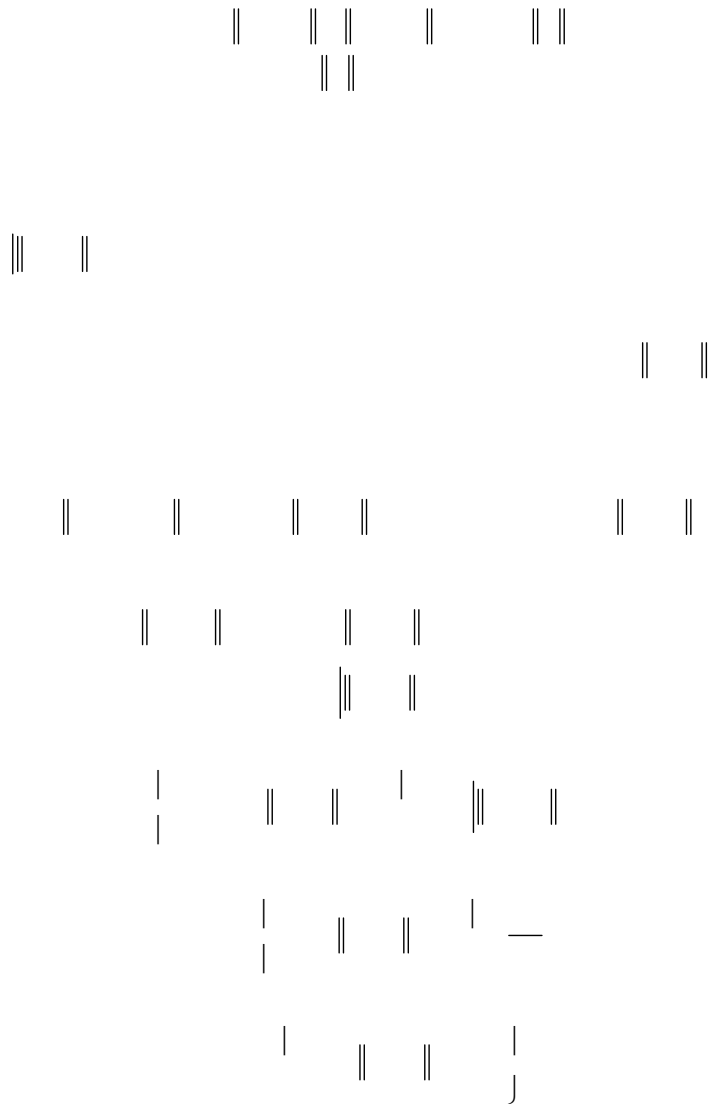




УДК 517.9

Е.Ю. ЛЕОНОВА

МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ $C(X)$

The paper contains the proof of existence of the largest subspace among all subspaces of a normalized space, on which a linear continuous functional can be extended uniquely with the same norm. For a positive linear continuous functional defined on the set of continuous functions on a compact space the description of such subspaces is given.

Согласно теореме Хана – Банаха для любого ограниченного линейного функционала, заданного на подпространстве нормированного пространства, существует линейное продолжение на все пространство, имеющее ту же норму. Такое продолжение в общем случае не единственно, но в ряде задач представляет интерес вопрос о единственности продолжения.

Приведем пример такой задачи. Пусть $X = S^1$ есть окружность, реализованная как факторгруппа $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Зададим оператор сдвига $T_h u(x) = u(x+h)$, где число h иррационально. В пространстве $L_p(S^1)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим операторы взвешенного сдвига, заданные формулой

$$Bu(x) = e^{\varphi} T_h u(x) = e^{\varphi(x)} u(x+h), \quad u \in L_p(S^1).$$

В случае $\varphi \in C(S^1)$ формула логарифма спектрального радиуса $r(B)$ оператора B была получена в [1] (обобщения этой формулы см. в [2]). Она имеет вид

$$\ln r(e^{\varphi} T_h) = \int_0^1 \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Правая часть формулы (1) есть функционал $\lambda(\varphi) := \int_0^1 \varphi(x) dx$, определенный на пространстве $C(X)$.

