.

Задание 3. Случайная величина X имеет следующий закон распределения

X	–2	–1	1	2
P	0,25	0,25	0,25	0,25

$Y = X^2$. Найти совместный закон распределения СВ X и Y. Доказать, что коэффициент корреляции $\rho(X,Y) = 0$ и СВ X и Y не являются независимыми.

Задание 4. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задается таблицей:

№	$X \setminus Y$	-1	0	1	№	$X \setminus Y$	-2	0	2
1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	2	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$		2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

а) Вычислить математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y.

б) Найти коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$.

в) Выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Совместный закон распределения случайных величин X и Y задается таблицей:

№	$X \setminus Y$	-2	-1	0	№	$X \setminus Y$	0	1	2
1	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$		1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

а) Вычислить математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y.

б) Найти коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$.

в) Выяснить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Задание 2. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений единицы и числом выпадений шестерки при двух независимых подбрасываниях игральной кости.

Тема 11. ВЫБОРКА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, все элементы которой нужно исследовать. Число объектов в генеральной совокупности называется ее *объемом*; при этом предполагается, что генеральная совокупность может быть как конечной, так и бесконечной.

Исследование всей генеральной совокупности часто оказывается затруднительным; тогда исследованию подвергают лишь ее часть, которая называется *выборкой*. Число объектов в выборке называется *объемом выборки*.

Пусть исследуемый признак генеральной совокупности описывается случайной величиной X, и пусть из генеральной совокупности сделана выборка объема *n*. Тогда элементы этой выборки $x_1, x_2, \dots, x_l$, называемые *вариантами выборки*, представляют собой значения случайной величины *X*.

Для статистической обработки результатов выборки нужно построить вариационный ряд; для этого, прежде всего, производят *ранжирование* выборки, т. е. упорядочивание вариант $x_1, x_2, \dots, x_l$ по возрастанию. Затем для каждой варианты x_i вычисляют ее *частоту* m_i, т. е. количество раз, которое эта варианта встретилась в выборке. После этого для каждой варианты находят *относительную частоту* $w_i = \frac{m_i}{n}$. Далее для каждого числа *x* определим *накопленную частоту*m_x – количество вариант в данной выборке, оказавшихся меньше этого числа *x*: $m_x = \sum_{x_i<x} m_i$, а также *накопленную относительную частоту*: $w_x = \sum_{x_i<x} w_i$. Таблица, в первой строке которой расположены варианты в порядке возрастания их значений, а во второй, третьей, четвертой и пятой – соответствующие им частоты, относительные частоты, накопленные частоты и накопленные относительные частоты соответственно, называется *вариационным рядом*. Вариационный ряд называется:

- *дискретным*, если он представляет собой выборку значений дискретной случайной величины;
- *интервальным*, если он представляет собой выборку значений непрерывной случайной величины.

Для построения интервального вариационного ряда множество значений вариант разбивают на несколько полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$; с этой целью сначала по формуле Стерджерса определяют количество интервалов: $k = 1 + 1{,}4 \cdot \ln n$, а затем находят длину каждого интервала: $\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$. В этом случае частота m_i для каждого полуинтервала (a_i, a_{i+1}) вычисляется как количество вариант, попавших в этот полуинтервал.

Для наглядности используют также графические изображения вариационных рядов в виде полигона, гистограммы и кумулянты.

Для дискретного вариационного ряда *полигон* представляет собой ломаную линию, соединяющую точки плоскости с координатами (x_i, m_i), а для интервального – ломаную, проходящую через точки (c_i, m_i), где $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ – середины полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$.

Гистограмма используется только для представления интервальных вариационных рядов и представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[a_i, a_{i+1}]$, а высоты равны частотам m_i соответствующих полуинтервалов.

Для дискретного вариационного ряда *кумулянта* представляет собой ломаную линию, соединяющую точки плоскости с координатами (x_i, m_{x_i}), а для интервального – ломаную, проходящую через точки (a_i, m_{a_i}).

Эмпирической функцией распределения для дискретного ряда называется функция $F_n(x) = w_x$, значение которой в каждой точке *x* равно накопленной частоте. Для дискретного вариационного ряда эмпирическая функция распределения является кусочно-постоянной; график же эмпирической функции распределения для интервального вариационного ряда состоит из горизонтального луча, уходящего влево от точки $(a_1, 0)$, ломаной, соединяющей точки(a_i, w_{a_i}), и горизонтального луча, уходящего вправо от точки $(a_{k+1}, 1)$.

Основными характеристиками вариационного ряда являются выборочное среднее и выборочная дисперсия. Для дискретного вариационного ряда *выборочное среднее* вычисляется по формуле

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_l m_l}{m_1 + m_2 + \cdots + m_l}$$

или, что то же самое,

$$\overline{x_B} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_l w_l;$$

для интервального – по формуле

$$\overline{x_B} = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_l w_l,$$

где $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ – как и выше, середины полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$.

Выборочная дисперсия для дискретного вариационного ряда вычисляется по формуле

$$D_B = (x_1 - \overline{x_B})^2 w_1 + (x_2 - \overline{x_B})^2 w_2 + \cdots + (x_l - \overline{x_B})^2 w_l,$$

а для интервального – по формуле

$$D_B = (c_1 - \overline{x_B})^2 w_1 + (c_2 - \overline{x_B})^2 w_2 + \cdots + (c_l - \overline{x_B})^2 w_l.$$

Для практических вычислений более удобна формула

$$D_B = \overline{x^2} - (\overline{x_B})^2,$$

где $\overline{x^2}$ для дискретного вариационного рядавычисляется по формуле

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 m_1 + x_2^2 m_2 + \cdots + x_l^2 m_l}{m_1 + m_2 + \cdots + m_l},$$

а для интервального – по формуле

$$\overline{x^2} = \frac{c_1^2 m_1 + c_2^2 m_2 + \cdots + c_l^2 m_l}{m_1 + m_2 + \cdots + m_l}.$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Из генеральной совокупности сделана выборка, в которой исследуемый признак принял следующие значения: 0, 2, 1, 2, 5, 2, 7, 3, 2, 1, 1, 15, 5, 3, 4, 4, 1, 7, 8, 1, 13, 2, 11, 15, 2, 4, 2, 1, 3, 6, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 1, 3, 3, 1, 1, 4, 4, 1, 5. Построить дискретный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задание 2. Имеется выборка значений случайной величины *X* размера обуви, проданной за день в магазине: 39, 41, 40, 42, 41, 40, 42, 44, 40, 43, 42, 41, 43, 39, 42, 41, 42, 39, 41, 37, 43, 41, 38, 43, 42, 41, 40, 41, 38, 44, 40, 39, 41, 40, 42, 40, 41, 42, 40, 43, 38, 39, 41, 41, 42. Построить дискретный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задание 3. Результаты измерений отклонений от номинала диаметров подшипников (в мкм) дали следующие значения: –1,752; –0,291; –0,933; 0,450; 0,512; –1,256; 1,701; –0,634; 0,720; 0,490; 1,531; –0,433; 1,409; 1,730; 0,266; –0,058; 0,248; –0,095; –1,488; –0,361; 0,415; –1,382; 0,129; –0,361; 0,087; 0,329; 0,086; 0,130; –0,244; –0,882; 0,318; –1,087; 0,899; 1,028; –1,304; 0,349; –0,293; –0,883; -0,056; 0,757; –0,059; –0,539; –0,078; –0,229; 0,194; 1,084; –0,318; 0,367; –0,992; 0,529. Построить интервальный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задание 4. Время (в минутах) ожидания водителем зеленого света на перекрестке представлено случайной выборкой: 0,000; 0,001; 0,003; 0,012; 0,044; 0,156; 0,534; 0,802; 0,007; 0,822; 0,873; 0,838; 0,170; 0,476; 0,322; 0,648; 0,991; 0,107; 0,726; 0,393; 0,827; 0,419; 0,071; 0,659; 0,309; 0,927; 0,778; 0,327; 0,961; 0,826; 0,308; 0,414; 0,707; 0,515; 0,729; 0,742; 0,884; 0,632; 0,835; 0,318; 0,394; 0,502; 0,471; 0,306; 0,600; 0,846; 0,678; 0,454; 0,623; 0,648. Построить интервальный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Из генеральной совокупности сделана выборка, в которой исследуемый признак принял следующие значения: –10, –9, –9, –8, –2, –6, 1, 6, –5, 6, 7, 6, –6, 0, –3, 3, 9, 7, 4, –2, 7, –1, –8, 3, –3, 8, 5, –3, 9, 6, –3, –1, 4, 0, 0, –3, 2, 6, 3, 0, 2, –2, 3, 7, 1, –3, 4, –9, 1, 5. Построить дискретный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задание 2. Имеется выборка значений случайной величины X–оценок на экзамене по высшей математике: 3, 5, 4, 4, 6, 4, 1, 3, 8, 4, 5, 4, 6, 10, 9, 5, 4, 3, 1, 6, 4, 10, 7, 4, 4, 8, 5, 5, 4, 6. Построить дискретный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задание 3. При обследовании диаметров карданных валов автомобиля, выпускаемых заводом, были зафиксированы следующие отклонения от номинала (в мкм): –8,760; –1,455; –4,655; –2,550; 2,560; –1,645; 0,425; 0,650; –1,220; –4,410; –6,280; 8,550; 3,170; 0,360; 2,450; 1,590; –5,435; 4,495; 5,140; –6,520; 7,655; –2,215; 7,045; 8,650;–1,330; 1,745; –1,460; –4,415; 0,280; –3,785; –4,790; 1,240; –0,475; –7,440; –1,805; –0,295; –2,695; –0,390; 1,145; 0,970; 2,075; –6,910; 0,645; –11,805; –5,435; –5,420; 1,590; 1,835; 2,645; –4,960. Построить интервальный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Задание 4. Интервал движения поездов метро составляет 2 минуты. Время (в минутах) ожидания пассажиром поезда представлено случайной выборкой: 0,010; 1,002; 0,007; 0,325; 1,009; 0,312; 1,068; 1,624; 0,014; 1,045; 1,747; 0,677; 0,741; 0,352; 1,645; 1,207; 0,981; 0,614; 1,452; 0,287; 1,654; 0,138; 1,143; 1,317; 0,218; 1,853; 0,555; 0,653; 0,922; 1,653; 1,317; 0,828; 0,413; 1,030; 0,759; 1,483; 0,769; 1,265; 0,669; 0,635; 1,787; 1,004; 1,541; 0,612; 1,270; 1,692; 0,356; 0,908; 0,245; 1,295. Построить интервальный вариационный ряд, полигон, кумулянту; записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график; найти среднее выборочное и выборочную дисперсию.

Тема 12. ТОЧЕЧНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предположим, что исследуется некоторый числовой признак *X* имеющейся генеральной совокупности, для чего из этой генеральной совокупности сделана выборка, в которой признак *X* принял значения $x_1, x_2, \dots, x_l$, встретившиеся соответственно $m_1, m_2, \dots, m_l$ раз. Пусть распределение этого признака *X* задается вероятностями $P(x_i,\theta)$ (для дискретной случайной величины) или плотностью вероятности $P(x,\theta)$ (для непрерывной случайной величины), которые зависят от неизвестного параметра θ.

Оценкой $\overline{\theta_n}$ параметра θ называется любая функция от значений выборки $\overline{\theta_n} = \overline{\theta_n}(x_1, x_2, \dots, x_l)$. Здесь индекс *n* означает, что рассматриваемая оценка зависит от объема выборки *n*. Заметим, что сам параметр θ (его значение) является некоторым постоянным (неслучайным) числом, а оценка $\overline{\theta_n}$ представляет собой случайную величину.

Ясно, что оценку $\overline{\theta_n}$ следует выбирать таким образом, чтобы ее значения как можно точнее отражали значение неизвестного параметра θ.

Оценка $\overline{\theta_n}$ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно значению неизвестного параметра θ: $M\left(\overline{\theta_n}\right) = \theta$.

Если это требование не выполняется, то в среднем оценка $\overline{\theta_n}$ будет всегда давать значение θ с некоторым отклонением. Для несмещенных же оценок возможность появления систематической ошибки при оценке параметра θ устраняется.

Оценка $\overline{\theta_n}$ зависит от объема выборки *n*, и при ее удачном построении естественно ожидать, что при больших*n* ее значение приближается к истинному значению параметра θ.

Если для любого ε>0 справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{\theta_n} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

то оценка $\overline{\theta_n}$ называется *состоятельной*.

Это условие означает, что при больших n оценка $\overline{\theta_n}$ практически достоверно сколь угодно мало отличается от истинного значения параметра θ.

Показателем качества несмещенной оценки является ее дисперсия. Несмещенная оценка $\overline{\theta_n}$ называется *эффективной*, если ее дисперсия является наименьшей среди дисперсий всех возможных оценок параметра θ, вычисленных по одному и тому же объему выборки n.

В качестве точечной оценки математического ожидания исследуемого признака X, как правило, рассматривается выборочная средняя $\overline{x_B}$; эта оценка является несмещенной, эффективной и состоятельной. Для точечного оценивания дисперсии признака X часто используют выборочную дисперсию D_B; однако эта оценка является смещенной. В качестве же несмещенной точечной оценки дисперсии рассматривается исправленная выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{D_B(m_1 + m_2 + \cdots + m_l)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_l - 1}$$

или, что то же самое,

$$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x_B})^2 m_1 + (x_2-\overline{x_B})^2 m_2 + \cdots + (x_l-\overline{x_B})^2 m_l}{m_1+m_2+\cdots+m_l-1}.$$

Обе оценки D_B и s^2 являются состоятельными.

