$$y_2(t+ \qquad b_0 y_2 \;\; t \qquad b_0^2 y_2^2(t), \;\; t \quad 1.$$

| | 1,

(( ), $_2$( ))

| | 1, (( ), ( ))

УДК 517.911.5+519.216.73

М.М. ВАСЬКОВСКИЙ

О РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ИЗМЕРИМЫМИ ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

There proved the theorem of the existence for the stochastic hyperbolic delay equation with Borel measurable locally bounded right-hand sides. The sufficient condition for absence of explosions to solutions is received.

Рассмотрим стохастическое гиперболическое уравнение с запаздыванием

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \Delta u(t,x) + f(t,x,u_t(x)) + g(t,x,u_t(x))\dot{W}(t,x), t \in R_+, x \in O, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(-h,x) = u_0(x), x \in \overline{O}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = u_1(t,x), t \in [-h,0], x \in \overline{O}, \tag{3}$$

и нулевыми граничными условиями Дирихле, где O – ограниченная область в R^d с гладкой границей, $R_+ = (0,+\infty)$, Δ – оператор Лапласа в R^d, $W(t,x)$ – броуновское движение, $u_t(x) = u\{(t+\tau,x) \mid -h \le \tau \le 0\} \in C([-h,0],R)$, h – время запаздывания, функции $f: R_+ \times O \times C([-h,0],R) \to R$, $g: R_+ \times O \times C([-h,0],R) \to R$ измеримы по Борелю, $u_0: R^d \to R$, $u_1: [-h,0] \times R^d \to R$ – заданные функции такие, что $u_0(x) = u_1(t,x) = 0$, $t \in [-h,0]$, $x \in \partial O$.

Теорема существования решений задачи (1) – (3) без запаздывания с функциями $f(t,x,u)$, $g(t,x,u)$, удовлетворяющими условию Липшица по u, доказана в [1]. Аналогичный результат для задачи (1) – (3) с запаздыванием получен в [2]. Существование мартингальных решений задачи (1) – (3) без запаздывания с отображениями f, g, непрерывными по u и имеющими линейный порядок роста, установлено в [3].

В настоящей работе получена теорема существования β-мартингальных решений задачи (1) – (3) с измеримыми локально ограниченными функциями f, g, а под β-мартингальным решением уравнения (1) понимается мартингальное решение стохастического гиперболического включения, построенного по уравнению (1). Доказано, что в случае линейного порядка роста f, g любое решение задачи (1) – (3) имеет бесконечный момент взрыва.

Будем использовать следующие обозначения: $a \wedge b = \min\{a, b\}$; P^x – закон распределения случайной величины x; $E(x)$ – математическое ожидание случайной величины x; $[A]_\varepsilon$ – ε-окрестность множества A; $cl(X)$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств множества X; $\overline{co}(X)$ – замыкание выпуклой оболочки множества X; $\mathcal{L}_2(U, H)$ – пространство операторов Гильберта – Шмидта, действующих из U в H.

Запишем задачу (1) – (3) как стохастическое эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве.

Определим пространства

$$L^2_\upsilon = L^2(\overline{O}, R),\ \ H^2_\upsilon = W^{2,2}(\overline{O}, R),\ \ H^1_\upsilon = \{z(\cdot) \in W^{1,2}(\overline{O}, R) \mid z(x) = 0, x \in \partial O\},\ \ E = H^1_\upsilon \times L^2_\upsilon,\ \ E_1 = L^2_\upsilon \times H^{-1}_\upsilon.$$

Броуновское движение $W(t, x)$ можно рассматривать как цилиндрическое броуновское движение $\mathcal{W}(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве L^2_υ.

Пусть $y(t) = u(t, \cdot) \in H^1_\upsilon$, $z(t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, \cdot) \in L^2_\upsilon$, $t \in R_+$; $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in E$, $y_t = \{y(t+\tau) \mid -h \le \tau \le 0\} \in$ $\in C([-h, 0], H^1_\upsilon)$.