Этот функционал линейный, положительный, ограниченный и $\|\lambda\| = 1$. Функционал λ имеет два естественных продолжения на пространство $L_{\infty}(S^1)$:

$$\lambda_1(\varphi) = \ln r(e^{\varphi} T_h), \quad \lambda_2(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \varphi \in L_{\infty}(S^1).$$

Однако эти продолжения не совпадают на всем пространстве $L_{\infty}(S^1)$. Другими словами, формула (1) не верна для произвольной функции $\varphi \in L_{\infty}(S^1)$. Возникает вопрос: для каких разрывных функций $\varphi \in L_{\infty}(S^1)$ формула (1) имеет место?

Заметим, что если L – подпространство в $L_{\infty}(S^1)$, на которое линейное продолжение функционала λ , имеющее единичную норму, единственно, то формула (1) остается верной для $\varphi \in L$. Поэтому представляет интерес нахождение таких подпространств.

Отметим также, что вопросы, связанные с единственностью продолжения линейного функционала, возникают при исследовании расширенного преобразования Лежандра [3].

В данной работе доказано существование наибольшего векторного подпространства, на которое линейный функционал продолжается однозначно с сохранением нормы, и для функционала, определенного на пространстве $C(X)$ функций, непрерывных на компакте, получено описание таких подпространств.

Существование множества единственности

Теорема 1. Пусть λ – ограниченный линейный функционал, заданный на векторном подпространстве L нормированного пространства E . Существует наибольшее по включению подпространство $\mathfrak{K}$ среди всех подпространств пространства E , на которых линейное продолжение функционала λ , сохраняющее норму, однозначно определяется исходным функционалом λ . Подпространство $\mathfrak{K}$ замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим множество $M = \{L_{\alpha} : \alpha \in I\}$ всех векторных подпространств в E , на каждом из которых линейное продолжение функционала λ , имеющее ту же норму, единственно. Для каждого $L_{\alpha} \in M$ обозначим такое продолжение соответственно через λ_{α} . На множестве M введем отношение порядка: будем говорить, что $L_{\alpha} \prec L_{\gamma}$, если $L_{\alpha} \subseteq L_{\gamma}$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{K} := \bigcup_{\alpha \in I} L_{\alpha}$ и покажем, что оно является искомым подпространством. Покажем вначале, что $\mathfrak{K}$ есть векторное подпространство. Для этого достаточно доказать, что $L_{\alpha} + L_{\gamma} \in M$ для любых $L_{\alpha}, L_{\gamma} \in M$.

В силу теоремы Хана – Банаха на подпространство $L_{\alpha} + L_{\gamma}$ существует линейное продолжение $\tilde{\lambda}$ функционала λ , имеющее норму $\|\tilde{\lambda}\| = \|\lambda\|$. Остается показать, что продолжение $\tilde{\lambda}$ однозначно определяется функционалом λ . Возьмем $\varphi \in L_{\alpha} + L_{\gamma}$. Функция φ представляется в виде суммы $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in L_{\alpha}$, $\varphi_2 \in L_{\gamma}$. Поскольку $\tilde{\lambda}|_{L_{\alpha}} = \lambda_{\alpha}$ и $\tilde{\lambda}|_{L_{\gamma}} = \lambda_{\gamma}$, то

$$\tilde{\lambda}(\varphi) = \tilde{\lambda}(\varphi_1) + \tilde{\lambda}(\varphi_2) = \lambda_\alpha(\varphi_1) + \lambda_\gamma(\varphi_2). \quad (2)$$

Функционал $\tilde{\lambda}$ определен однозначно по λ , если (2) не зависит от разложения $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Покажем это. Предположим, что существуют $\psi_1 \in L_\alpha, \psi_2 \in L_\gamma$ такие, что $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \psi_1 + \psi_2$. Тогда $\varphi_1 - \psi_1 = \psi_2 - \varphi_2 \in L_\alpha \cap L_\gamma$. В силу того, что $\lambda_\alpha|_{L_\alpha \cap L_\gamma} = \lambda_\gamma|_{L_\alpha \cap L_\gamma}$, имеем

$$\lambda_\alpha(\varphi_1 - \psi_1) = \lambda_\gamma(\psi_2 - \varphi_2); \quad \lambda_\alpha(\varphi_1) - \lambda_\alpha(\psi_1) = \lambda_\gamma(\psi_2) - \lambda_\gamma(\varphi_2).$$

Отсюда $\lambda_\alpha(\varphi_1) + \lambda_\gamma(\varphi_2) = \lambda_\alpha(\psi_1) + \lambda_\gamma(\psi_2)$. А значит, (2) не зависит от разложения функции φ , и продолжение $\tilde{\lambda}$ однозначно определяется функционалом λ .