Предположим теперь, что вид распределения исследуемого признака X известен, но неизвестны значения параметров этого распределения, и требуется по результатам выборки найти точечные оценки этих параметров. При вычислении таких оценок можно использовать метод максимального правдоподобия, а также метод моментов. Суть метода максимального правдоподобия для дискретных законов распределения состоит в следующем. Если вероятность появления возможного значения $X=x$ выражается формулой $P(X = x) = f(x,\theta)$, где θ – единственный параметр данного распределения, то составляется функция правдоподобия $L(\theta) = f(x_1,\theta)^{m_1} \cdot f(x_2,\theta)^{m_2} \cdot \cdots \cdot f(x_l,\theta)^{m_l}$, для которой затем находят точку максимума θ^*. С этой целью вычисляют производную функции $y=L(\theta)$, приравнивают эту производную к нулю и решают получившееся уравнение. Часто бывает удобным рассматривать не саму функцию правдоподобия $y=L(\theta)$, а натуральный логарифм от нее, т. е. функцию $y = \ln\big(L(\theta)\big) = m_1 \ln\big(f(x_1,\theta)\big) + m_2 \ln\big(f(x_2,\theta)\big) + \cdots + m_l \ln\big(f(x_l,\theta)\big)$ и приравнивать к нулю ее производную, т. е. искомая точечная оценка параметра θ находится как корень уравнения

$$\frac{m_1}{f(x_1,\theta)} \cdot \frac{df(x_1,\theta)}{d\theta} + \frac{m_2}{f(x_2,\theta)} \cdot \frac{df(x_2,\theta)}{d\theta} + \cdots + \frac{m_l}{f(x_l,\theta)} \cdot \frac{df(x_l,\theta)}{d\theta} = 0.$$

Если же рассматриваемое распределение имеет несколько параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$, т. е. вероятность появления возможного значения $X=x$ выражается формулой $P(X = x) = f(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$, то функция правдоподобия $L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = f(x_1, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)^{m_1} \cdot \cdots \cdot f(x_l, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)^{m_l}$ зависит от k переменных, и тогда для вычисления точечных оценок параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$

нужно решить систему уравнений, получающихся при приравнивании к нулю всех частных производных функции правдоподобия или всех частных производных логарифма этой функции. В частности, для нахождения оценок двух параметров θ_1, θ_2 нужно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{n_1}{f(x_1,\theta_1,\theta_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1,\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} + \cdots + \frac{n_m}{f(x_m,\theta_1,\theta_2)} \cdot \frac{\partial f(x_m,\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1} = 0; \\ \frac{n_1}{f(x_1,\theta_1,\theta_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1,\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} + \cdots + \frac{n_m}{f(x_m,\theta_1,\theta_2)} \cdot \frac{\partial f(x_m,\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2} = 0. \end{cases}$$

В случае непрерывного распределения исследуемого признака X генеральной совокупности функция правдоподобия $y=L(\theta)$ (или $y = L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$) строится аналогично с той лишь разницей, что в качестве функции $y = f(x,\theta)$(или $y = f(x, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$) рассматривается соответствующая плотность распределения.

Метод моментов состоит в следующем. Если требуется вычислить точечную оценку только одного параметра θ рассматриваемого распределения, то искомая оценка находится как корень уравнения $g(\theta) = \overline{x_B}$, где функция $y = g(\theta)$ берется из формулы $M(X) = g(\theta)$ вычисления математического ожидания для этого распределения. Если же нужно получить оценки двух параметров θ_1, θ_2, то их находят как решение системы уравнений $\begin{cases} g(\theta_1, \theta_2) = \overline{x_B} \\ h(\theta_1, \theta_2) = D_B \end{cases}$, где функции $y = g(\theta_1, \theta_2)$ и $y = h(\theta_1, \theta_2)$ берутся соответственно из формул $M(X) = g(\theta_1, \theta_2)$ и $D(X) = h(\theta_1, \theta_2)$ вычисления математического ожидания и дисперсии для этого распределения. Напомним, что $\overline{x_B}$ и D_B обозначают выборочную среднюю и выборочную дисперсию соответственно.

С помощью указанных выше методов получаются следующие формулы для вычисления точечных оценок параметров некоторых законов распределения.

Биномиальное распределение (заметим, что ниже через n обозначен один из параметров биномиального распределения; его не следует путать с объемом выборки, который выше был обозначен тем же символом):

- если параметр n известен и требуется оценить параметр p, то эта оценка имеет вид $p^* = \frac{\overline{x_B}}{n}$;
- если параметр p известен, и требуется оценить параметр n, то эта оценка имеет вид $n^* = \frac{\overline{x_B}}{p}$;
- если нужно оценить оба параметра p и n, то эти оценки имеют вид $p^* = 1 - \frac{D_B}{\overline{x_B}}$, $n^* = \frac{(\overline{x_B})^2}{\overline{x_B} - D_B}$.

Распределение Пуассона: $\lambda^* = \overline{x_B}$.

Геометрическое распределение: $p^* = \frac{1}{\overline{x_B}}$.

Равномерное распределение: $a^* = \overline{x_B} - \sqrt{3D_B}$, $b^* = \overline{x_B} + \sqrt{3D_B}$.

Нормальное распределение: $a^* = \overline{x_B},\ \sigma^* = \sqrt{D_B}$.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Случайная величина X – число появлений события A в независимых испытаниях – имеет биномиальное распределение. Результаты проведения 10 опытов, состоящих из одинакового количества испытаний, отражены в следующей таблице (x_i – количество появлений события A в одном опыте, n_i – количество опытов, в которых событие A появилось x_i раз):

x_i	0	1	2	3
n_i	3	4	2	1

Найти точечную оценку неизвестных параметров биномиального распределения.

Задание 2. Случайная величина X – число семян сорняков в пробе зерна – имеет распределение Пуассона. В таблице приведено распределение семян сорняков в 1000 проб зерна (x_i – количество семян сорняков в одной пробе, n_i – количество проб, содержащих x_i семян сорняков):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Найти точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона.

Задание 3. Случайная величина X – число поврежденных стеклянных изделий в одном контейнере – имеет распределение Пуассона. В таблице приведено распределение числа поврежденных изделий в 500 контейнерах (x_i – количество поврежденных изделий в одном контейнере, n_i – количество контейнеров, содержащих x_i поврежденных изделий):

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	199	169	87	31	9	3	1	1

Найти точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона.

Задание 4. Случайная величина X – время безотказной работы элемента – имеет показательное распределение. В таблице приведено эмпирическое распределение среднего времени работы элементов (x_i –время работы в часах, n_i – количество элементов, проработавших x_i часов):

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
n_i	133	45	15	4	2	1

Найти точечную оценку неизвестного параметра показательного распределения.

Задание 5. Для проверки качества изготавливаемых заводом предохранителей тестовым испытаниям подвергли 500 случайно отобранных предохранителей. Из них 451 перегорели при первом же тестовом скачке напряжения, 44 – при втором, 4 – при третьем, а 1 – при четвертом. Считая, что количество скачков напряжения, потребовавшихся для перегорания предохранителя, имеет геометрическое распределение, найти точечную оценку неизвестного параметра этого распределения.

Задание 6. Случайная величина X – время ожидания пассажиром поезда в метров в «час пик»– имеет равномерное распределение. В таблице приведено эмпирическое распределение времени ожидания поезда (x_i – время ожидания в секундах, n_i – количество пассажиров, ожидавших поезд x_i секунд):

x_i	0	4	8	12	16	20	24	28	32
n_i	23	20	28	19	21	25	26	22	17
x_i	36	40	44	48	52	56	60	64	68
n_i	20	18	24	27	19	25	17	22	24

Найти точечные оценки неизвестных параметров равномерного распределения.

Задание 7. Случайная величина X – отклонение размера изделия от номинала – имеет нормальное распределение. В таблице приведено эмпирическое распределение отклонения размера изделия от номинала (x_i – отклонение в миллиметрах, n_i – количество изделий, имеющих отклонение x_i):

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Найти точечные оценки неизвестных параметров нормального распределения.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Случайная величина X – число появлений события A в независимых испытаниях – имеет биномиальное распределение. Результаты проведения 12 опытов по 7 испытаний в каждом опыте отражены в следующей таблице (x_i – количество появлений события A в одном опыте, n_i – количество опытов, в которых событие A появилось x_i раз):

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	1	1	2	5	2

Найти точечную оценку неизвестного параметра биномиального распределения.

Задание 2. Случайная величина X – число нестандартных изделий в партии изделий – имеет распределение Пуассона. В таблице приведено распределение нестандартных изделий в партиях (x_i – количество нестандартных изделий в одной партии, n_i – количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Найти точечную оценку неизвестного параметра распределения Пуассона.

Задание 3. Случайная величина X – время безотказной работы элемента – имеет показательное распределение. В таблице приведено эмпирическое распределение среднего времени работы элементов (x_i –время работы в часах, n_i – количество элементов, проработавших x_i часов):

x_i	3	7	11	15	19	23
n_i	267	89	31	7	4	2

Найти точечную оценку неизвестного параметра показательного распределения.

Задание 4. Для проверки качества изготавливаемых заводом пожарных извещателей тестовым испытаниям подвергли 500 случайно отобранных извещателей. Из них 184 перегорели при первом же испытании, 44 – при втором, 1 – при третьем и 1 – при четвертом. Считая, что количество испытаний, потребовавшихся для срабатывания извещателя, имеет геометрическое распределение, найти точечную оценку вероятности срабатывания извещателя при определенном уровне задымления помещения.

Задание 5. Случайная величина X – ошибка измерения дальности радиодальномером – имеет равномерное распределение. В таблице приведено эмпирическое распределение средней ошибки (x_i –ошибка, n_i – количество измерений, имеющих ошибку x_i):

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

Найти точечные оценки неизвестных параметров равномерного распределения.

Задание 6. Случайная величина X – дневная выработка одного рабочего на земляных работах – имеет нормальное распределение. В таблице приведено эмпирическое распределение дневной выработки (x_i –дневная выработка в кубометрах грунта, n_i – количество рабочих, имеющих дневную выработку x_i):

x_i	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
n_i	4	6	9	14	15	17	14	13	10	8	3

Найти точечные оценки неизвестных параметров нормального распределения.

Тема 13. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть исследуемый признак X генеральной совокупности распределен нормально, при этом значение параметра a неизвестно, а значение параметра σ известно. Требуется при заданной надежности γ по результатам сделанной выборки найти интервальную оценку (т. е. доверительный интервал) для параметра a. Этот интервал имеет вид:

$$\overline{x_B} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n – объем сделанной выборки, $\overline{x_B}$ – выборочное среднее, а значение t определяется по таблице значений функции Лапласа Φ_0 (см. Приложения, таблица 2) исходя из условия $\Phi_0(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Если же значения обоих параметров a и σ нормального распределения признака X неизвестны, то доверительный интервал для параметра a при заданной надежности γ строится следующим образом:

$$\overline{x_B} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},$$

где $s = \sqrt{s^2}$ – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, а значение t_γ находится в специальной таблице по заданной надежности γ и объему выборки n (см. Приложения, таблица 4).

Доверительный интервал для неизвестного параметра σ нормального распределения строится следующим образом:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

где s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, вычисленное по результатам выборки, а значение q находится в специальной таблице по заданной надежности γ и объему выборки n (см. Приложения, таблица 5).

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака генеральной совокупности, если генеральная дисперсия равна 16, объем выборки равен 16, а выборочное среднее равно 10,2.

Задание 2. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы всей партии, если известно, что генеральное среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы равно 40 ч. Предполагается, что продолжительность горения ламп распределена нормально.

Задание 3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочному среднему будет равна 0,3, если генеральная совокупность распределена нормально, а ее среднее квадратическое отклонение равно 1,2.

Задание 4. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	–2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности.

Задание 5. Произведено 12 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерений оказалось равным 0,6. Найти точность прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Задание 6. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же неизвестной вероятностью p. Найти доверительный интервал для оценки этой вероятности p с надежностью 0,95, если в 400 испытаниях событие A появилось 5 раз.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания нормально распределенного признака генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение равно 5, объем выборки равен 25, а выборочное среднее равно 16,8.

Задание 2. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочному среднему будет равна 0,2, если генеральная совокупность распределена нормально, а ее среднее квадратическое отклонение равно 1,5.

Задание 3. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	–0,5	–0,4	–0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание нормально распределенного признака генеральной совокупности.

Задание 4. Произведено 10 измерений одним прибором (без систематической ошибки) некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерений оказалось равным 0,8. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Задание 5. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с одной и той же неизвестной вероятностью p. Найти доверительный интервал для оценки этой вероятности p с надежностью 0,95, если в 300 испытаниях событие A появилось 250 раз.

Тема 14. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ЗНАЧЕНИЯХ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть закон распределения признака X генеральной совокупности известен, но неизвестны некоторые параметры этого распределения, и пусть из данной генеральной совокупности сделана выборка. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о значении какого-либо параметра данного закона распределения. В каждом конкретном случае такая проверка осуществляется по-своему. Рассмотрим некоторые из этих случаев.

А. Проверка гипотезы о равенстве друг другу дисперсий двух нормально распределенных генеральных совокупностей.

Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности X и Y, дисперсии которых $D(X)$ и $D(Y)$ неизвестны, и пусть из этих генеральных совокупностей сделаны выборки объемов n_x и n_y соответственно, по результатам которых вычислены исправленные выборочные дисперсии s^2_x и s^2_y. Для определенности будем предполагать, что $s^2_x > s^2_y$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ друг другу. В зависимости от выбора конкурирующей гипотезы рассматривают два способа такой проверки.

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве генеральных дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ друг другу; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $D(X)>D(Y)$. По результатам выборок вычисляется наблюдаемое значение критерия $F_{набл} = \dfrac{s_x^2}{s_y^2}$; по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (см. Приложения, таблица 8) для заданного уровня значимости α и количеств степеней свободы $k_1=n_x-1$, $k_2=n_y-1$ определяем критическое значение критерия $F_{кр}=F(\alpha, k_1, k_2)$. Если $F_{набл}>F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $F_{набл}<F_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве генеральных дисперсий $D(X)$ и $D(Y)$ друг другу; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $D(X)\neq D(Y)$. По результатам выборок вычисляется наблюдаемое значение критерия $F_{набл} = \dfrac{s_x^2}{s_y^2}$; по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора для заданного уровня значимости α и количеств степеней свободы $k_1=n_x-1$, $k_2=n_y-1$ определяем критическое значение критерия $F_{кр}=F(\alpha/2, k_1, k_2)$. Если $F_{набл}>F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $F_{набл}<F_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Б. Проверка гипотезы о равенстве конкретному значению дисперсии нормально распределенной генеральной совокупности.

Пусть имеется нормально распределенная генеральная совокупность X, дисперсия $D(X)$ которой неизвестна, и пусть из этой генеральной совокупности сделана выборка объема n, по результатам которой вычислена исправленная выборочная дисперсия s^2, причем есть основания полагать, что дисперсия $D(X)$ может быть равна некоторому конкретному числу σ_0^2. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве генеральной дисперсии

$D(X)$ этому числу σ_0^2. В зависимости от выбора конкурирующей гипотезы рассматривают три способа такой проверки.

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве дисперсии $D(X)$ числу σ_0^2; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $D(X) > \sigma_0^2$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$; по таблице критических точек распределения χ^2(см. Приложения, таблица 6) для заданного уровня значимости α и количества степеней свободы $k=n-1$ определяем критическое значение критерия $\chi^2_{кр}=\chi^2(\alpha, k)$. Если $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве дисперсии $D(X)$ числу σ_0^2; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $D(X) < \sigma_0^2$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$; по таблице критических точек распределения χ^2 для заданного уровня значимости α и количества степеней свободы $k=n-1$ определяем критическое значение критерия $\chi^2_{кр}= \chi^2(1-\alpha, k)$. Если $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

в) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве дисперсии $D(X)$ числу σ_0^2; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $D(X) \neq \sigma_0^2$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$; по таблице критических точек распределения χ^2 для заданного уровня значимости α и количества степеней свободы $k=n-1$ определяем два критических значения критерия $\chi^2_{кр\ лев}=\chi^2(1-\alpha/2, k)$ и $\chi^2_{кр\ прав}=X^2(\alpha/2, k)$. Если $\chi^2_{набл}>\chi^2_{кр\ прав}$ или $\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр\ лев}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $\chi^2_{кр\ лев}<\chi^2_{набл}<\chi^2_{кр\ прав}$, то нулевая гипотеза принимается.