Определим функции $\mathfrak{f} : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to E$, $\mathfrak{g} : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to \mathcal{L}_2(L^2_\upsilon, E)$ следующим образом: $\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{f}_1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{g}_1 \end{pmatrix}$, где функции $\mathfrak{f}_1 : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to L^2_\upsilon$, $\mathfrak{g}_1 : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to \mathcal{L}_2(L^2_\upsilon, L^2_\upsilon)$ находятся по правилу

$$(\mathfrak{f}_1(t, \varphi))(x) = f(t, x, \varphi(x)), t \in R_+, \varphi \in C([-h, 0], H^1_\upsilon), x \in R^d,$$

$$(\mathfrak{g}_1(t, \varphi)v)(x) = g(t, x, \varphi(x))v(x), t \in R_+, \varphi \in C([-h, 0], H^1_\upsilon), v \in L^2_\upsilon, x \in R^d.$$

Определим оператор $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $D(\mathcal{A}) = H^2_\upsilon \times H^1_\upsilon$, который является генератором C_0-полугруппы $P(t) = \begin{pmatrix} S(t) & C(t) \\ AC(t) & S(t) \end{pmatrix}$, $t \in R_+$, на гильбертовом пространстве E, где $A = \Delta$.

Тогда задачу (1) – (3) можно переписать следующим образом:

$$dX(t) = \mathcal{A}X(t) + \mathfrak{f}(t, X_t)dt + \mathfrak{g}(t, X_t)d\mathcal{W}(t), t \in R_+, X \in E,$$

$$X(t) = \Psi(t), t \in [-h, 0],$$

где $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(\cdot) + \int\limits_{-h}^{t} u_1(\tau, \cdot)d\tau \\ u_1(t, \cdot) \end{pmatrix} \in E$, $t \in [-h, 0]$.

Построим многозначные отображения $F : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to cl(E)$, $G : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to$ $\to cl(\mathcal{L}_2(L^2_\upsilon, E))$ следующим образом: $F = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 \\ G_1 \end{pmatrix}$, где отображения $F_1 : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to$ $\to cl(L^2_\upsilon)$, $G_1 : R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon) \to cl(\mathcal{L}_2(L^2_\upsilon, L^2_\upsilon))$ определяются равенствами

$$F_1(t, \varphi) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}[\mathfrak{f}_1(t, [\varphi]_\delta)]_\delta, G_1(t, \varphi) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}[\mathfrak{g}_1(t, [\varphi]_\delta)]_\delta, (t, \varphi) \in R_+ \times C([-h, 0], H^1_\upsilon).$$

Определение 1. Если существуют:

1) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq -h$;

2) $(\mathcal{F}_t)$-моменты остановки τ, τ_n, $n \geq 1$, со значениями в $(0, +\infty]$, $\tau_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} \tau$ п. н.;

3) $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in E$, определенный при $t \in [-h, \tau)$;

4) $(\mathcal{F}_t)$-согласованный Q-винеровский процесс $\mathcal{W}(t)$, $t \in R_+$, со значениями в L^2_υ;

5) измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы

$$v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1(t) \end{pmatrix} \in E, t \in R_+,$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_2(L^2_\upsilon, E), t \in R_+,$$

такие, что выполняются условия:

1) $\limsup_{t\uparrow\tau} \|X(t)\| = \infty$ при $\tau < +\infty$, процесс $X(t)$ имеет непрерывные E_1-значные траектории при $t \in [-h, \tau)$ п. н.;

2) $v(t) \in F(t, y_t)$, $u(t) \in G(t, y_t)$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in [0, \tau) \times \Omega$, где μ – мера Лебега на R_+, и $\int_0^{T\wedge\tau_n} \left(\|v(s)\| + \|u(s)\|^2_{\mathcal{L}_2} \right) ds < \infty$ для любого натурального n и любого $T \in R_+$;