Возьмем произвольные $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{K}$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Существуют $\alpha, \gamma \in I$ такие, что $\varphi_1 \in L_\alpha, \varphi_2 \in L_\gamma$. Тогда $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in L_\alpha + L_\gamma \in M$. Следовательно, $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in \mathfrak{K}$. Таким образом, $\mathfrak{K}$ есть векторное подпространство.

Докажем, что $\mathfrak{K} \in M$. Пусть $\tilde{\lambda}$ – линейное продолжение функционала λ на подпространство $\mathfrak{K}$, имеющее норму $\|\tilde{\lambda}\| = \|\lambda\|$. Возьмем $\varphi \in \mathfrak{K}$. Существует индекс $\alpha \in I$ такой, что $\varphi \in L_\alpha$. Отсюда следует, что значение $\tilde{\lambda}(\varphi)$ однозначно определено исходным функционалом λ . Таким образом, существует единственное линейное продолжение функционала λ на подпространство $\mathfrak{K}$, имеющее ту же норму.

Из того, что $\mathfrak{K} = \bigcup_{\alpha \in I} L_\alpha$, очевидным образом следует, что $\mathfrak{K}$ является наибольшим элементом множества M . А поскольку всякий непрерывный функционал, заданный на векторном подпространстве, может быть единственным образом продолжен на замыкание этого подпространства, то $\mathfrak{K}$ замкнуто.

Описание множеств единственности в $L_\infty(X, \mu)$

Всюду далее X – компактное топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, ν – положительная регулярная [4] вероятностная мера, μ – положительная борелевская мера с носителем $\text{supp } \mu = X$. Рассмотрим функционал λ , заданный на пространстве $C(X)$ формулой

$$\lambda(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\nu, \quad \varphi \in C(X). \quad (3)$$

Функционал λ положительный линейный непрерывный и $\|\lambda\| = 1$. Заметим, что согласно теореме Рисса [4] любой положительный линейный непрерывный функционал на $C(X)$ имеет вид (3) с точностью до некоторой постоянной.

Линейное продолжение функционала (3) на пространство $L_\infty(X, \mu)$, имеющее ту же норму, очевидно, может быть не единственным. Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. Существует наибольшее по включению векторное подпространство $\mathfrak{K}_\nu(X, \mu)$ среди всех векторных подпространств в $L_\infty(X, \mu)$, на которых всякое линейное продолжение $\tilde{\lambda}$ функционала (3), имеющее норму $\|\tilde{\lambda}\| = 1$, определено единственным образом.

С целью описания подпространств $\mathfrak{K}_\nu(X, \mu) \subset L_\infty(X, \mu)$ введем следующие понятия.

Определение 2. Назовем функцию $\varphi \in L_\infty(X, \mu)$ монотонно аппроксимируемой относительно меры ν , если φ удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $f, g \in C(X)$ такие, что $g \leq \varphi \leq f$ μ – п.в. и

$$\int_X (f(x) - g(x)) d\nu < \varepsilon.$$

Определение 3. Назовем функцию $\varphi \in L_\infty(X, \mu)$ почти непрерывной относительно меры ν , если класс φ содержит хотя бы одну ν – п.в. непрерывную функцию.

Через $MA_\nu(X, \mu)$ обозначим множество всех монотонно аппроксимируемых относительно меры ν функций, а через $AC_\nu(X, \mu)$ – множество всех почти непрерывных относительно меры ν функций.

Очевидно, что множества $MA_v(X, \mu)$ и $AC_v(X, \mu)$ – векторные подпространства. Кроме того, подпространство $AC_v(X, \mu)$ является подалгеброй алгебры $L_\infty(X, \mu)$.