В. Проверка гипотезы о равенстве друг другу математических ожиданий двух нормально распределенных генеральных совокупностей.

Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности X и Y, математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$ которых неизвестны, а дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$ известны, и пусть из этих генеральных совокупностей сделаны выборки объемов $n_x>30$ и $n_y>30$ соответственно, по результатам которых вычислены выборочные средние $\overline{x_B}$ и $\overline{y_B}$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ друг другу. В зависимости от выбора конкурирующей гипотезы рассматривают три способа такой проверки:

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ друг другу; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X) \neq M(Y)$. По результатам выборок вычисляется наблюдаемое значение критерия $z_{набл} = \dfrac{\overline{x_B} - \overline{y_B}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n_x} + \dfrac{D(Y)}{n_y}}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 (см. Приложения, таблица2) определяем критическое значение критерия $z_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(z_{кр})=(1-\alpha)/2$. Если $|z_{набл}|>z_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $|z_{набл}|<z_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ друг другу; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X)>M(Y)$. По результатам выборок вычисляется наблюдаемое значение критерия $z_{набл} = \dfrac{\overline{x_B} - \overline{y_B}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n_x} + \dfrac{D(Y)}{n_y}}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 определяем критическое значение критерия $z_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(z_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Если $z_{набл}>z_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $z_{набл}<z_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

в) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$ друг другу; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X)<M(Y)$. По результатам выборок вычисляется наблюдаемое значение критерия $z_{набл} = \dfrac{\overline{x_B} - \overline{y_B}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n_x} + \dfrac{D(Y)}{n_y}}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 определяем критическое значение критерия $z_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(z_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Если $z_{набл}<-z_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $z_{набл}>-z_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Г. Проверка гипотезы о равенстве конкретному значению математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности в случае, когда генеральная дисперсия известна.

Пусть имеется нормально распределенная генеральная совокупность X, математическое ожидание $M(X)$ которой неизвестно, а дисперсия $D(X)$ известна, и пусть из этой генеральной совокупности сделана выборка объема n, по результатам которой вычислена выборочная средняя $\overline{x_B}$, причем есть основания полагать, что математическое ожидание $M(X)$ может быть равно некоторому конкретному числу a_0. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве математического ожидания $M(X)$ этому числу a_0. В зависимости от выбора конкурирующей гипотезы рассматривают три способа такой проверки:

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математического ожидания $M(X)$ числу a_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X) \neq a_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $U_{набл} = \dfrac{(\overline{x_B} - a_0)\sqrt{n}}{\sqrt{D(X)}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 (см. Приложения, таблица 2) определяем критическое значение критерия $U_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(U_{кр})=(1-\alpha)/2$. Если $|U_{набл}|>U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $|U_{набл}|<U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математического ожидания $M(X)$ числу a_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X)>a_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $U_{набл} = \dfrac{(\overline{x_B} - a_0)\sqrt{n}}{\sqrt{D(X)}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 определяем критическое значение критерия $U_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(U_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Если $U_{набл}>U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $U_{набл}<U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

в) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математического ожидания $M(X)$ числу a_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X)<a_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $U_{набл} = \dfrac{(\overline{x_B} - a_0)\sqrt{n}}{\sqrt{D(X)}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 определяем критическое значение критерия $U_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(U_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Если $U_{набл}<-U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $U_{набл}>-U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Д. Проверка гипотезы о равенстве конкретному значению математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности в случае, когда генеральная дисперсия неизвестна.

Пусть имеется нормально распределенная генеральная совокупность X, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ которой неизвестны, и пусть из этой генеральной совокупности сделана выборка объема n, по результатам которой вычислены выборочная средняя $\overline{x_B}$ и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение s, причем есть основания полагать, что математическое ожидание $M(X)$ может быть равно некоторому конкретному числу a_0. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве математического ожидания $M(X)$ этому числу a_0. В зависимости от выбора конкурирующей гипотезы рассматривают три способа такой проверки.

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математического ожидания $M(X)$ числу a_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X) \neq a_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $t_{набл}=\frac{(\overline{x_B}-a_0)\sqrt{n}}{s}$; по таблице критических точек распределения Стьюдента (см. Приложения, таблица 7) для заданного уровня значимости α и количества степеней свободы $k=n-1$ определяем критическое значение критерия $t_{кр}$: $t_{кр}=t(\alpha, k)$, причем α рассматривается вверху этой таблицы. Если $|t_{набл}|>t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $|t_{набл}|<t_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математического ожидания $M(X)$ числу a_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X)>a_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $t_{набл}=\frac{(\overline{x_B}-a_0)\sqrt{n}}{s}$; по таблице критических точек распределения Стьюдента для заданного уровня значимости α и количества степеней свободы $k=n-1$ определяем критическое значение критерия $t_{кр}$: $t_{кр}=t(\alpha, k)$, причем α рассматривается внизу этой таблицы. Если $t_{набл}>t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $t_{набл}<t_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

в) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве математического ожидания $M(X)$ числу a_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $M(X)<a_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $t_{набл}=\frac{(\overline{x_B}-a_0)\sqrt{n}}{s}$; по таблице критических точек распределения Стьюдента для заданного уровня значимости α и количества степеней свободы $k=n-1$ определяем критическое значение критерия $t_{кр}$: $t_{кр}=t(\alpha, k)$, причем α рассматривается внизу этой таблицы. Если $t_{набл}<-t_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $t_{набл}>-t_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Е. Проверка гипотезы о равенстве конкретному значению вероятности события.

Пусть вероятность p некоторого события A во всех независимых испытаниях одинакова, но неизвестна, и пусть проведено n независимых испытаний, в которых событие A появилось m раз. Есть основания полагать, что вероятность p равна некоторому конкретному числу p_0. Требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о равенстве вероятности p этому числу p_0. В зависимости от выбора конкурирующей гипотезы рассматривают три способа такой проверки.

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве вероятности p числу p_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $p\neq p_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $U_{набл}=\frac{(\frac{m}{n}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}$, где $q_0=1-p_0$; по таблице значений функции

Лапласа Φ_0 (см. Приложения, таблица 2) определяем критическое значение критерия $U_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(U_{кр})=(1-\alpha)/2$. Если $|U_{набл}|>U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $|U_{набл}|<U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве вероятности p числу p_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $p>p_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $U_{набл}=\dfrac{(\frac{m}{n}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 определяем критическое значение критерия $U_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(U_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Если $U_{набл}>U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $U_{набл}<U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

в) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвигается гипотеза о равенстве вероятности p числу p_0; в качестве конкурирующей гипотезы H_1 выдвигается гипотеза о том, что $p<p_0$. По результатам выборки вычисляется наблюдаемое значение критерия $U_{набл}=\dfrac{(\frac{m}{n}-p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0q_0}}$; по таблице значений функции Лапласа Φ_0 определяем критическое значение критерия $U_{кр}$, исходя из условия: $\Phi_0(U_{кр})=(1-2\alpha)/2$. Если $U_{набл}<-U_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается; если же $U_{набл}>-U_{кр}$, то нулевая гипотеза принимается.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Двумя методами проведены измерения одной и той же физической величины. Получены следующие результаты: а) для первого метода 9,6; 10,0; 9,8; 10,2; 10,6; б) для второго метода 10,4; 9,7; 10,0; 10,3. Можно ли при уровне значимости 0,1 считать, что эти методы обеспечивают одинаковую точность измерений, если результаты измерений распределены нормально?

Задание 2. Для проверки эффективности нового лекарства были отобраны две случайные группы по 15 человек, страдающих гриппом. При применении старого лекарства средний срок выздоровления составлял 11 дней с выборочной дисперсией 3 дня^2, при применении нового – 8 дней с выборочной дисперсией 4 дня^2. Проверить на уровне 0,99 гипотезу о преимуществе нового лекарства.

Задание 3. Из нормально распределенной генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	10,1	10,3	10,6	11,2	11,5	11,8	12,0
n_i	1	3	7	10	6	3	1

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве генеральной дисперсии числу 0,18.

Задание 4. Из двух генеральных совокупностей с дисперсиями 80 и 100 извлечены выборки с объемами 40 и 50, по которым найдены выборочные средние 130 и 140 соответственно. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о равенстве генеральных средних.

Задание 5. В двух фирмах, выпускающих детское питание, производилась оценка качества продукции. При проверке 30 единиц продукции первой фирмы средняя сумма баллов оказалась равной 52; при проверке 36 единиц продукции второй фирмы средняя сумма баллов оказалась равной 52. Считая дисперсию балльной оценки равной 12, определить на уровне значимости 0,05, какая фирма выпускает лучшую продукцию.

Задание 6. Установлено, что средняя масса одной таблетки сильнодействующего лекарства должна быть равна 0,5 мг. Выборочная проверка 121 таблетки полученной партии лекарства показала, что средняя масса таблетки равна 0,53. При уровне значимости 0,01 проверить гипотезу о пригодности данной партии лекарства. Многократными предварительными опытами было установлено, что масса таблеток распределена нормально со средним квадратическим отклонением 0,11 мг.

Задание 7. Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, равен 35 мм. Измерения случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

x_i	34,8	34,9	35,0	35,1	35,3
n_i	2	3	4	6	5

При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о стандартности изделий.

Задание 8. Партия изделий принимается, если вероятность того, что изделие окажется бракованным, не превышает 0,02. Среди случайно отобранных 480 изделий оказалось 12 бракованных. При уровне значимости 0,05 выяснить, можно ли принять партию.

Задание 9. В прошлом году доля бракованных изделий, выпускаемых предприятием, была равна 0,04. В этом году было проверено 300 изделий, из которых 95 оказались бракованными. Можно ли на уровне значимости 0,01 считать, что качество продукции не изменилось?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Для сравнения точности двух станков-автоматов взяты две пробы (выборки). В результате измерения контролируемого размера отобранных изделий получены следующие результаты: а) для первого станка 1,11; 1,12; 1,18; 1,22; 1,33; 1,35; 1,36; 1,38; б) для второго станка 1,08; 1,10; 1,12; 1,14; 1,15; 1,25; 1,36; 1,38; 1,40; 1,42. Можно ли при уровне значимости 0,1 считать, что эти станки обладают одинаковой точностью, если размеры изделий распределены нормально?

Задание 2. В результате длительного хронометража времени сборки узла различными сборщиками установлено, что дисперсия этого времени равна 2 мин^2. Результаты наблюдений за работой новичка таковы:

Время сборки узла (мин)	56	58	60	62	64
Частота	1	4	10	3	2

Можно ли при уровне значимости 0,05 считать, что новичок работает в ритме работы всего цеха (в том смысле, что дисперсия затрачиваемого им времени существенно не отличается от дисперсии времени других сборщиков)?

Задание 3. По независимым выборкам объемов 30 и 40 найдены средние массы 130 г и 125 г изделий, изготовленных на двух разных станках. Генеральные дисперсии известны: 60 г^2 и 80 г^2. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве генеральных средних, если масса изделий распределена нормально.

Задание 4. В результате проверки 10 продавцов одной из торговых точек города были обнаружены недовесы со средним значением 150 г и выборочной дисперсией 2500 г^2. В другой точке проверялись 15 продавцов; средний недовес составил 125 г, а выборочная дисперсия – 1600 г^2. На уровне значимости 0,05 выяснить, в какой точке предпочтительнее покупать продукцию.

Задание 5. По техническим условиям средняя прочность троса составляет 2000 кг. В результате испытаний 20 образцов троса было установлено, что средняя прочность равна 1955 кг при средней ошибке 25 кг. Удовлетворяет ли трос техническим условиям на уровне значимости 0,05?

Задание 6. Завод рассылает рекламные каталоги возможным заказчикам. Как показал опыт, вероятность того, что организация, получившая каталог, закажет рекламируемую продукцию, равна 0,08. Завод разослал 1000 каталогов новой улучшенной формы и получил 100 заказов. Можно ли при уровне значимости0,05 считать, что новая форма рекламы эффективнее первой?

Тема 15. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА

Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, причем закон распределения ее исследуемого признака X неизвестен, и пусть из этой генеральной совокупности сделана выборка

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

По результатам этой выборки требуется определить по заданному уровню значимости α закон распределения генеральной совокупности. Если объем выборки n достаточно велик, а все группы значений признака достаточно многочисленны, то с этой целью используется критерий согласия Пирсона, суть которого состоит в следующем.

1. Вычисляется объем выборки $n=n_1+n_2+\ldots+n_m$; если $n\geq 50$, то критерий согласия Пирсона можно применять, в противном случае – нет.

2. Если какая-либо из наблюдаемых частот n_i окажется меньше 5, то соответствующую группу значений признака присоединяют к какой-либо соседней группе.

3. На координатной плоскости строятся точки с координатами $(x_i; n_i)$; исходя из взаимного расположения этих точек выдвигаются нулевая гипотеза H_0 о конкретном законе распределения признака X генеральной совокупности и конкурирующая гипотеза H_1 о том, что признак X генеральной совокупности распределен по другому закону.

4. Если в качестве нулевой гипотезы выдвинута гипотеза о нормальном распределении признака X, то числовая ось $(-\infty; +\infty)$ разбивается на частичные интервалы $(-\infty; z_1)$, $[z_1; z_2)$, $[z_2; z_3)$, …, $[z_i; z_{i+1})$, …, $[z_{m-1}; +\infty)$; если же в качестве нулевой гипотезы выдвинута гипотеза о показательном распределении признака X, то положительная полуось $[0;+\infty)$ разбивается на частичные интервалы $(0; z_1)$, $[z_1; z_2)$, $[z_2; z_3)$, …, $[z_i; z_{i+1})$, …, $[z_{m-1}; +\infty)$. Здесь $z_i=(x_i + x_{i+1})/2$ – середины промежутков между соседними вариантами x_i. Если в качестве нулевой гипотезы выдвинута либо гипотеза о распределении Пуассона, либо гипотеза о равномерном распределении, то указанные выше частичные интервалы не вводятся.

5. Вычисляются теоретические вероятности $p_i^{\text{т}}$, соответствующие вариантам x_i или частичным интервалам $[z_i; z_{i+1})$. Заметим при этом, что для каждого закона распределения, выдвинутого в качестве нулевой гипотезы, способ вычисления теоретических вероятностей свой; все эти способы приведем ниже.

6. Вычисляются теоретические частоты $n_i^{\text{т}}=n\cdot p_i^{\text{т}}$.

7. Вычисляется наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{\text{набл}}=n_1^2/n_1^{\text{т}}+n_2^2/n_2^{\text{т}}+\ldots+n_m^2/n_m^{\text{т}}-n$.