3) с вероятностью 1 для всех $t \in [-h, \tau)$ выполняется соотношение

$$X(t) = \begin{cases} \Psi(t), t \in [-h, 0], \\ P(t)\Psi(0) + \int_0^t P(t-s)v(s)ds + \int_0^t P(t-s)u(s)d\mathcal{W}(s), t \in [0, \tau), \end{cases} \tag{4}$$

тогда набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, \mathcal{W}(t), X(t), v(t), u(t), \tau)$ (или кратко $X(t)$, $t \leq \tau$) называется β-мартингальным решением задачи (1) – (3), а случайную величину τ будем называть моментом взрыва β-мартингального решения.

Соотношение (4) можно переписать в координатной форме следующим образом:

$$\begin{cases} y(t) = \psi_0(t), t \in [-h, 0], \\ y(t) = S(t)\psi_0(0) + C(t)\psi_1(0) + \int_0^t C(t-s)v_1(s)ds + \int_0^t C(t-s)u_1(s)d\mathcal{W}(s), t \in [0, \tau), \\ z(t) = \psi_1(t), t \in [-h, 0], \\ z(t) = AC(t)\psi_0(0) + S(t)\psi_1(0) + \int_0^t S(t-s)v_1(s)ds + \int_0^t S(t-s)u_1(s)d\mathcal{W}(s), t \in [0, \tau), \end{cases}$$

при этом $v_1(t) \in F_1(t, y_t)$, $u_1(t) \in G_1(t, y_t)$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in R_+ \times \Omega$.

Будем говорить, что функция $h(t, x, \varphi)$, $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\varphi \in C([-h, 0], R)$, со значениями в R имеет **линейный порядок роста**, если существует постоянная $C_{gr} > 0$, что $| h(t, \varphi) | \leq C_{gr}(1 + \|\varphi\|)$ для любых $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\varphi \in C([-h, 0], R)$.

Функция $h(t, x, \varphi)$, $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\varphi \in C([-h, 0], R)$, со значениями в R называется **локально ограниченной**, если для любого натурального n существует постоянная C_n, такая, что $| h(t, x, \varphi) | \leq C_n$ для любых $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\varphi \in C([-h, 0], R)$, $\|\varphi\| \leq n$.

Теорема 1. *Пусть функции* $f(t, x, \varphi)$ *и* $g(t, x, \varphi)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены;* $u_0(\cdot) \in H^1_\upsilon$, $u_1(\cdot, \cdot) \in C([-h, 0], H^1_\upsilon)$. *Тогда задача (1) – (3) имеет* β*-мартингальное решение.*

Доказательство. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, где $\Omega = [0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$, P – мера Лебега. Определим на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ цилиндрическое L^2_υ-значное броуновское движение $W(t)$,

$t\in R_+$, $W(0)=0$ п. н., с ковариационным оператором Q. Построим поток σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t\in[-h,+\infty)$, порожденный процессом $W(t)$.

Для каждого натурального n определим процесс $X_n(t)=\begin{pmatrix} y_n(t) \\ z_n(t)\end{pmatrix}$, $t\in[-h,+\infty)$, следующим образом:

$$X_n(t)=\begin{cases}\Psi(t\wedge 0), t\in[-h,1/n],\\ P(t-1/n)\Psi(0)+\int\limits_0^{t-1/n}P(t-s)v_n(s)ds+\\ +\int\limits_0^{t-1/n}P(t-s)u_n(s)dW(s), t\in[1/n,+\infty),\end{cases}$$

где $v_n(t)=\mathfrak{f}(t,(y_n)_t)$, $u_n(t)=\mathfrak{g}(t,(y_n)_t)$, $t\in R_+$, $(y_n)_t=\{y_n(t+\tau)\,|\,-h\le\tau\le 0\}\in C([-h,0],H^1_\mathfrak{v})$.