Следующая теорема дает описание подпространства $\mathfrak{R}_v(X, \mu) \subset L_\infty(X, \mu)$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{R}_v(X, \mu)$ – наибольшее по включению подпространство среди всех подпространств в $L_\infty(X, \mu)$, на которых линейное продолжение функционала

$$\lambda(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\nu, \quad \varphi \in C(X), \quad (4)$$

имеющее единичную норму, однозначно определяется исходным функционалом λ . Тогда

$$\mathfrak{R}_v(X, \mu) = MA_v(X, \mu) = AC_v(X, \mu)$$

и это множество является замкнутой подалгеброй алгебры $L_\infty(X, \mu)$.

Всюду далее неравенства для функций будем подразумевать выполненными μ – п.в.

Лемма 1. Для функции $\varphi \in L_\infty(X, \mu)$ эквивалентны следующие условия:

(1) для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $y, z \in C(X)$ такие, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |y(x) - \varphi(x)| + \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |z(x) - \varphi(x)| + \int_X y(x) d\nu - \int_X z(x) d\nu < \varepsilon; \quad (5)$$

(2) $\varphi \in MA_v(X, \mu)$.

Доказательство теоремы 2. Докажем равенство $\mathfrak{R}_v(X, \mu) = MA_v(X, \mu)$. Как и в доказательстве теоремы 1, обозначим через $M = \{L_\alpha : \alpha \in I\}$ множество всех векторных подпространств в $L_\infty(X, \mu)$, на каждом из которых линейное продолжение функционала λ , имеющее единичную норму, единственно. В доказательстве теоремы 1 было получено равенство $\mathfrak{R}_v(X, \mu) = \bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha$. Поэтому для доказательства равенства $\mathfrak{R}_v(X, \mu) = MA_v(X, \mu)$ необходимо и достаточно доказать, что $\bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha = MA_v(X, \mu)$.

Чтобы доказать включение $MA_v(X, \mu) \subseteq \bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha$, покажем вначале, что для функции $\varphi_1 \in L_\infty(X, \mu) \setminus C(X)$ условие $\varphi_1 \in MA_v(X, \mu)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы подпространство $L(\varphi_1) := \{\beta\varphi_1 + \varphi \mid \varphi \in C(X), \beta \in \mathbb{R}\} \in M$.

Пусть λ_1 – линейное продолжение функционала λ на $L(\varphi_1)$ с нормой $\|\lambda_1\| = 1$. Приведенные далее рассуждения при построении λ_1 частично повторяют рассуждения из доказательства теоремы Хана – Банаха [5].

В силу линейности должно выполняться свойство $\lambda_1(\beta\varphi_1 + \varphi) = \beta\lambda_1(\varphi_1) + \lambda(\varphi)$. Так как β и $\lambda(\varphi)$ заданы, для определения λ_1 достаточно задать только число $c := \lambda_1(\varphi_1)$. Нужно подобрать c так, чтобы выполнялось условие $\lambda_1(\beta\varphi_1 + \varphi) \leq \|\beta\varphi_1 + \varphi\|$, т. е.

$$\beta c + \lambda(\varphi) \leq \|\beta\varphi_1 + \varphi\| \quad \forall \varphi \in C(X), \forall \beta \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

При $\beta > 0$ неравенство (6) перепишем в виде

$$c \leq \left\| \frac{\varphi}{\beta} + \varphi_1 \right\| - \lambda\left(\frac{\varphi}{\beta}\right), \quad (7)$$

а при $\beta < 0$ – в виде

$$-\left\| -\frac{\varphi}{\beta} - \varphi_1 \right\| + \lambda\left(-\frac{\varphi}{\beta}\right) \leq c. \quad (8)$$

Существование постоянных $c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (7) и (8), не является очевидным фактом, поскольку условия (7) задают ограничения на значение c сверху, а условия (8) – ограничения снизу, и такие ограничения могут противоречить друг другу.