8. В таблице критических точек распределения χ^2(см. Приложения, таблица 6) по заданному уровню значимости α и количеству степеней свободы $k=m-r-1$, где r – количество параметров распределения, указанного в нулевой гипотезе H_0, а m – количество вариант x_i (количество частичных интервалов $[z_i; z_{i+1}]$) находится критическое значение критерия $\chi^2_{\text{кр}}$.

9. Если $\chi^2_{\text{набл}}> \chi^2_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается; если же $\chi^2_{\text{набл}}< \chi^2_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза H_0 принимается.

Таков в общем алгоритм использования критерия согласия Пирсона для определения закона распределения исследуемого признака генеральной совокупности по результатам выборки. Осталось только указать правила, по которым в пункте 5 данного алгоритма вычисляются теоретические вероятности $p_i^{\text{т}}$.

а) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвинута гипотеза о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона. В этом случае сначала методом моментов по выборке найдем точечную оценку параметра λ распределения Пуассона: $\lambda^* = \overline{x_B}$; затем вычислим теоретические вероятности, используя формулу закона распределения Пуассона:

$$p_i^T = \frac{(\lambda^*)^{x_i} \cdot e^{-\lambda^*}}{x_i!} = \frac{\overline{x_B}^{x_i} \cdot e^{-\overline{x_B}}}{x_i!}.$$

б) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвинута гипотеза о равномерном распределении генеральной совокупности. В этом случае теоретические вероятности вычисляются по формуле: $p_i^{\text{т}}=1/m$.

в) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвинута гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности. В этом случае сначала методом моментов по выборке найдем точечные оценки параметров нормального распределения: $a^* = \overline{x_B}$, $\sigma^* = \sqrt{D_B}$; затем вычислим теоретические вероятности, используя формулу для вычисления вероятности того, что нормально распределенная случайная величина примет значение из заданного числового промежутка:

$$p_i^T = P(z_i \le X \le z_{i+1}) = \Phi_0\left(\frac{z_{i+1} - a^*}{\sigma^*}\right) - \Phi_0\left(\frac{z_i - a^*}{\sigma^*}\right) = \Phi_0\left(\frac{z_{i+1} - \overline{x_B}}{\sqrt{D_B}}\right) - \Phi_0\left(\frac{z_i - \overline{x_B}}{\sqrt{D_B}}\right).$$

г) В качестве нулевой гипотезы H_0 выдвинута гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности. В этом случае сначала методом моментов по выборке найдем точечную оценку параметра λ показательного распределения: $\lambda^* = \frac{1}{\overline{x_B}}$; затем вычислим теоретические вероятности, используя формулу для вычисления вероятности того, что показательно распределенная случайная величина примет значение из заданного числового промежутка:

$$p_i^T = P(z_i \le X \le z_{i+1}) = e^{-\lambda^* z_i} - e^{-\lambda^* z_{i+1}} = e^{-\frac{z_i}{\overline{x_B}}} - e^{-\frac{z_{i+1}}{\overline{x_B}}}.$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Используя критерий согласия Пирсона, на уровне значимости 0,05 определить закон распределения генеральной совокупности, из которой сделана следующая выборка:

а)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	403	367	175	41	8	4	2

б)

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

в)

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	5	10	26	25	31	26	22	24	19	8	6

г)

x_i	2,3	7,3	12,3	17,3	22,3	27,3
n_i	131	46	16	4	2	1

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Используя критерий согласия Пирсона, по уровню значимости 0,05 определить закон распределения генеральной совокупности, из которой сделана следующая выборка:

а)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	130	44	21	3	2

б)

x_i	7	9	12	13	15	17	20	22	23	25
n_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

в)

x_i	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
n_i	5	10	26	25	31	26	22	24	19	8	6

г)

x_i	2,3	7,3	12,3	17,3	22,3	27,3
n_i	131	46	16	4	2	1

Тема 16. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Пусть имеются нормально распределенные генеральные совокупности X_1, X_2, …, X_l, из которых сделаны независимые выборки объемами m_1, m_2, …, m_l соответственно. Требуется при заданном уровне значимости проверить гипотезу о равенстве всех генеральных средних, т. е. гипотезу о том, что $M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_l)$. Для этого применяется следующий алгоритм.

1. Вычисляются выборочные средние $\overline{x_{B_1}}, \overline{x_{B_2}}, \ldots, \overline{x_{B_l}}$ для каждой выборки отдельно, а также общая выборочная средняя $\overline{x_{B_{общ}}}$ для объединенной выборки; при этом можно пользоваться формулой

$$\overline{x_{B_{общ}}} = (m_1\overline{x_{B_1}} + m_2\overline{x_{B_2}} + \ldots + m_l\overline{x_{B_l}})/(m_1 + m_2 + \ldots + m_l).$$

2. Вычисляются исправленные выборочные дисперсии s_j^2 для каждой выборки отдельно, а также общая исправленная выборочная дисперсия $s_{общ}^2$ для объединенной выборки и внутригрупповая исправленная выборочная дисперсия $s_{внгр}^2 = (m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2 + \ldots + m_l s_l^2)/(m_1 + m_2 + \ldots + m_l)$.

3. Вычисляется наблюдаемое значение критерия $F_{набл} = s_{общ}^2 / s_{внгр}^2$.

4. По таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора (Приложения, таблица 8) определяется критическое значение критерия $F_{кр}=F(\alpha, k_1, k_2)$, где $k_1=m_1+m_2+\ldots+m_l-1$, $k_2=m_1+m_2+\ldots+m_l-l$. Если $F_{набл}>F_{кр}$, то гипотеза о равенстве всех генеральных средних отвергается, если же $F_{набл}<F_{кр}$, то эта гипотеза принимается.

Задания для работы в аудитории

Задание 1. С целью исследования степени влияния минеральных удобрений на урожайность некоторой сельскохозяйственной культуры проведены полевые испытания. Результаты испытаний (ц/га) приведены в таблице. При уровне значимости 0,05 выяснить, значимо ли влияние вида вносимого удобрения на урожайность данной культуры. Предполагается, что при каждом виде удобрений урожайность культуры распределена нормально.

а)

Номер испытания	Вид удобрения		
	Азотное	Фосфорное	Калийное
1	38	20	21
2	36	24	22
3	35	26	31
4	31	30	34

б)

Номер испытания	Вид удобрения			
	Азотное	Фосфорное	Калийное	Комплексное
1	38	32	35	41
2	38	39	40	42
3	42	41	–	44
4	42	–	–	40
5	40	–	–	–

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. С целью исследования влияния рекламы на товарооборот в нескольких магазинах проведены рекламные акции. Результаты исследований приведены в таблице. При уровне значимости 0,05 выяснить, значимо ли влияние вида рекламы на товарооборот при условии, что для каждого вида рекламы товарооборот распределен нормально.

а)

Номер магазина	Вид рекламы		
	По радио	На плакатах	На экране
1	27	22	24
2	23	21	20
3	29	36	26
4	29	37	30

б)

Номер магазина	Вид рекламы			
	По радио	На плакатах	На экране	Рекламные агенты
1	110	180	60	200
2	120	240	150	210
3	130	240	200	250
4	170	300	220	280
5	200	350	240	300
6	280	–	260	300
7	–	–	340	400
8	–	–	420	–

Тема 17. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ВЫБОРОЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Пусть из двумерной нормально распределенной генеральной совокупности (X,Y) сделана выборка (в виде таблицы); требуется при заданном уровне значимости α выяснить тесноту линейной зависимости между генеральными совокупностями X и Y и, если эта зависимость имеется и достаточно тесна, записать выборочные уравнения линейной регрессии. Решение этой задачи производится по следующему алгоритму.

1. Вычисляются частоты n_{x_i}каждой варианты x_i и частоты n_{y_j}каждой варианты y_j (для этого складываются все частоты n_{xy}из соответствующего столбца (строки) данной таблицы); сумма всех частот n_{x_i} дает объем выборки n.

2. Находятся выборочные средние $\overline{x_B} = \frac{n_{x_1}x_1+n_{x_2}x_2+\cdots+n_{x_k}x_k}{n}$,

$$\overline{y_B} = \frac{n_{y_1}y_1+n_{y_2}y_2+\cdots+n_{y_l}y_l}{n} \text{ и } \overline{(xy)_B} = \frac{n_{x_1y_1}x_1y_1+n_{x_1y_2}x_1y_2+\cdots+n_{x_ky_l}x_ky_l}{n}.$$

3. Вычисляются выборочные средние квадратические отклонения

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{n_{x_1}{x_1}^2+n_{x_2}{x_2}^2+\cdots+n_{x_k}{x_k}^2}{n}-\overline{x_B}^2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{n_{y_1}{y_1}^2+n_{y_2}{y_2}^2+\cdots+n_{y_l}{y_l}^2}{n}-\overline{y_B}^2}.$$

4. Находится выборочный коэффициент корреляции

$$r_B = \frac{\overline{(xy)_B}-\overline{x_B}\cdot\overline{y_B}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}.$$

5. Выясняется, значимо ли коэффициент корреляции отличается от нуля. Для этого вычисляется наблюдаемое значение критерия $t_{\text{набл}} = \frac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-{r_B}^2}}$; затем по таблице критических точек распределения Стьюдента (Приложения, таблица 7) определяется критическое значение критерия $t_{\text{кр}} = t(\alpha; k)$, где α – заданный уровень значимости (рассматривается вверху таблицы), а $k = n - 2$– количество степеней свободы. Если $|t_{\text{набл}}| < t_{\text{кр}}$, то гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции принимается (т. е. выборочный коэффициент корреляции незначимо отличается от нуля); в противном случае эта гипотеза отвергается (т. е. выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля).

6. Если выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, то можно записать выборочные уравнения линейной регрессии:

- уравнение регрессии *Y* на *X*:

$$\overline{Y_X} - \overline{y} = r_B \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \overline{x_B});$$

- уравнение регрессии *X* на *Y*:

$$\overline{X_Y} - \overline{x} = r_B \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \overline{y_B}).$$

Задания для работы в аудитории

Задание 1. Из двумерной нормально распределенной генеральной совокупности (*X*;*Y*) сделана выборка. При уровне значимости α определить тесноту линейной зависимости генеральных совокупностей *X* и *Y* и в случае необходимости записать выборочные уравнения линейной регрессии.

а) α=0,05;

Y	*X*					
	2	7	12	17	22	27
110	2	4				
120		6	2			
Y	*X*					
	2	7	12	17	22	27
130			3	50	2	
140			1	10	6	
150				4	7	3

б) α=0,01;

Y	*X*						
	12	22	32	42	52	62	72
65					10	6	2
70						4	1
75			2	7	4	2	

Y	X						
	12	22	32	42	52	62	72
80			1	25			
85		4	6		1		
90	1	5	8	2			
95	1	2	6				

в) α=0,01;

Y	X					
	100	105	110	115	120	125
35	4		6	7	8	3
45	5	5	2	10		
55	6	7			5	3
65		6	5	4		2
75	5	1	2	4	3	

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Из двумерной нормально распределенной генеральной совокупности (X;Y) сделана выборка. При уровне значимости α определить тесноту линейной зависимости генеральных совокупностей X и Y и в случае необходимости записать выборочные уравнения линейной регрессии.

а) α=0,05;

Y	X					
	2	6	10	14	18	22
10	1	3				
20	1	7	2			
30		1	3	49	2	
40			2	10	5	
50				4	7	3

б) α=0,01;

Y	X						
	4	7	10	13	16	19	22
15					11	6	1
20					1	4	1
25				9	4	1	
30			2	24			
35		3	6	1	1		
40		6	8	2			
45	1	3	5				

в) α=0,01;

Y	X					
	1	5	9	13	17	20
5	4	6		7	4	3
11	5	5	2	8		2
17		7	6		5	3
23	6		5	4		
29	5	1	2	6	7	

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Задание 1.

1.1. Задумано трехзначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется случайно названное трехзначное число.

1.2. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6.

1.3. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что разность выпавших очков равна 3.

1.4. Найти вероятность того, что на трех брошенных игральных костях выпадет разное количество очков.

1.5. Найти вероятность того, что на трех брошенных игральных костях выпадет одинаковое количество очков.

1.6. В урне 7 белых шаров, 5 синих и 10 красных. Найти вероятность того, что среди четырех наугад вынутых шаров окажется ровно два белых.

1.7. В коробке находятся 7 одинаковых карточек, на каждой из которых напечатана она из букв А, К, К, С, Т, Т, У. Из коробки наугад вынимаются 4 карточки. Найти вероятность того, что из вынутых карточек можно составить слово КУСТ.

1.8. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, и, помня лишь, что из этих трех цифр никакие две, стоящие в номере телефона рядом, не являются одинаковыми, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

1.9. В урне 6 белых шаров, 8 синих и 11 красных. Найти вероятность того, что среди пяти наугад вынутых шаров окажется ровно три синих.

1.10. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 15.

1.11. В урне 9 белых шаров, 6 синих и 10 красных. Найти вероятность того, что среди пяти наугад вынутых шаров окажется ровно один белый и ровно два синих.

1.12. Из 60 вопросов случайным образом составляется 30 тестовых заданий (по два вопроса в каждом задании). Из этих 60 вопросов студент не знает 25. Найти вероятность того, что студент получит полностью неизвестное ему задание.

1.13. В коробке находятся 6 одинаковых карточек, на каждой из которых напечатана она из букв А, Д, Д, О, М, М. Из коробки наугад вынимаются 3 карточки. Найти вероятность того, что из вынутых карточек можно составить слово ДОМ.

1.14. На книжной полке стоят 25 книг: 6 книг по 10 тыс. руб. каждая, 4 – по 15 тыс. руб., 7 – по 17 тыс. руб. и 8 – по 20 тыс. руб. Найти вероятность того, что две наугад взятые книги имеют совокупную цену, не превышающую 30 тыс. руб.

1.15. Выбранный покупателем товар стоит 40 тыс. руб. В бумажнике у покупателя имеется 7 купюр по 5 тыс. руб., 5 купюр по 10 тыс. руб., 3 купюры по 20 тыс. руб. и 2 купюры по 50 тыс. руб. Найти вероятность того, что двух наугад вынутых из бумажника купюр достаточно, чтобы расплатиться за выбранный товар.

1.16. В коробке 36 жетонов с номерами от 1 до 36. Из коробки случайным образом вынимают пять жетонов. Найти вероятность того, что среди вынутых окажутся номера 15, 25, 35.

1.17. В коробке 20 левых и 17 правых перчаток. Из коробки случайным образом вынимают 4 перчатки. Найти вероятность того, что из вынутых перчаток можно составить 2 пары.

1.18. Из полной колоды карт (52 карты) вынули карту – трефовую восьмерку. Затем из той же колоды вынули случайным образом еще две карты. Найти вероятность того, что обе эти карты имеют ту же масть, что и первая карта и большее достоинство.

1.19. Из полной колоды карт (52 карты) случайным образом вынули 3 карты. Найти вероятность того, что все вынутые карты одной масти.