Пусть $\tau_n^m=\inf\left\{t\ge 1/n \,\middle|\, \|X_n(t)\|\ge a_m\right\}$, где $a_m\ge 0$, $a_m\underset{m\to\infty}{\uparrow}+\infty$. Мы полагаем $\inf\varnothing=+\infty$. Определим процессы $X_n^m(t)=X_n(t\wedge\tau_n^m)$, $t\in[-h,+\infty)$, $v_n^m(t)=v_n(t\wedge\tau_n^m)$, $t\in R_+$, $u_n^m(t)=u_n(t\wedge\tau_n^m)$, $t\in R_+$.

Последовательность $X_n^m(\cdot)|_{t\in[-h,T]}$, $n\ge 1$, плотна в $C([-h,+\infty),E_1)$ при каждом фиксированном $m\in N$.

Через $\mathcal{R}$ обозначим метрическое пространство $([0,+\infty],\rho)$, $\rho(\xi,\eta)=\left|\frac{\xi}{\xi+1}-\frac{\eta}{\eta+1}\right|$, где $\frac{+\infty}{+\infty}=1$.

Выберем γ так, что оператор $\mathcal{B}=(\mathcal{A}-\gamma I)^{-1}$ найден всюду на H и ограничен; построим многозначное отображение

$$\Gamma(t,\varphi)=\{(\mathcal{B}u(t,\varphi)Q^{1/2})(\mathcal{B}u(t,\varphi)Q^{1/2})^*\,|\,u(t,\varphi)\in G(t,\varphi)\},(t,\varphi)\in R_+\times C([-h,0],E),$$

и определим процессы

$$w_n^m(t)=(\mathcal{B}u_n^m(t)Q^{1/2})(\mathcal{B}u_n^m(t)Q^{1/2})^*, t\in R_+, n,m\in N,$$

со значениями в пространстве ядерных операторов $L_1(E)$.

Определим последовательность $\Psi_n=\{(X_n^m,\tau_n^m)\}_{m=1}^\infty$, $n\ge 1$, элементы которой принадлежат пространству $S^N=S\times S\times\ldots$, где $S=C([-h,+\infty),E)\times\mathcal{R}$. Обозначим через ρ_1 метрику в S, тогда пространство S^N с метрикой

$$\rho_2((x_1,x_2,\ldots,x_m,\ldots),(y_1,y_2,\ldots,y_m,\ldots))=\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{2^m}(1\wedge\rho_1(x_m,y_m))$$

является полным метрическим сепарабельным.

Последовательность Ψ_n, $n\ge 1$, плотна в (S^N,ρ_2).

По теореме Прохорова из последовательности P^{Ψ_n}, $n\ge 1$, можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, которую для упрощения обозначений снова будем обозначать P^{Ψ_n}. Из теоремы Скорохода вытекает, что существует подпоследовательность n_k последовательности n (которую снова будем обозначать через n), случайные величины $\hat\Psi_n=\{(\hat X_n^m,\hat\tau_n^m)\}_{m=1}^\infty$, $\hat\Psi=\{(\hat X^m,\hat\tau^m)\}_{m=1}^\infty$ со значениями в S^N, определенные на некотором вероятностном пространстве $(\hat\Omega,\hat{\mathcal{F}},\hat P)$, такие, что выполняются следующие условия:

1) $P^{\Psi_n}=P^{\hat\Psi_n}$ $\forall n\in N$;

2) процессы $\hat X_n^m(t)$, $\hat X^m(t)$ непрерывны в E_1, $\hat X_n^m(\cdot)\underset{n\to\infty}{\to}\hat X^m(\cdot)$ в E_1, $\hat\tau_n^m\underset{n\to\infty}{\to}\hat\tau^m$ $\forall m\in N$ п. н.;

3) $\hat\tau_n^m=\inf\{t\ge 0\,|\,\|\hat X_n^{m'}(t)\|\ge a_m\}$ $\forall m'\in m$; $\hat X_n^m(t+\hat\tau_n^m)=\hat X_n^m(\hat\tau_n^m)$ $\forall t>0$ $\forall m,n\in N$;

4) $\hat X^m(t)=\hat X^{m+1}(t)$ при $t\in[-h,\hat\tau^m)$ $\forall m\in N$; $\hat\tau^m\le\hat\tau^{m+1}$ $\forall m\in N$; $\|\hat X^m(\hat\tau^m)\|=a_m$, если $-h<\hat\tau^m<+\infty$.