Существование требуемых c доказывается следующим образом. Пусть y, z – произвольные элементы из $C(X)$. Тогда

$$\lambda(z) + \lambda(y) = \lambda(z + y) \leq \|z + y\| \leq \|z - \varphi_1\| + \|y + \varphi_1\|$$

или

$$-\|z - \varphi_1\| + \lambda(z) \leq \|y + \varphi_1\| - \lambda(y). \quad (9)$$

Рассмотрим следующие величины:

$$c' = c'(\varphi_1) = \sup_{z \in C(X)} (-\|z - \varphi_1\| + \lambda(z)); \quad c'' = c''(\varphi_1) = \inf_{y \in C(X)} (\|y + \varphi_1\| - \lambda(y)).$$

В силу (9) имеем $c' \leq c''$, и константа c удовлетворяет условиям (7) и (8) тогда и только тогда, когда $c' \leq c \leq c''$.

Подпространство $L(\varphi_1) \in M$ тогда и только тогда, когда константа c определена однозначно, что выполнено, если $c' = c''$. Но условие $c' = c''$ эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $y, z \in C(X)$ такие, что

$$\|y + \varphi_1\| - \lambda(y) + \|z - \varphi_1\| - \lambda(z) < \varepsilon. \quad (10)$$

А в силу леммы 1 условие (10) эквивалентно $\varphi_1 \in MA_v(X, \mu)$. Таким образом, $L(\varphi_1) \in M$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 \in MA_v(X, \mu)$.

Покажем теперь, что выполнено включение $MA_v(X, \mu) \subseteq \bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha$. Пусть $\varphi \in MA_v(X, \mu)$. Если $\varphi \in C(X)$, то очевидно $\varphi \in C(X) \subset \bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha$. Если же $\varphi \in MA_v(X, \mu) \setminus C(X)$, то это равносильно тому, что $L(\varphi) \in M$. Отсюда следует $\varphi \in L(\varphi) \subset \bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha$.

Для доказательства обратного включения $\bigcup_{L_\alpha \in M} L_\alpha \subseteq MA_v(X, \mu)$ покажем, что $L_\alpha \subseteq MA_v(X, \mu)$ для любого $L_\alpha \in M$. Возьмем $\varphi \in L_\alpha$. Если $\varphi \in C(X)$, то очевидно $\varphi \in C(X) \subset MA_v(X, \mu)$. Пусть $\varphi \in L_\alpha \setminus C(X)$. Поскольку $L(\varphi) \subseteq L_\alpha$, то $L(\varphi) \in M$. Ранее было доказано, что это эквивалентно условию $\varphi \in MA_v(X, \mu)$. Таким образом, $L_\alpha \subseteq MA_v(X, \mu)$.

Докажем теперь равенство $MA_v(X, \mu) = AC_v(X, \mu)$.

Отметим частный случай, когда X есть отрезок, а μ и ν – меры Лебега. В этом случае известно, что свойство монотонной аппроксимируемости функции эквивалентно тому, что функция ограничена и почти всюду непрерывна, и эквивалентно интегрируемости функции по Риману. По существу, дальнейшее доказательство повторяет некоторые шаги из доказательства этого критерия.

Возьмем произвольный элемент $\tilde{\varphi} \in L_\infty(X, \mu)$ и рассмотрим величины

$$\Theta = \inf \left\{ \int_X f(x) d\nu \mid f \in C(X), \tilde{\varphi} \leq f \right\}; \quad \theta = \sup \left\{ \int_X g(x) d\nu \mid g \in C(X), g \leq \tilde{\varphi} \right\}.$$

Выберем последовательности функций $f_n, g_n \in C(X)$ такие, что $g_n \leq \tilde{\varphi} \leq f_n$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\nu = \Theta; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\nu = \theta. \quad (11)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность f_n убывает, а последовательность g_n возрастает.

Поскольку функции f_n и g_n непрерывны и неравенство $g_n \leq f_n$ выполнено μ – п.в., то оно выполнено всюду в силу условия $\text{supp } \mu = X$. Таким образом, для любого n и любого $x \in X$ справедливо $g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Отсюда следует, что для любого $x \in X$ существуют конечные пределы

$$\overline{\varphi}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x); \quad \underline{\varphi}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x). \quad (12)$$

Очевидно, что $\underline{\varphi}(x) \leq \overline{\varphi}(x)$ для любого $x \in X$. Кроме того, $\underline{\varphi} \leq \tilde{\varphi} \leq \overline{\varphi}$.