1.20. Из неполной колоды карт (36 карт) случайным образом вынули 2 карты. Найти вероятность того, что обе вынутые карты одного достоинства.

1.21. В группе 15 девушек и 9 юношей. По журналу случайным образом отбирают 6 человек. Найти вероятность того, что девушек и юношей отобрали поровну.

1.22. В студенческой группе, состоящей из 27 человек, только 6 студентов-отличников знают все 30 экзаменационных билетов. Среди этих 30 билетов 4 самых трудных билета знают только отличники. Найти вероятность того, что все трудные билеты достанутся только отличникам.

1.23. В коробке находится 20 яблочных карамелек, 18 апельсиновых и 22 лимонных. Из коробки наугад вынимается 15 карамелек. Найти вероятность того, что карамелек разных видов вынуто поровну.

1.24. В урне находится 10 белых, 8 синих и 4 красных шара. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых 6 шаров ровно 3 белых.

1.25. На пятиместную скамейку случайным образом садятся 5 человек. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

1.26. За круглый стол случайным образом на пять стульев рассаживаются 5 человек. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом?

1.27. Семь пассажиров поднимаются на лифте, который останавливается на 10 этажах. Какова вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах?

1.28. В пяти ящиках случайным образом размещают 5 шаров, так, что попадание шара в любой из ящиков является равновозможным. Найти вероятность того, что ни один из ящиков не окажется пустым.

1.29. Восемь книг случайным образом расставляются на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

1.30. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков. Найти вероятность того, что наугад вынутый кубик имеет две окрашенные грани.

1.31. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 одинаковых кубиков. Найти вероятность того, что наугад вынутый кубик имеет одну окрашенную грань.

Задание 2. Из N акционерных обществ (АО) n являются банкротами. Гражданин приобрел по одной акции каждого из m АО. Какова вероятность того, что среди купленных акций ровно k окажутся акциями АО-банкротов, если

№	N	n	m	k	№	N	n	m	k
1	20	4	5	2	17	20	5	4	3
2	30	5	5	3	18	16	4	6	2
3	20	5	4	2	19	18	4	4	2
4	25	6	5	3	20	14	2	3	1
5	15	4	3	2	21	10	3	3	2
6	20	6	4	3	22	16	4	3	2
7	30	4	3	2	23	21	5	4	3
8	16	4	5	2	24	26	6	4	2
9	18	6	5	3	25	32	7	5	3
10	12	5	4	2	26	34	8	6	4
11	30	6	5	3	27	31	5	5	3
12	26	4	6	2	28	25	4	3	2
№	N	n	m	k	№	N	n	m	k
13	24	5	5	3	29	24	4	4	3
14	22	6	4	2	30	28	5	5	2
15	20	5	3	2	31	24	4	3	2
16	18	3	5	3	32	15	2	3	2

Задание 3. В лотерее n билетов, из которых k выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея на руках m билетов, если

№	n	k	m	№	n	k	m
1	20	6	2	17	23	6	3
2	18	8	3	18	24	8	2
3	16	6	2	19	30	9	3

№	n	k	m	№	n	k	m
4	14	5	3	20	22	6	3
5	15	5	2	21	26	8	2
6	17	6	3	22	28	7	3
7	18	8	4	23	30	10	2
8	20	7	2	24	26	6	2
9	12	4	3	25	28	10	3
10	10	4	2	26	14	5	2
11	18	6	3	27	18	5	3
12	22	8	2	28	16	4	2
13	24	10	3	29	17	3	2
14	26	6	2	30	19	6	3
15	30	8	3	31	15	5	3
16	25	7	2	32	17	6	2

Задание 4.

4.1. В помещении установлены 4 автономных пожарных извещателя. Вероятности отказа в случае пожара для этих извещателей соответственно равны 0,1, 0,2, 0,15, 0,05. Найти вероятность того, что в случае пожара сработают хотя бы 2 извещателя.

4.2. В помещении установлены 4 автономных пожарных извещателя. Вероятности отказа в случае пожара для этих извещателей соответственно равны 0,15, 0,25, 0,1, 0,05. Найти вероятность того, что в случае пожара сработают хотя бы 2 извещателя.

4.3. В помещении установлены 4 автономных пожарных извещателя. Вероятности отказа в случае пожара для этих извещателей соответственно равны 0,05, 0,02, 0,15, 0,15. Найти вероятность того, что в случае пожара сработает хотя бы один извещатель.

4.4. В помещении установлены 3 автономных пожарных извещателя. Вероятности отказа в случае пожара для этих извещателей соответственно равны 0,1, 0,15, 0,05. Найти вероятность того, что в случае пожара сработают хотя бы 2 извещателя.

4.5. В помещении установлены 3 автономных пожарных извещателя. Вероятности отказа в случае пожара для этих извещателей соответственно равны 0,08, 0,1, 0,05. Найти вероятность того, что в случае пожара сработает хотя бы 1 извещатель.

4.6. В помещении установлены 3 автономных пожарных извещателя. Вероятности того, что в случае пожара эти извещатели сработают, соответственно равны 0,9, 0,8, 0,75. Найти вероятность того, что в случае пожара откажет хотя бы один извещатель.

4.7. Спортсмен сдает нормативы по четырем дисциплинам. Вероятности сдачи спортсменом этих нормативов соответственно равны 0,6, 0,8, 0,7, 0,9. Найти вероятность того, что спортсмен сдаст хотя бы два норматива.

4.8. Четыре спортсмена – участники эстафеты 4х100м сдают норматив. Вероятность сдачи этого норматива спортсменами в отдельности соответственно равны 0,85, 0,8, 0,75, 0,7. Найти вероятность того, что сдадут норматив хотя бы два спортсмена.

4.9. Спортсмен сдает нормативы по трем спортивным дисциплинам. Вероятности сдачи спортсменом этих нормативов соответственно равны 0,8, 0,75, 0,9. Для получения зачета достаточно сдать два норматива. Найти вероятность того, что спортсмен получит зачет.

4.10. В первом ящике 20 деталей, из них 16 стандартных; во втором – 22 детали, из них 18 стандартных; в третьем – 25 деталей, из них 15 стандартных. Из каждого ящика наугад взяли по одной детали. Найти вероятность того, что среди взятых деталей хотя бы две бракованных.

4.11. В первом ящике 25 деталей, из них 6 нестандартных; во втором – 22 детали, из них 5 нестандартных; в третьем – 24 детали, из них 4 нестандартных. Из каждого ящика наугад взяли по одной детали. Найти вероятность того, что среди взятых деталей хотя бы одна стандартная.

4.12. В первом ящике 10 деталей, из них 8 стандартных; во втором – 16 деталей, из них 12 стандартных; в третьем – 20 деталей, из них 15 стандартных; в четвертом – 12 деталей, из них 10 стандартных. Из каждого ящика наугад взяли по одной детали. Найти вероятность того, что среди взятых деталей хотя бы две бракованных.

4.13. Четыре стрелка стреляют в одну мишень. Вероятности попадания стрелками в мишень соответственно равны 0,75, 0,6, 0,8, 0,85. Найти вероятность поражения мишени.

4.14. Четыре стрелка стреляют в одну мишень. Вероятности попадания стрелками в мишень соответственно равны 0,7, 0,65, 0,8, 0,9. Найти вероятность того, что в мишень попадут хотя бы два стрелка.

4.15. Четыре стрелка стреляют в одну мишень. Вероятности промаха для каждого стрелка соответственно равны 0,15, 0,2, 0,3, 0,1. Найти вероятность поражения мишени.

4.16. Четыре стрелка стреляют в одну мишень. Вероятности промаха для каждого стрелка соответственно равны 0,1, 0,25, 0,3, 0,2. Найти вероятность того, что в мишень попадут только два стрелка.

4.17. Четыре стрелка стреляют в одну мишень. Вероятности промаха для каждого стрелка соответственно равны 0,1, 0,25, 0,15, 0,35. Найти вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок.

4.18. Четыре стрелка стреляют в одну мишень. Вероятности промаха для каждого стрелка соответственно равны 0,15, 0,25, 0,1, 0,2. Найти вероятность того, что в мишень попадут хотя бы три стрелка.

4.19. Для защиты электроприбора от скачка напряжения в электрическую цепь последовательно включены 4 предохранителя. Вероятности того, что эти предохранители перегорят в случае скачка напряжения соответственно равны

0,9, 0,7, 0,85, 0,8. Найти вероятность того, что электроприбор не сгорит в случае скачка напряжения.

4.20. Для защиты электроприбора от скачка напряжения в электрическую цепь последовательно включены 4 предохранителя. Вероятности того, что эти предохранители перегорят в случае скачка напряжения соответственно равны 0,8, 0,75 0,65, 0,7. Найти вероятность того, что в случае скачка напряжения сгорят хотя бы два предохранителя.

4.21. Для защиты электроприбора от скачка напряжения в электрическую цепь последовательно включены 4 предохранителя. Вероятности того, что эти предохранители перегорят в случае скачка напряжения соответственно равны 0,85, 0,75 0,9, 0,7. Найти вероятность того, что в случае скачка напряжения сгорят хотя бы три предохранителя.

4.22. Для защиты электроприбора от скачка напряжения в электрическую цепь последовательно включены 4 предохранителя. Вероятности того, что эти предохранители перегорят в случае скачка напряжения соответственно равны 0,8, 0,75 0,6, 0,85. Найти вероятность того, что в случае скачка напряжения сгорит хотя бы один предохранитель.

4.23. Для защиты электроприбора от скачка напряжения в электрическую цепь последовательно включены 4 предохранителя. Вероятности того, что эти предохранители не перегорят в случае скачка напряжения соответственно равны 0,15, 0,2 0,1, 0,3. Найти вероятность того, что в случае скачка напряжения сгорят только два предохранителя.

4.24. Для защиты электроприбора от скачка напряжения в электрическую цепь последовательно включены 4 предохранителя. Вероятности того, что эти предохранители не перегорят в случае скачка напряжения соответственно равны 0,1, 0,2 0,1, 0,3. Найти вероятность того, что в случае скачка напряжения сгорит только один предохранитель.

4.25. В каждый экзаменационный билет включено 4 вопроса – по одному из четырех различных разделов высшей математики. Студент знает 70 % вопросов из первого раздела, 60 % вопросов из второго раздела, 75 % вопросов из третьего раздела и 80 % вопросов из четвертого раздела. Для сдачи экзамена на положительную оценку достаточно ответить на 2 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на положительную оценку.

4.26. В каждый экзаменационный билет включено 4 вопроса – по одному из четырех различных разделов высшей математики. Студент знает 85 % вопросов из первого раздела, 70 % вопросов из второго раздела, 75 % вопросов из третьего раздела и 65 % вопросов из четвертого раздела. Для сдачи экзамена на положительную оценку достаточно ответить на 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на положительную оценку.

4.27. В каждый экзаменационный билет включено 4 вопроса – по одному из четырех различных разделов высшей математики. Студент не знает 10 % вопросов из первого раздела, 20 % вопросов из второго раздела, 35 % вопросов из третьего раздела и 30 % вопросов из четвертого раздела. Для сдачи экзамена на положительную оценку достаточно ответить на 2 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на положительную оценку.

4.28. В каждый экзаменационный билет включено 3 вопроса – по одному из трех различных разделов высшей математики. Студент не знает 20 % вопросов из первого раздела, 30 % вопросов из второго раздела, 35 % вопросов из третьего раздела и 40 % вопросов из четвертого раздела. Для сдачи экзамена на положительную оценку достаточно ответить на 2 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на положительную оценку.

4.29. В каждый экзаменационный билет включено 5 вопросов – по одному из пяти различных разделов высшей математики. Студент не знает 10 % вопросов из первого раздела, 25 % вопросов из второго раздела, 30 % вопросов из третьего раздела, 35 % вопросов из четвертого раздела и 35 % вопросов из пятого раздела. Для сдачи экзамена на положительную оценку достаточно ответить на 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на положительную оценку.

4.30. В каждый экзаменационный билет включено 5 вопросов – по одному из пяти различных разделов высшей математики. Студент не знает 20 % вопросов из первого раздела, 25 % вопросов из второго раздела, 35 % вопросов из третьего раздела, 40 % вопросов из четвертого раздела и 45 % вопросов из пятого раздела. Для сдачи экзамена на положительную оценку достаточно ответить на 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на положительную оценку.

Задание 5. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n_1 с первого завода, n_2 со второго, n_3 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе p_1, на втором $-p_2$, на третьем – p_3. а) Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным? б) Какова вероятность того, что выбранное качественное изделие изготовлено на i-м заводе, если

№	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	i	№	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	i
1	25	35	40	0,9	0,8	0,7	1	17	15	25	20	0,8	0,7	0,9	3
2	15	25	10	0,8	0,7	0,7	2	18	40	25	35	0,9	0,8	0,8	1
№	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	i	№	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	i
3	40	35	25	0,9	0,7	0,9	3	19	14	26	20	0,8	0,6	0,7	2
4	25	10	15	0,7	0,8	0,9	3	20	18	32	30	0,9	0,8	0,7	3
5	10	20	20	0,9	0,8	0,6	2	21	30	20	10	0,9	0,7	0,8	1
6	40	30	30	0,8	0,8	0,9	1	22	16	24	60	0,9	0,8	0,9	1
7	20	50	30	0,8	0,9	0,8	2	23	30	10	10	0,9	0,7	0,7	2
8	35	35	30	0,7	0,8	0,9	3	24	15	35	50	0,8	0,9	0,8	3
9	15	45	40	0,9	0,8	0,9	1	25	40	20	40	0,8	0,8	0,9	2
10	40	15	45	0,8	0,7	0,8	3	26	10	20	10	0,9	0,8	0,6	1

№	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	i	№	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3	i
11	20	15	15	0,9	0,9	0,8	2	27	35	25	50	0,8	0,7	0,8	3
12	14	26	10	0,8	0,9	0,8	1	28	40	20	40	0,8	0,9	0,8	3
13	16	40	44	0,8	0,9	0,7	1	29	30	40	30	0,9	0,8	0,9	1
14	30	20	50	0,9	0,7	0,7	2	30	10	20	20	0,7	0,9	0,7	2
15	20	10	20	0,8	0,9	0,9	3	31	15	25	10	0,6	0,8	0,7	1
16	25	35	40	0,9	0,8	0,7	2	32	35	45	20	0,8	0,7	0,9	2

Задание 6.

6.1. В ОТК работают 3 контролера. Первый контролер проверяет на стандартность 40 % всех деталей; второй – 35 %, а третий – 25 %. Вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована, для каждого контролера равна соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована.

6.2.В ОТК работают 4 контролера. Первый контролер проверяет на стандартность 20 % всех деталей; второй – 25 %, третий – 35 %. Вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована, для каждого контролера равна соответственно 0,9, 0,6, 0,7 и 0,8. Найти вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована.

