УДК 517.966

Г.П. РАЗМЫСЛОВИЧ, В.В. КРАХОТКО

К ПРОБЛЕМЕ *H*-УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ

The necessary and sufficient conditions of controllability on the subspace of a nonregular linear singular system with a delay in the control are obtained.

Рассмотрим систему управления вида

$$A_0\dot{x}(t) = Bu(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i u(t-h_i), \quad t \ge 0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, u_0(\cdot) = \{u(t) = \varphi(t), t \in [-h_m, 0)\}, \tag{2}$$

где $x \in R_n, A_0, B, B_i, i = \overline{1, m},$ – заданные постоянные матрицы соответствующих размеров; $u(t)$ – r-мерное кусочно-непрерывное управление; $h_i > 0,\ 1 \le i \le m,$ – запаздывание, причем считаем, что $h_1 < h_2 < h_3 < \ldots < h_m$; x_0 – заданный n-вектор, а $\varphi(t)$ – заданная кусочно-непрерывная n-вектор-функция.

Пусть матрица $A_0 \ne 0$ и $\det A_0 = 0$, т. е. согласно [1] система (1) является нерегулярной.

Матрица X называется псевдообратной для некоторой матрицы A и обозначается через A^+, если она удовлетворяет матричным уравнениям $AXA=A,\ XAX=X,\ (AX)^*=AX,\ (XA)^*=XA,$ где * – знак сопряжения. Известно, что для любой матрицы A псевдообратная матрица существует и является единственной. В случае если матрица A является невырожденной, то $A^+ = A^{-1}$.

Пусть H – некоторая $n{\times}n$-матрица.

Определение 1. Управление $u(t), t \ge 0,$ назовем допустимым, если при этом управлении система (1) имеет решение хотя бы при одном начальном условии (2).

Определение 2. Систему (1) назовем H-управляемой, если для любого начального условия (2) найдутся момент времени $t_1,\ 0 < t_1 < \infty,$ и управление $u(t), t \in [0, t - h_m),\ u(t) \equiv 0,$ при $t \ge t - h_m,$ такие, что решение системы (1), (2) удовлетворяет условию $Hx(t_1) = 0.$

В соответствии с [3] положим

$$x(t) = p(t) + \sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^{h_i} M_i(s)u(t-s)ds\right), \tag{3}$$

где $p(t)$ – некоторая n-вектор-функция, а $M_i(s),\ 1 \le i \le m,\ t \in [0, h_i],$ – некоторая $n{\times}r$-матрица. Учитывая, что

$$\dot{x}(t) = \dot{p}(t) - \sum_{i=1}^{m} M_i(h_i)u(t-h_i) + \sum_{i=1}^{m} M_i(0)u(t) + \sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^{h_i} \frac{dM_i(s)}{ds}u(t-s)ds\right),$$

система (1) приобретает вид

$$A_0\dot{p}(t) - \sum_{i=1}^{m} A_0 M_i(h_i)u(t-h_i) + \sum_{i=1}^{m} A_0 M_i(0)u(t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_0^{h_i} A_0\frac{dM_i(s)}{ds}u(t-s)ds = Bu(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i u(t-h_i),\ t \ge 0.$$

Потребуем, чтобы $n{\times}r$-матричная функция $M_i(s),\ 1 \le i \le m,$ удовлетворяла дифференциальному матричному уравнению

$$A_0\frac{dM_i(s)}{ds} = 0,\ s \in [0, h_i], \tag{4}$$

с начальным условием

$$A_0 M_i(h_i) = -B_i,\ 1 \le i \le m. \tag{5}$$

Согласно [2, 4] и поскольку любая псевдообратная матрица является полуобратной, система (4), (5) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\left(E_n - A_0 A_0^+\right)B_i = 0,\ 1 \le i \le m, \tag{6}$$

причем решение ее описывается формулой

$$M_i(s) = -A_0^+ B_i + \left(E_n - A_0^+ A_0\right)\mu + \int_0^s \left(E_n - A_0^+ A_0\right)Q_i(\tau)d\tau,\ s \in [0, h_i],$$

где A_0^+ – псевдообратная матрица для матрицы A_0, μ – произвольный n-вектор, $Q_i(t),\ 1 \le i \le m,$ – произвольная n-вектор-функция.

Но тогда система управления (1), (2) приобретает вид

$$A_0\dot{p}(t) = B_0 u(t),\ t \ge 0, \tag{7}$$

где

$$p(0) = p_0 = x_0 - \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{-h_i}^{0} M_i(-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right),$$

$$B_0 = B + \sum_{i=1}^{m} A_0 A_0^+ B_i. \tag{8}$$

В свою очередь, согласно [4] управление $u(t),\ t \geq 0,$ является допустимым для системы (7) тогда и только тогда, когда

$$\left(E_n - A_0 A_0^+\right) B_0 u(t) = 0, \tag{9}$$

и общее решение системы (7) имеет вид

$$p(t) = p_0 + \int_0^t A_0^+ B_0 u(\tau)\, d\tau + \int_0^t \left(E_n - A_0^+ A_0\right) q(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

где $q(t), t \geq 0,$ – произвольная кусочно-непрерывная на промежутке $[0, +\infty)$ вектор-функция.

Таким образом, в силу (10), (3) общее решение системы (1), (2) описывается формулой

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 - \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{-h_i}^{0} M_i(-\tau) \varphi(\tau)\, d\tau \right) + \int_0^t A_0^+ B_0 u(\tau)\, d\tau + \\ + \int_0^t \left(E_n - A_0^+ A_0\right) q(\tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^{m} \left(\int_0^{h_i} M_i(s) u(t-s)\, ds \right). \end{gathered} \tag{11}$$

Исходя из (11), имеем следующее утверждение.

Теорема. При выполнении условия (6) в классе допустимых управлений (9) система (1) H-управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left[H A_0^+ B_0 (E_n - D^+ D) \right] = \operatorname{rank}\left[H A_0^+ B_0 (E_n - D^+ D), H \right],$$

где $D = \left(E_n - A_0 A_0^+\right) B_0,$ а матрица B_0 определяется соотношением (8).

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1988.
2. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1980.
3. Крахотко В.В., Размыслович Г.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2006. № 3. С. 130.
4. Размыслович Г.П. // Там же. 2001. № 2. С. 87.

Поступила в редакцию 18.05.11.

Георгий Прокофьевич Размыслович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.
Валерий Васильевич Крахотко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры оптимального управления.