Последовательности f_n, g_n удовлетворяют условиям теоремы Леви [5]. Поэтому

$$\int_X \overline{\varphi}(x) d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\nu; \quad \int_X \underline{\varphi}(x) d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\nu.$$

Отсюда в силу (11) имеем

$$\int_X \overline{\varphi}(x) d\nu = \Theta; \quad \int_X \underline{\varphi}(x) d\nu = \theta.$$

Следовательно,

$$\int_X (\bar{\varphi}(x) - \underline{\varphi}(x)) dv = \Theta - \theta.$$

Принимая во внимание то, что $\underline{\varphi}(x) \leq \bar{\varphi}(x)$ всюду на X , заключаем, что условие $\Theta = \theta$ эквивалентно тому, что $\bar{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x)$ ν -п.в. Условие же $\tilde{\varphi} \in MA_\nu(X, \mu)$ очевидно равносильно условию $\Theta = \theta$. Таким образом, $\tilde{\varphi} \in MA_\nu(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x)$ ν -п.в.

Докажем включение $MA_\nu(X, \mu) \subseteq AC_\nu(X, \mu)$. Пусть $\tilde{\varphi} \in MA_\nu(X, \mu)$. Тогда в силу доказанного выше $\bar{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x)$ ν -п.в. Выберем в классе $\tilde{\varphi}$ представителя φ такого, что $\underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{\varphi}(x)$ для любого $x \in X$. Легко доказать, что каждая точка x , в которой $\bar{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x)$, является точкой непрерывности функции φ . А поскольку $\bar{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x)$ ν -п.в., то представитель φ класса $\tilde{\varphi}$ есть ν -п.в. непрерывная функция. Таким образом, $\tilde{\varphi} \in AC_\nu(X, \mu)$.

Докажем обратное включение $AC_\nu(X, \mu) \subseteq MA_\nu(X, \mu)$. Пусть $\tilde{\varphi} \in AC_\nu(X, \mu)$, $\bar{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ — функции, определенные формулами (12). В классе $\tilde{\varphi}$ существует ν -п.в. непрерывный представитель φ . Обозначим через S_φ множество точек непрерывности функции φ . Докажем, что $\bar{\varphi}(x) = \underline{\varphi}(x)$ ν -п.в. Для этого достаточно показать, что $\nu\{x \in S_\varphi \mid \underline{\varphi}(x) < \bar{\varphi}(x)\} = 0$. Заметим, что поскольку $S_\varphi \subseteq \{x \in X \mid \underline{\varphi}(x) \leq \varphi(x) \leq \bar{\varphi}(x)\}$, то

$$\begin{aligned} \{x \in S_\varphi \mid \underline{\varphi}(x) < \bar{\varphi}(x)\} &= \{x \in S_\varphi \mid \underline{\varphi}(x) < \varphi(x)\} \cup \{x \in S_\varphi \mid \varphi(x) < \bar{\varphi}(x)\} = \\ &= \{x \in S_\varphi \mid (-\varphi)(x) < \overline{(-\varphi)}(x)\} \cup \{x \in S_\varphi \mid \varphi(x) < \bar{\varphi}(x)\}. \end{aligned}$$

Поэтому, чтобы доказать, что $\nu\{x \in S_\varphi \mid \underline{\varphi}(x) < \bar{\varphi}(x)\} = 0$, достаточно доказать, что $\nu\{x \in S_\varphi \mid \varphi(x) < \bar{\varphi}(x)\} = 0$. А чтобы доказать, что $\nu\{x \in S_\varphi \mid \varphi(x) < \bar{\varphi}(x)\} = 0$, достаточно показать, что для любого $\delta > 0$ выполнено $\nu\{x \in S_\varphi \mid \bar{\varphi}(x) - \varphi(x) \geq \delta\} = 0$. Предположим, что это не так, т. е. что существует $\delta > 0$, при котором $\nu\{x \in S_\varphi \mid \bar{\varphi}(x) - \varphi(x) \geq \delta\} > 0$. В силу регулярности меры ν существует замкнутое множество K положительной меры ν такое, что $K \subseteq \{x \in S_\varphi \mid \bar{\varphi}(x) - \varphi(x) \geq \delta\}$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in K$. В силу непрерывности в точке x_0 функций f_n и φ существует окрестность U_{x_0} точки x_0 такая, что

$$|f_n(x_0) - f_n(x)| \leq \frac{\delta}{3}, \quad |\varphi(x_0) - \varphi(x)| \leq \frac{\delta}{3}, \quad x \in U_{x_0}. \quad (13)$$