6.3. В ОТК работают 4 контролера. Первый контролер проверяет на стандартность 22 % всех деталей; второй – 25 %, третий – 20 %. Вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована, для каждого контролера равна соответственно 0,8, 0,9, 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована.

6.4. В ящике 25 деталей первого завода, 16 деталей второго завода и 30 деталей третьего завода. Вероятность того, что деталь стандартна, для каждого завода соответственно равна 0,7, 0,6, 0,9. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь нестандартна.

6.5. В ящике 22 деталей первого завода, 18 деталей второго завода и 15 деталей третьего завода. Вероятность того, что деталь стандартна, для каждого завода соответственно равна 0,6, 0,75, 0,8. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь нестандартна.

6.6. В ящике 20 деталей первого завода, 19 деталей второго завода и 31 деталей третьего завода. Вероятность того, что деталь стандартна, для каждого завода соответственно равна 0,7, 0,8, 0,6. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь нестандартна.

6.7. В ОТК работают 3 контролера. Первый контролер проверяет на стандартность 45 % всех деталей; второй – 30 %, а третий – 25 %. Вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована, для каждого контролера равна соответственно 0,6, 0,7 и 0,9. Нестандартная деталь была выбракована. Найти вероятность того, что она была проверена вторым контролером.

6.8. В ОТК работают 3 контролера. Первый контролер проверяет на стандартность 32 % всех деталей; второй – 28 %, а третий – 40 %. Вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована, для каждого контролера равна соответственно 0,75, 0,9 и 0,65. Нестандартная деталь была выбракована. Найти вероятность того, что она была проверена первым контролером.

6.9. В ОТК работают 4 контролера. Первый контролер проверяет на стандартность 15 % всех деталей; второй – 27 %, третий – 25 %. Вероятность того, что нестандартная деталь будет выбракована, для каждого контролера равна соответственно 0,9, 0,7, 0,85 и 0,6. Нестандартная деталь была выбракована. Найти вероятность того, что она была проверена третьим контролером.

6.10. В ящике 20 деталей первого завода, 25 деталей второго завода и 28 деталей третьего завода. Вероятность того, что деталь стандартна, для каждого завода соответственно равна 0,9, 0,7, 0,4. Случайно взятая деталь оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем заводе.

6.11. В ящике 33 детали первого завода, 22 детали второго завода и 18 деталей третьего завода. Вероятность того, что деталь стандартна, для каждого завода соответственно равна 0,6, 0,7, 0,85. Случайно взятая деталь оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором заводе.

6.12. В ящике 12 деталей первого завода, 15 деталей второго завода и 18 деталей третьего завода. Вероятность того, что деталь стандартна, для каждого завода соответственно равна 0,85, 0,7, 0,6. Случайно взятая деталь оказалась нестандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом заводе.

6.13. На зачет выносятся задачи по четырем разделам высшей математики, причем 35 % всех задач относятся к первому разделу, 20 % – ко второму, 40 % – к третьему, а остальные – к четвертому. Вероятность того, что студент решит задачу, для каждого раздела соответственно равна 0,4, 0,6, 0,8, 0,3. Найти вероятность того, что студент решит предложенную ему задачу.

6.14. На зачет выносятся задачи по четырем разделам высшей математики, причем 25 % всех задач относятся к первому разделу, 30 % – ко второму, 35 % – к третьему, а остальные – к четвертому. Вероятность того, что студент решит задачу, для каждого раздела соответственно равна 0,7, 0,4, 0,6, 0,3. Найти вероятность того, что студент решит предложенную ему задачу.

6.15. На зачет выносятся задачи по трем разделам высшей математики, причем 37 % всех задач относятся к первому разделу, 30 % – ко второму, а остальные – к третьему. Вероятность того, что студент решит задачу, для каждого раздела соответственно равна 0,8, 0,6, 0,4. Найти вероятность того, что студент решит предложенную ему задачу.

6.16. Три станка-автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер, причем первый автомат производит 20 % всех деталей, второй – 45 %, а третий – все остальные. Вероятность того, что изготовленная автоматом деталь стандартна, для каждого станка-автомата соответственно равна 0,85, 0,6, 0,7. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь бракована.

6.17. Три станка-автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер, причем первый автомат производит 35 % всех деталей, второй – 40 %, а третий – все остальные. Вероятность того, что изготовленная автоматом деталь стандартна, для каждого станка-автомата соответственно равна 0,75, 0,6, 0,9. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь бракована.

6.18. Четыре станка-автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер, причем первый автомат производит 23 % всех деталей, второй – 26 %, третий – 21 %. Вероятность того, что изготовленная автоматом деталь стандартна, для каждого станка-автомата соответственно равна 0,85, 0,7, 0,9, 0,6. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь бракована.

6.19. На зачет выносятся задачи по четырем разделам высшей математики, причем 30 % всех задач относятся к первому разделу, 25 % – ко второму, 35 % – к третьему, а остальные – к четвертому. Вероятность того, что студент решит задачу, для каждого раздела соответственно равна 0,4, 0,8, 0,6, 0,7. Студент решил предложенную ему задачу. Найти вероятность того, что она относится к третьему разделу.

6.20. На зачет выносятся задачи по четырем разделам высшей математики, причем 35 % всех задач относятся к первому разделу, 27 % – ко второму, 22 % – к третьему, а остальные – к четвертому. Вероятность того, что студент решит задачу, для каждого раздела соответственно равна 0,85, 0,7, 0,6, 0,35. Студент решил предложенную ему задачу. Найти вероятность того, что она относится к первому разделу.

6.21. На зачет выносятся задачи по трем разделам высшей математики, причем 34 % всех задач относятся к первому разделу, 40 % – ко второму, а остальные – к третьему. Вероятность того, что студент решит задачу, для каждого раздела соответственно равна 0,75, 0,6, 0,45. Студент решил предложенную ему задачу. Найти вероятность того, что она относится ко второму разделу.

6.22. Три станка-автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер, причем первый автомат производит 20 % всех деталей, второй – 45 %, а третий – все остальные. Вероятность того, что изготовленная автоматом деталь стандартна, для каждого станка-автомата соответственно равна 0,85, 0,6, 0,7. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена первым станком.

6.23. Три станка-автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер, причем первый автомат производит 32 % всех деталей, второй – 43 %, а третий – все остальные. Вероятность того, что изготовленная автоматом деталь стандартна, для каждого станка-автомата соответственвенно равна 0,8, 0,55, 0,65. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена вторым станком.

6.24. Четыре станка-автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер, причем первый автомат производит 20 % всех деталей, второй – 25 %, третий – 22 %. Вероятность того, что изготовленная автоматом деталь стандартна, для каждого станка-автомата соответственно равна 0,95, 0,7, 0,8, 0,6. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она произведена первым станком.

6.25. В первой урне 12 белых, 8 синих и 10 красных шаров, во второй – 9 белых, 15 синих и 6 красных. Из первой урны во вторую случайным образом переложили один шар, после чего из второй урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар синий.

6.26. В первой урне 10 белых, 6 синих и 15 красных шаров, во второй – 11 белых, 14 синих и 8 красных. Из первой урны во вторую случайным образом переложили один шар, после чего из первой урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

6.27. Из всего транспортного потока, проезжающего около АЗС, 33 % составляют легковые автомобили, 46 % – грузовые автомобили, а остальной транспорт – трактора. Вероятность того, что проезжающее транспортное средство потребует заправки, для указанных видов транспорта соответственно равна 0,4, 0,2, 0,3. Найти вероятность того, что проезжающее транспортное средство потребует заправки.

6.28. В первой урне 14 белых, 7 синих и 10 красных шаров, во второй – 8 белых, 12 синих и 5 красных. Из первой урны во вторую случайным образом переложили один шар, после чего из второй урны наугад вынули один шар, оказавшийся красным. Найти вероятность того, что из первой во вторую урну был переложен белый шар.

6.29. В первой урне 16 белых, 10 синих и 11 красных шаров, во второй – 7 белых, 11 синих и 8 красных. Из первой урны во вторую случайным образом переложили один шар, после чего из второй урны наугад вынули один шар, оказавшийся синим. Найти вероятность того, что из первой во вторую урну был переложен красный шар.

6.30. Из всего транспортного потока, проезжающего около АЗС, 70 % составляют легковые автомобили, 20 % – грузовые автомобили, а остальной транспорт – трактора. Вероятность того, что проезжающее транспортное средство потребует заправки, для указанных видов транспорта соответственно равна 0,2, 0,4, 0,3. Проезжающее транспортное средство потребовало заправки. Найти вероятность того, что это грузовой автомобиль.

Задание 7. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из n экзаменов равна p. Найти вероятность успешной сдачи не менее двух экзаменов, если

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
1	4	0,75	9	6	0,8	17	4	0,9	25	5	0,7
2	5	0,5	10	4	0,5	18	5	0,2	26	4	0,25

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
3	6	0,4	11	6	0,7	19	6	0,8	27	3	0,125
4	5	0,75	12	5	0,25	20	5	0,4	28	4	0,375
5	6	0,5	13	5	0,3	21	4	0,1	29	5	0,6
6	4	0,6	14	4	0,8	22	3	0,5	30	3	0,375
7	4	0,7	15	6	0,6	23	4	0,2	31	3	0,625
8	5	0,8	16	6	0,75	24	5	0,9	32	5	0,1

Задание 8.

8.1. Вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна p. Найти вероятность того, что событие A наступит равно k раз, если

№	n	p	k	№	n	p	k
1	243	0,25	50	6	100	0,8	75
2	144	0,8	120	7	100	0,7	70
3	125	0,2	100	8	100	0,2	30
4	2100	0,7	1470	9	2000	0,7	1500
5	100	0,2	20	10	21	0,7	11

8.2. Завод отправил в торговую сеть n изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна p. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено ровно k изделий, если

№	n	p	k	№	n	p	k
1	1000	0,002	2	6	1000	0,001	3
2	100	0,01	4	7	2000	0,005	15
3	500	0,002	3	8	1000	0,004	6
4	1000	0,004	5	9	100	0,06	8
5	1000	0,008	10	10	150	0,06	7

8.3. Всхожесть семян данного растения равна p. Найти вероятность того, что из 500 посаженных семян число проросших будет заключено между n_1 и n_2, если

№	p	n_1	n_2	№	p	n_1	n_2
1	0,45	200	250	7	0,8	380	420
2	0,5	200	300	8	0,85	400	440
№	p	n_1	n_2	№	p	n_1	n_2
3	0,55	250	300	9	0,7	335	365
4	0,6	270	330	10	0,5	210	290
5	0,65	300	350	11	0,4	190	210
6	0,75	350	400	12	0,35	150	200

Задание 9. Найти закон распределения ДСВ X. Вычислить ее среднее квадратическое отклонение. Построить график функции распределения ДСВ X, если

9.1. ДСВ X характеризует число сданных студентом экзаменов, при этом вероятность успешной сдачи первого экзамена равна p_1, второго экзамена – p_2 и

№	p_1	p_2	№	p_1	p_2	№	p_1	p_2	№	p_1	p_2
1	0,9	0,8	3	0,5	0,7	5	0,8	0,7	7	0,9	0,5
2	0,7	0,9	4	0,6	0,9	6	0,6	0,8	8	0,7	0,6

9.2. ДСВ X характеризует число поражений цели при n выстрелах, при этом вероятность поражения цели при одном выстреле равна p и

№	n	p	№	n	p	№	n	p	№	n	p
1	4	0,6	4	4	0,4	7	3	0,2	10	5	0,2
2	3	0,9	5	4	0,8	8	3	1/3	11	4	1/6
3	3	0,8	6	4	1/3	9	4	0,9	12	4	0,24

9.3. ДСВ X характеризует число нестандартных деталей среди k наудачу отобранных, при этом в партии из n деталей содержится m нестандартных деталей и

№	n	m	k	№	n	m	k	№	n	m	k	№	n	m	k
1	11	4	3	4	12	3	2	7	17	5	2	10	20	6	3
2	15	3	2	5	16	4	3	8	18	6	3	11	21	7	2
3	13	3	2	6	14	4	3	9	19	6	2	12	22	7	2

Задание 10. Дана функция распределения АНСВ X

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1, \\ ax^2+bx+c, & \text{если } x_1 < x \le x_2, \\ 1, & \text{если } x > x_2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения АНСВ X, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания значений АНСВ X на отрезок $[\alpha;\beta]$. Построить графики функций распределения и плотности распределения АНСВ X

№	x_1	x_2	a	b	c	α	β	№	x_1	x_2	a	b	c	α	β
1	0	4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0,1	3,2	17	-1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	0,5	0,5
2	0	4	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6}$	0	0	2	18	-1	2	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	0	1

№	x_1	x_2	a	b	c	α	β	№	x_1	x_2	a	b	c	α	β
3	-1	2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1	2	19	-1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	1	0,5	2
4	1	2	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1,1	2,4	20	-0,5	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	5,5
5	0	3	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{33}$	0	0,5	2	21	-0,5	0	1	2,5	1	-1	2
6	0	3	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0	0,5	2	22	-0,5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0,5
7	1	4	$\frac{1}{15}$	0	$-\frac{1}{15}$	0	3	23	-3	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{30}$	1	-2	-1
8	0	2	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	0	0,5	1	24	$-\frac{1}{3}$	0	3	4	1	-1	4
9	1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1,5	3,7	25	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	1	1	4,5
10	0	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	26	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	1	-1	2
11	0	2	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	0	1	27	-2	0,5	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{16}{25}$	-1	0
12	1	3	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0,8	2,5	28	$-\frac{1}{4}$	0	16	8	1	-2	3
13	2	5	$\frac{1}{9}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	1	3	29	4	8	$\frac{1}{48}$	0	$-\frac{1}{3}$	5	21
14	-1	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	0	1	30	3	5	$\frac{1}{16}$	0	$-\frac{9}{16}$	2	6
15	-2	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	31	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{8}$	0	1
16	-2	1	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{9}$	0	0,5	32	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	0	$-\frac{1}{3}$	-3	25

Задание 11.

11.1. ДСВ X имеет распределение Пуассона с параметром, равным 2. Найти вероятность того, что СВ X принимает значение меньшее, чем ее математическое ожидание.

11.2. СВ X имеет распределение Пуассона с параметром, равным 0,9. найти вероятность того, что она принимает положительные значения.

11.3. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1000 денежных единиц. Составить закон распределения случайной величины, характеризующей размер выигрыша при пяти сделанных покупках, найти ее математическое ожидание и дисперсию.

11.4. Банк выдал 100 независимым заемщикам ссуды в размере 100000 у. е. каждому заемщику. Найти математическое ожидание и дисперсию прибыли банка, если с вероятностью 0,8 заемщик возвращает 130000 у. е. и не возвращает ничего с вероятностью 0,2.

11.5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02А.

11.6. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию, интервал движения 5 минут. Считая, что случайная величина X – время ожидания автобуса на остановке имеет равномерное распределение, найти вероятность того, что пассажир, пришедший на остановку, будет ожидать очередной автобус менее 2 минут.

11.7. Шкала рычажных весов, установленных в торговой точке, имеет цену деления 100 г. При измерении массы товара отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность того, что абсолютная ошибка определения массы не превысит величины среднего квадратического отклонения возможных ошибок определения массы?

11.8. Пациенты заходят в кабинет врача каждые 10 минут. Пусть СВ X, характеризующая время ожидания пациентом посещения врача, имеет равномерное распределение. Найти вероятность того, пациент будет ожидать посещения врача менее чем среднее квадратическое отклонение минут.

11.9. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, не превышающая 0,02А.

11.10. Шкала рычажных весов, установленных в торговой точке, имеет цену деления 100 г. При измерении массы товара отсчет делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону. Какова вероятность того, что абсолютная ошибка определения массы заключена в пределах от 0 до 3 $\sigma(X)$?

11.11. Паром для перевозки автомашин через залив подходит к причалу через каждые два часа. Считая, что время прибытия автомашин – случайная величина, имеющая равномерное распределение, найти вероятность того, что время ожидания автомашиной прихода парома не превосходит среднего квадратического отклонения.

11.12. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [2;8]. Найти вероятность попадания значений случайной величины X на отрезок [3;5].

11.13. Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 1 мин. после ухода предыдущего трамвая, но не позднее, чем за 2 мин. до отхода следующего трамвая?

11.14. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более, чем на 20 сек.

11.15. СВ X характеризует время безотказной работы радиоаппаратуры и имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,03$. Найти вероятность того, что радиоаппаратура проработает не менее 100 часов.

11.16. СВ X характеризует время безотказной работы радиоаппаратуры и имеет показательное распределение с параметром λ=0,05. Найти вероятность того, что радиоаппаратура проработает не более 100 часов.

11.17. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является СВ X, имеющей показательное распределение со средним временем ожидания, равным 10 минутам. Найти вероятность того, что автомобиль будет ожидать у бензоколонки не менее 5 минут и не более 15 минут.

11.18. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. СВ X характеризует время в часах ожидания очередной машины контролера и имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 5$. Найти вероятность того, что очередной автомобиль будет ожидать контролера от 5 до 10 минут.

11.19. Время ожидания у бензоколонки автозаправочной станции является СВ X, имеющей показательное распределение со средним временем ожидания, равным 10 минутам. Найти вероятность того, что автомобиль будет ожидать у бензоколонки от 15 до 20 минут.

11.20. Станок-автомат изготавливает втулки, которые удовлетворяют стандарту, если отклонение величины диаметра X от проектного размера по модулю не превышает 0,35 мм. Каково наиболее вероятное число стандартных втулок из 200, если СВ X имеет нормальное распределение с параметром $\sigma = 0,2$ мм.

11.21. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: средняя масса одной коробки равно 1,06 кг. Известно, что только 5 % коробок имеют массу меньше 1 кг. Найти среднее квадратическое отклонение, предполагая, что масса коробок является СВ X, имеющей нормальное распределение.

11.22. На автоматическом токарном станке изготавливаются болты, номинальная длина которых 30 мм. Наблюдаются случайные отклонения от этого размера, имеющие нормальное распределение с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением – 1 мм. При контроле бракуются все болты, размеры которых отличаются от номинального больше, чем на 3 мм. Найти вероятность того, что наудачу выбранный болт будет бракованным.

11.23. В пакете 5 % всех акций отклоняется от средней цены в 120 у. е. более чем на 2 у. е. Считая, что цена акции имеет нормальное распределение, найти, какой процент акций имеет цену в пределах от 119 у. е. до 121 у. е.

11.24. Средний процент выполнения плана некоторыми предприятиями составляет 100 %, среднее квадратическое отклонение – 9 %. Полагая, что выполнение плана этой группой предприятий имеет нормальное распределение, определить процент предприятий, выполняющих план от 110 % до 150 %.

11.25. При определении доли прибыли допускают случайные ошибки, имеющие нормальное распределение со средним квадратическим отклонением 10 у. е. Найти вероятность того, что определение прибыли будет проведено с ошибкой, не превосходящей 15 у. е., если систематические ошибки отсутствуют.

11.26. Деталь, изготовленная станком-автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 1мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному распределению со средним квадратическим отклонением, равным 0,5 мм и математическим ожиданием, равным нулю. Сколько процентов годных деталей изготавливает станок-автомат?

11.27. Изделие считается высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по модулю 3,45 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинала описываются СВ X, имеющей нормальное распределение со средним квадратическим отклонением равным 3 мм и математическим ожиданием равным нулю. Определить среднее число изделий высшего сорта, если изготавливаются 4 изделия.

11.28. Средний процент выполнения плана некоторыми предприятиями составляет 100 %, среднее квадратическое отклонение – 9 %. Полагая, что процент выполнения плана этой группой предприятий имеет нормальное распределение, определить процент предприятий, не выполняющих план.

11.29. Рост призывников, направляемых на службу в армию, является СВ X, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием 170 см и средним квадратическим отклонением 20 см. В церемониальную роту принимаются те юноши, рост которых превышает 185 см. Сколько кандидатов в церемониальную роту может быть отобрано из 100 призывников по этому признаку? Найдите наиболее вероятное количество кандидатов.

11.30. Размер воротничка мужской сорочки, продающейся в магазине, является СВ X, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием 39 и средним квадратическим отклонением 3. Какой процент сорочек размером 40 от общего числа следует заказать магазину?

11.31. Из антропометрической статистики известно, что распределение мужской обуви по размерам является нормальным с математическим ожиданием, равным 42, и средним квадратическим отклонением, равным 2. Какой процент покупателей приобретает обувь 41 размера?

Задание 12. Совместный закон распределения СВ X и Y задается таблицей.

а) Вычислить математические ожидания и дисперсии СВ X и Y.

б) Вычислить коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$.

в) Выяснить, являются ли СВ X и Y независимыми.

№	Числовые данные				№	Числовые данные			
1	*X* \ *Y*	1	3	4	17	*Y* \ *X*	5	7	9
	2	0,16	0,10	0,28		4	0,14	0,15	0,21
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,16	0,20	0,14
2	*X* \ *Y*	2	3	5	18	*Y* \ *X*	1	4	6
	1	0,06	0,18	0,24		3	0,14	0,12	0,13
	4	0,12	0,13	0,27		7	0,13	0,20	0,28
3	*X* \ *Y*	1	2	4	19	*Y* \ *X*	5	8	10
	3	0,12	0,24	0,22		2	0,11	0,13	0,26
	4	0,20	0,15	0,07		6	0,21	0,06	0,23
4	*Y* \ *X*	2	3	4	20	*Y* \ *X*	4	7	9
	1	0,16	0,10	0,28		4	0,22	0,09	0,32
	3	0,14	0,20	0,12		7	0,14	0,17	0,06
5	*Y* \ *X*	2	3	5	21	*Y* \ *X*	8	9	12
	4	0,06	0,18	0,24		1	0,14	0,11	0,18
	6	0,12	0,13	0,27		6	0.23	0,04	0,30
6	*Y* \ *X*	2	3	4	22	*Y* \ *X*	3	6	8
	1	0,16	0,10	0,28		2	0,21	0,07	0,23
	3	0,14	0,20	0,12		8	0,11	0.20	0,18
7	*Y* \ *X*	2	4	5	23	*Y* \ *X*	3	4	7
	1	0,12	0,13	0,24		4	0,15	0,23	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		8	0,21	0,09	0,17
8	*X* \ *Y*	4	5	6	24	*Y* \ *X*	4	5	8
	2	0,06	0,18	0,24		3	0,13	0,14	0,19
	3	0,12	0,13	0,27		5	0,24	0,08	0,22
9	*X* \ *Y*	2	4	5	25	*Y* \ *X*	6	9	12
	1	0,12	0,13	0,24		5	0,23	0,07	0,15
	3	0,18	0,06	0,27		9	0,17	0.20	0,18
10	*X* \ *Y*	1	3	4	26	*Y* \ *X*	5	8	10
	3	0,13	0,24	0,12		2	0,11	0,21	0.14
	6	0,18	0,06	0,27		7	0,20	0,09	0,25
11	*Y* \ *X*	1	3	4	27	*Y* \ *X*	4	7	9
	3	0,13	0,24	0,12		4	0,30	0,12	0,10
	5	0,18	0,06	0,27		10	0,08	0,12	0,28
12	*Y* \ *X*	3	5	6	28	*Y* \ *X*	2	6	9
	1	0,12	0,24	0,22		5	0,21	0,18	0,114
	3	0,20	0,15	0,07		9	0,08	0,14	0,25
13	*Y* \ *X*	4	6	8	29	*Y* \ *X*	4	7	9
	3	0,13	0,08	0,12		2	0,09	0,15	0,16
	5	0,20	0,16	0,31		7	0,17	0,23	0,20
14	*Y* \ *X*	3	4	7	30	*Y* \ *X*	1	4	8
	3	0,30	0,20	0,10		4	0,11	0,24	0,17
	6	0,05	0,12	0,23		8	0,21	0,08	0.19
15	*Y* \ *X*	4	6	8	31	*Y* \ *X*	4	8	14
	2	0,24	0,30	0,05		3	0,12	0,13	0,20
	5	0,10	0,12	0,19		5	0,23	0,12	0,20
16	*Y* \ *X*	3	5	7	32	*Y* \ *X*	2	3	5
	2	0,20	0,13	0,12		3	0,05	0,30	0,24
	4	0,20	0,12	0,23		4	0,19	0,12	0,10

Задание 13. Из генеральной совокупности сделана выборка, содержащаяся в таблице:

№ варианта	Выборка						
1	x_i	1	3	5	7	9	11
	n_i	1	4	14	20	11	5
2	x_i	2	5	8	11	14	17
	n_i	5	8	15	13	6	3
3	x_i	5	7	9	11	13	15
	n_i	5	10	20	15	4	1
4	x_i	3	6	9	12	15	18
	n_i	5	8	16	13	6	2
5	x_i	4	7	10	13	16	19
	n_i	5	11	17	12	4	1
6	x_i	0	3	6	9	12	16
	n_i	3	8	15	13	6	5
7	x_i	2	4	6	8	10	12
	n_i	1	4	7	12	15	11
8	x_i	0	2	4	6	8	10
	n_i	1	4	14	27	9	5
9	x_i	0	4	8	12	16	20
	n_i	1	5	23	16	10	5
10	x_i	3	7	11	15	19	23
	n_i	5	12	18	10	4	1
11	x_i	1	3	5	7	9	11
	n_i	8	20	16	6	4	1
12	x_i	2	5	8	11	14	17
	n_i	5	20	18	7	4	1
13	x_i	0	2	4	6	8	10
	n_i	5	15	20	10	4	1
14	x_i	3	6	9	12	15	18
	n_i	6	20	14	5	4	1
15	x_i	4	7	10	13	16	19
	n_i	5	17	16	7	4	1
16	x_i	3	7	11	15	19	23
	n_i	6	26	13	5	4	1
17	x_i	1	4	7	10	13	16
	n_i	1	4	15	21	12	5
18	x_i	1	2	3	4	5	6
	n_i	14	24	22	16	10	4
19	x_i	2	3	4	5	6	7
	n_i	14	22	20	16	10	3
20	x_i	3	4	5	6	7	8
	n_i	3	7	9	11	12	8
21	x_i	1	2	3	4	5	6
	n_i	5	17	37	30	9	2
22	x_i	2	3	4	5	6	7
	n_i	2	9	30	37	17	5

№ варианта	Выборка						
23	x_i	3	4	5	6	7	8
	n_i	5	20	39	28	7	1
24	x_i	4	5	6	7	8	9
	n_i	5	16	34	31	12	2
25	x_i	5	6	7	8	9	10
	n_i	1	5	29	42	18	5
26	x_i	0	1	2	3	4	5
	n_i	11	21	22	15	8	3
27	x_i	4	5	6	7	8	9
	n_i	8	10	11	10	7	4
28	x_i	5	6	7	8	9	10
	n_i	8	10	11	10	7	4
29	x_i	6	7	8	9	10	11
	n_i	10	12	11	8	5	4
30	x_i	7	8	9	10	11	12
	n_i	12	13	10	7	5	3

При уровне значимости 0,05 выяснить, имеет ли генеральная совокупность: а) нормальное распределение; б) распределение Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов. В 2 т. Т. 2 / А. А. Гусак. – 6-е изд. – Минск : Тетра Системс, 2007. – 448 с.
2. Высшая математика : учеб.-метод. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика / авт.-сост. Т. В. Веремеенко ; под ред. Л. Г. Третьяковой. – 2-е изд., испр. – Минск : ГИУСТ БГУ, 2010. – 130 с.
3. Майоровская, С. В. Элементы высшей математики : пособие для учащихся по специальностям экономического профиля / С. В. Майоровская, О. Н. Поддубная, Л. В. Станишевская. – Минск : Вышэйшая школа, 2010. – 350 с.
4. Рачковский, Н. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Рачковский. – Минск : ГИУСТ БГУ, 2010. – 73 с.
5. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи : учеб. пособие / И. В. Белько, Г. П. Свирид ; под ред. К. К. Кузьмича. – 3-е изд., стер. – Минск : Новое знание, 2007. – 251 с.
6. Браилов, А. В. Сборник задач по курсу «Математика в экономике». В 3 ч. Ч. 3. Теория вероятностей : учеб. пособие / А. В. Браилов, А. С. Солодовников ; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. – М. : Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2010. – 128 с. : ил.
7. Булдык, Г. М. Руководство к решению задач и упражнений по теории вероятностей и математической статистике: для практической и самостоятельной работы студентов экономических специальностей / Г. М. Булдык. – Минск : ФУАинформ, 2009. – 228 с.
8. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием : пособие / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 264 с. : ил.
9. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие / под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 575 с. – (100 лет РЭА им. Г.В. Плеханова).
10. Теория вероятностей. Практикум : учеб. пособие в 2 ч. / Н. В. Лазакович [и др.] ; под ред. Н. В. Лазаковича. – Минск : БГУ, 2011. – Ч. 1. – 147 с.
11. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / А. П. Рябушко. – Минск : Выш. шк., 2006. – 336 с. : ил.
12. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1969. – 328 с.
13. Ежов, И. И. Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – М. : Наука, 1977. – 80 с.
14. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 5-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2000. – 400 с. : ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Окончание таблицы 1

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица 2

Таблица значений функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Окончание таблицы 2

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,1	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,2	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,3	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,4	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,5	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,6	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,7	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,8	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Таблица 3

Таблица значений функции $P(\lambda, k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