Как и всякое компактное топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, пространство X является нормальным, и в частности регулярным [5]. Поэтому для окрестности U_{x_0} существует окрестность $V_{x_0} \subseteq U_{x_0}$, замыкание которой $\overline{V_{x_0}} \subseteq U_{x_0}$.

Таким образом, семейство $\{V_x \mid x \in K\}$ представляет собой покрытие компакта K . Выделим из этого покрытия конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_p}\}$.

Используя лемму Урысона, для каждого $1 \leq i \leq p$ построим функцию $q_i \in C(X)$, удовлетворяющую условиям: $q_i(x) = \varphi(x_i) + \delta/3$ при $x \in \overline{V_{x_i}}$, $q_i(x) = f_n(x)$ при $x \in X \setminus U_{x_i}$ и $\varphi(x_i) + \delta/3 \leq q_i(x) \leq f_n(x)$, когда $x \in U_{x_i} \setminus \overline{V_{x_i}}$.

Рассмотрим функцию $h_n(x) = \min_{1 \leq i \leq p} q_i(x)$. Функция $h_n \in C(X)$. Принимая во внимание свойства функций q_i и неравенства (13), легко доказать, что $\varphi \leq h_n \leq f_n$ и для $x \in K$ выполнено неравенство $f_n(x) - h_n(x) \geq \delta/3$. Отсюда следует, что

$$\int_X f_n(x)dv - \int_X h_n(x)dv \geq \frac{\delta}{3}v(K). \quad (14)$$

В силу того, что $\int_X \bar{\varphi}(x)dv = \Theta$, существует функция f_n такая, что

$$\int_X \bar{\varphi}(x)dv + \frac{\delta}{6}v(K) \geq \int_X f_n(x)dv. \quad (15)$$

Складывая неравенства (14) и (15), получаем, что

$$\int_X \bar{\varphi}(x)dv - \int_X h_n(x)dv \geq \frac{\delta}{6}v(K) > 0.$$

Таким образом, мы построили функцию $h_n \in C(X)$ такую, что $\varphi \leq h_n$ и

$$\int_X h_n(x)dv < \int_X \bar{\varphi}(x)dv.$$

Но это противоречит тому, что $\int_X \bar{\varphi}(x)dv = \inf \left\{ \int_X f(x)dv \mid f \in C(X), \bar{\varphi} \leq f \right\}$. Следовательно, наше предположение о том, что $v\{x \in S_\varphi \mid \bar{\varphi}(x) - \varphi(x) \geq \delta\} > 0$, неверно. Поэтому $v\{x \in S_\varphi \mid \bar{\varphi}(x) - \varphi(x) \geq \delta\} = 0$ для любого $\delta > 0$.

Таким образом, нами доказано равенство $\mathfrak{R}_v(X, \mu) = MA_v(X, \mu) = AC_v(X, \mu)$. Поскольку в силу теоремы 1 подпространство $\mathfrak{R}_v(X, \mu)$ замкнуто, а $AC_v(X, \mu)$, как уже отмечалось, есть подалгебра алгебры $L_\infty(X, \mu)$, то $\mathfrak{R}_v(X, \mu)$ является замкнутой подалгеброй алгебры $L_\infty(X, \mu)$.

1. Антоневи́ч А. Б. Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Мн., 1988.

2. Антоневи́ч А. Б., Рывкин В. Б. // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 1347.

3. Antonevich A. B. // Geometric Methods in Physics. Proceedings of the XXVIII Workshop on Geometric Methods in Physics / American Institute of Physics, Melville. New York, 2009. P. 1.

4. Кадец В. М. Курс функционального анализа. Харьков, 2006.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Поступила в редакцию 08.06.11.

Евгения Юрьевна Леонова – аспирант кафедры функционального анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Антоневи́ч.