λ	***k***									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001

λ	k									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002
2,1	0,1225	0,2572	0,2700	0,1890	0,0992	0,0417	0,0146	0,0044	0,0011	0,0003
2,2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004
2,3	0,1003	0,2306	0,2652	0,2033	0,1169	0,0538	0,0206	0,0068	0,0019	0,0005
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007
2,5	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011
2,7	0,0672	0,1815	0,2450	0,2205	0,1488	0,0804	0,0362	0,0139	0,0047	0,0014
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018
2,9	0,0550	0,1596	0,2314	0,2237	0,1622	0,0940	0,0455	0,0188	0,0068	0,0022
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027
3,1	0,0450	0,1397	0,2165	0,2237	0,1733	0,1075	0,0555	0,0246	0,0095	0,0033
3,2	0,0408	0,1304	0,2087	0,2226	0,1781	0,1140	0,0608	0,0278	0,0111	0,0040
3,3	0,0369	0,1217	0,2008	0,2209	0,1823	0,1203	0,0662	0,0312	0,0129	0,0047
3,4	0,0334	0,1135	0,1929	0,2186	0,1858	0,1264	0,0716	0,0348	0,0148	0,0056
3,5	0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	0,0771	0,0385	0,0169	0,0066
3,6	0,0273	0,0984	0,1771	0,2125	0,1912	0,1377	0,0826	0,0425	0,0191	0,0076
3,7	0,0247	0,0915	0,1692	0,2087	0,1931	0,1429	0,0881	0,0466	0,0215	0,0089
3,8	0,0224	0,0850	0,1615	0,2046	0,1944	0,1477	0,0936	0,0508	0,0241	0,0102
3,9	0,0202	0,0789	0,1539	0,2001	0,1951	0,1522	0,0989	0,0551	0,0269	0,0116
4	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132
4,1	0,0166	0,0679	0,1393	0,1904	0,1951	0,1600	0,1093	0,0640	0,0328	0,0150
4,2	0,0150	0,0630	0,1323	0,1852	0,1944	0,1633	0,1143	0,0686	0,0360	0,0168
4,3	0,0136	0,0583	0,1254	0,1798	0,1933	0,1662	0,1191	0,0732	0,0393	0,0188
4,4	0,0123	0,0540	0,1188	0,1743	0,1917	0,1687	0,1237	0,0778	0,0428	0,0209
4,5	0,0111	0,0500	0,1125	0,1687	0,1898	0,1708	0,1281	0,0824	0,0463	0,0232
4,6	0,0101	0,0462	0,1063	0,1631	0,1875	0,1725	0,1323	0,0869	0,0500	0,0255
4,7	0,0091	0,0427	0,1005	0,1574	0,1849	0,1738	0,1362	0,0914	0,0537	0,0281
4,8	0,0082	0,0395	0,0948	0,1517	0,1820	0,1747	0,1398	0,0959	0,0575	0,0307
4,9	0,0074	0,0365	0,0894	0,1460	0,1789	0,1753	0,1432	0,1002	0,0614	0,0334
5	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363
5,1	0,0061	0,0311	0,0793	0,1348	0,1719	0,1753	0,1490	0,1086	0,0692	0,0392
5,2	0,0055	0,0287	0,0746	0,1293	0,1681	0,1748	0,1515	0,1125	0,0731	0,0423
5,3	0,0050	0,0265	0,0701	0,1239	0,1641	0,1740	0,1537	0,1163	0,0771	0,0454
5,4	0,0045	0,0244	0,0659	0,1185	0,1600	0,1728	0,1555	0,1200	0,0810	0,0486
5,5	0,0041	0,0225	0,0618	0,1133	0,1558	0,1714	0,1571	0,1234	0,0849	0,0519
5,6	0,0037	0,0207	0,0580	0,1082	0,1515	0,1697	0,1584	0,1267	0,0887	0,0552
5,7	0,0033	0,0191	0,0544	0,1033	0,1472	0,1678	0,1594	0,1298	0,0925	0,0586
5,8	0,0030	0,0176	0,0509	0,0985	0,1428	0,1656	0,1601	0,1326	0,0962	0,0620
5,9	0,0027	0,0162	0,0477	0,0938	0,1383	0,1632	0,1605	0,1353	0,0998	0,0654
6	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606	0,1606	0,1377	0,1033	0,0688
6,1	0,0022	0,0137	0,0417	0,0848	0,1294	0,1579	0,1605	0,1399	0,1066	0,0723
6,2	0,0020	0,0126	0,0390	0,0806	0,1249	0,1549	0,1601	0,1418	0,1099	0,0757
6,3	0,0018	0,0116	0,0364	0,0765	0,1205	0,1519	0,1595	0,1435	0,1130	0,0791

Продолжение таблицы 3

λ	k									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
6,4	0,0017	0,0106	0,0340	0,0726	0,1162	0,1487	0,1586	0,1450	0,1160	0,0825
6,5	0,0015	0,0098	0,0318	0,0688	0,1118	0,1454	0,1575	0,1462	0,1188	0,0858
6,6	0,0014	0,0090	0,0296	0,0652	0,1076	0,1420	0,1562	0,1472	0,1215	0,0891
6,7	0,0012	0,0082	0,0276	0,0617	0,1034	0,1385	0,1546	0,1480	0,1240	0,0923
6,8	0,0011	0,0076	0,0258	0,0584	0,0992	0,1349	0,1529	0,1486	0,1263	0,0954
6,9	0,0010	0,0070	0,0240	0,0552	0,0952	0,1314	0,1511	0,1489	0,1284	0,0985
7	0,0009	0,0064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277	0,1490	0,1490	0,1304	0,1014
7,1	0,0008	0,0059	0,0208	0,0492	0,0874	0,1241	0,1468	0,1489	0,1321	0,1042
7,2	0,0007	0,0054	0,0194	0,0464	0,0836	0,1204	0,1445	0,1486	0,1337	0,1070
7,3	0,0007	0,0049	0,0180	0,0438	0,0799	0,1167	0,1420	0,1481	0,1351	0,1096
7,4	0,0006	0,0045	0,0167	0,0413	0,0764	0,1130	0,1394	0,1474	0,1363	0,1121
7,5	0,0006	0,0041	0,0156	0,0389	0,0729	0,1094	0,1367	0,1465	0,1373	0,1144
7,6	0,0005	0,0038	0,0145	0,0366	0,0696	0,1057	0,1339	0,1454	0,1381	0,1167
7,7	0,0005	0,0035	0,0134	0,0345	0,0663	0,1021	0,1311	0,1442	0,1388	0,1187
7,8	0,0004	0,0032	0,0125	0,0324	0,0632	0,0986	0,1282	0,1428	0,1392	0,1207
7,9	0,0004	0,0029	0,0116	0,0305	0,0602	0,0951	0,1252	0,1413	0,1395	0,1224
8	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241
8,1	0,0003	0,0025	0,0100	0,0269	0,0544	0,0882	0,1191	0,1378	0,1395	0,1256
8,2	0,0003	0,0023	0,0092	0,0252	0,0517	0,0849	0,1160	0,1358	0,1392	0,1269
8,3	0,0002	0,0021	0,0086	0,0237	0,0491	0,0816	0,1128	0,1338	0,1388	0,1280
8,4	0,0002	0,0019	0,0079	0,0222	0,0466	0,0784	0,1097	0,1317	0,1382	0,1290
8,5	0,0002	0,0017	0,0074	0,0208	0,0443	0,0752	0,1066	0,1294	0,1375	0,1299
8,6	0,0002	0,0016	0,0068	0,0195	0,0420	0,0722	0,1034	0,1271	0,1366	0,1306
8,7	0,0002	0,0014	0,0063	0,0183	0,0398	0,0692	0,1003	0,1247	0,1356	0,1311
8,8	0,0002	0,0013	0,0058	0,0171	0,0377	0,0663	0,0972	0,1222	0,1344	0,1315
8,9	0,0001	0,0012	0,0054	0,0160	0,0357	0,0635	0,0941	0,1197	0,1332	0,1317
9	0,0001	0,0011	0,0050	0,0150	0,0337	0,0607	0,0911	0,1171	0,1318	0,1318
9,1	0,0001	0,0010	0,0046	0,0140	0,0319	0,0581	0,0881	0,1145	0,1302	0,1317
9,2	0,0001	0,0009	0,0043	0,0131	0,0302	0,0555	0,0851	0,1118	0,1286	0,1315
9,3	0,0001	0,0009	0,0040	0,0123	0,0285	0,0530	0,0822	0,1091	0,1269	0,1311
9,4	0,0001	0,0008	0,0037	0,0115	0,0269	0,0506	0,0793	0,1064	0,1251	0,1306
9,5	0,0001	0,0007	0,0034	0,0107	0,0254	0,0483	0,0764	0,1037	0,1232	0,1300
9,6	0,0001	0,0007	0,0031	0,0100	0,0240	0,0460	0,0736	0,1010	0,1212	0,1293
9,7	0,0001	0,0006	0,0029	0,0093	0,0226	0,0439	0,0709	0,0982	0,1191	0,1284
9,8	0,0001	0,0005	0,0027	0,0087	0,0213	0,0418	0,0682	0,0955	0,1170	0,1274
9,9	0,0001	0,0005	0,0025	0,0081	0,0201	0,0398	0,0656	0,0928	0,1148	0,1263
10	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251
10,1	0,0000	0,0004	0,0021	0,0071	0,0178	0,0360	0,0606	0,0874	0,1103	0,1238
10,2	0,0000	0,0004	0,0019	0,0066	0,0168	0,0342	0,0581	0,0847	0,1080	0,1224
10,3	0,0000	0,0003	0,0018	0,0061	0,0158	0,0325	0,0558	0,0821	0,1057	0,1209
10,4	0,0000	0,0003	0,0016	0,0057	0,0148	0,0309	0,0535	0,0795	0,1033	0,1194
10,5	0,0000	0,0003	0,0015	0,0053	0,0139	0,0293	0,0513	0,0769	0,1009	0,1177
10,6	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0131	0,0278	0,0491	0,0743	0,0985	0,1160
10,7	0,0000	0,0002	0,0013	0,0046	0,0123	0,0264	0,0470	0,0718	0,0961	0,1142
10,8	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0116	0,0250	0,0450	0,0694	0,0936	0,1124

Окончание таблицы 3

λ	*k*									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10,9	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0109	0,0237	0,0430	0,0669	0,0912	0,1105
11	0,0000	0,0002	0,0010	0,0037	0,0102	0,0224	0,0411	0,0646	0,0888	0,1085
11,1	0,0000	0,0002	0,0009	0,0034	0,0096	0,0212	0,0393	0,0623	0,0864	0,1065
11,2	0,0000	0,0002	0,0009	0,0032	0,0090	0,0201	0,0375	0,0600	0,0840	0,1045
11,3	0,0000	0,0001	0,0008	0,0030	0,0084	0,0190	0,0358	0,0578	0,0816	0,1024
11,4	0,0000	0,0001	0,0007	0,0028	0,0079	0,0180	0,0341	0,0556	0,0792	0,1003
11,5	0,0000	0,0001	0,0007	0,0026	0,0074	0,0170	0,0325	0,0535	0,0769	0,0982
11,6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0069	0,0160	0,0310	0,0514	0,0745	0,0961
11,7	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0152	0,0295	0,0494	0,0722	0,0939
11,8	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0061	0,0143	0,0281	0,0474	0,0700	0,0917
11,9	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0057	0,0135	0,0268	0,0455	0,0677	0,0895
12	0,0000	0,0001	0,0004	0,0018	0,0053	0,0127	0,0255	0,0437	0,0655	0,0874
12,1	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0050	0,0120	0,0242	0,0419	0,0634	0,0852
12,2	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0046	0,0113	0,0230	0,0402	0,0612	0,0830
12,3	0,0000	0,0001	0,0003	0,0014	0,0043	0,0107	0,0219	0,0385	0,0591	0,0808
12,4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0041	0,0101	0,0208	0,0368	0,0571	0,0787
12,5	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0038	0,0095	0,0197	0,0353	0,0551	0,0765
12,6	0,0000	0,0000	0,0003	0,0011	0,0035	0,0089	0,0187	0,0337	0,0531	0,0744
12,7	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0084	0,0178	0,0323	0,0512	0,0723
12,8	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0031	0,0079	0,0169	0,0308	0,0493	0,0702
12,9	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0074	0,0160	0,0295	0,0475	0,0681
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0027	0,0070	0,0152	0,0281	0,0457	0,0661
13,1	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0066	0,0144	0,0269	0,0440	0,0640
13,2	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0023	0,0062	0,0136	0,0256	0,0423	0,0620
13,3	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0022	0,0058	0,0129	0,0245	0,0407	0,0601
13,4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0020	0,0055	0,0122	0,0233	0,0391	0,0582
13,5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0019	0,0051	0,0115	0,0222	0,0375	0,0563
13,6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0048	0,0109	0,0212	0,0360	0,0544
13,7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0045	0,0103	0,0202	0,0345	0,0526
13,8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0042	0,0097	0,0192	0,0331	0,0508
13,9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0040	0,0092	0,0183	0,0318	0,0491
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0037	0,0087	0,0174	0,0304	0,0473
14,1	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0035	0,0082	0,0165	0,0292	0,0457
14,2	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0033	0,0078	0,0157	0,0279	0,0440
14,3	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0011	0,0031	0,0073	0,0149	0,0267	0,0424
14,4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029	0,0069	0,0142	0,0256	0,0409
14,5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0027	0,0065	0,0135	0,0244	0,0394
14,6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0025	0,0061	0,0128	0,0234	0,0379
14,7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0024	0,0058	0,0122	0,0223	0,0365
14,8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0022	0,0055	0,0115	0,0213	0,0351
14,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0051	0,0109	0,0204	0,0337
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019	0,0048	0,0104	0,0194	0,0324

Таблица 4

Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,57	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 5

Таблица значений функции $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	2,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 6

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	**Уровень значимости α**					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020

Окончание таблицы 6

Число степеней свободы *k*	**Уровень значимости α**					
	0,01	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,4	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	54,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	42,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица 7

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы *k*	**Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
1	6,31	12,7	31,8	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,3	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,2	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78

Окончание таблицы 7

Число степеней свободы k	**Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)**					
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,002**	**0,001**
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,86	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица 8

Критические точки распределения F Фишера-Снедекора

Уровень значимости α=0,01												
k_2	**k_1**											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71

Продолжение таблицы 8

Уровень значимости α=0,01												
k_2	k_1											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
Уровень значимости α=0,05												
k_2	k_1											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
Уровень значимости α=0,01												
k_2	k_1											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80

Окончание таблицы 8

15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
Уровень значимости α=0,05												
k_2	k_1											
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Примечание: k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии.

Учебное издание

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ.
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

Учебно-методическое пособие

Составители:

Рачковский Николай Николаевич
Третьякова Лариса Григорьевна

Верстка *Е. М. Гуняженко*
Корректор *Т. С. Шевчик*

Подписано в печать 22.02.2011. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 5,58. Тираж 300 экз. Заказ 11.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Государственный институт управления и социальных технологий БГУ»
ЛИ № 02330/0494050 от 03.02.2009.
Ул. Обойная, 7, 220004, Минск, Республика Беларусь