Определим процесс $\hat X(t)=\hat X^m(t)$ при $t\in[-h,\hat\tau^m)$, $m\in N$, и случайную величину $e=\lim\limits_{m\to\infty}\hat\tau^m$ ($e>0$ п. н.). Таким образом, процесс $\hat X(t)$ определен при всех $t\in[-h,e)$ и имеет непрерывные в E_1 траектории при $t \in [-h, e)$ п. н. Кроме того, $\limsup\limits_{t \uparrow e} \left\| \hat{X}(t) \right\| = \infty$ при $e < +\infty$. Определим процессы $\hat{v}_n^m(t) = \mathfrak{f}(t, (\hat{X}_n^m)_t)$, $\hat{u}_n^m(t) = \mathfrak{g}(t, (\hat{X}_n^m)_t)$, $\hat{w}_n^m(t) = (\mathcal{B}\hat{u}_n^m(t)Q^{1/2})(\mathcal{B}\hat{u}_n^m(t)Q^{1/2})^*$, $t \in R_+$, m, $n \in N$.

Через $\hat{\sigma}_t$ обозначим наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные величины $\hat{X}^m(s)$, $-h \le s \le t$, $m \in N$. Пусть $\hat{\mathcal{F}}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \hat{\sigma}_{t+\varepsilon}$, $t \in [-h, +\infty)$, тогда процесс $\hat{X}$ является $\hat{\mathcal{F}}_t$-согласованным.

При каждом натуральном m последовательности $\hat{v}_n^m(\cdot)$, $\hat{w}_n^m(\cdot)$, $n \ge 1$, относительно слабо компактны соответственно в $L_1([0,T] \times \hat{\Omega}, H)$, $L_1([0,T] \times \hat{\Omega}, L_2^0)$. Существуют подпоследовательности $\hat{v}_{n(1)}^1(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}_{n(1)}^1(t, \hat{\omega})$, сходящиеся слабо соответственно к $\hat{v}^1(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}^1(t, \hat{\omega})$ на $[0, \hat{\tau}^1 \wedge a_1)$. Пусть $\hat{v}_{n(2)}^2(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}_{n(2)}^2(t, \hat{\omega})$ $\hat{X}(t)$ – подпоследовательности последовательностей $\hat{v}_{n(1)}^2(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}_{n(1)}^2(t, \hat{\omega})$, сходящиеся слабо соответственно к $\hat{v}^2(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}^2(t, \hat{\omega})$ на $[\hat{\tau}^1 \wedge a_1, \hat{\tau}^2 \wedge a_2)$. Продолжая этот процесс, для каждого натурального m построим отображения $\hat{v}^m(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}^m(t, \hat{\omega})$, определенные на $[\hat{\tau}^{m-1} \wedge a_{m-1}, \hat{\tau}^m \wedge a_m)$, являющиеся слабыми пределами последовательностей $\hat{v}_{n(m)}^m(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}_{n(m)}^m(t, \hat{\omega})$, $\{n(m)\} \subset \{n(m-1)\} \subset \ldots \subset \{n(1)\} \subset \{n\}$. Для упрощения обозначений подпоследовательность $n(m)$ будем снова обозначать через n. Определим процессы $\hat{v}(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}(t, \hat{\omega})$ таким образом: $\hat{v}(t, \hat{\omega}) = \hat{v}^m(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}(t, \hat{\omega}) = \hat{w}^m(t, \hat{\omega})$ при $(t, \hat{\omega}) \in [\hat{\tau}^{m-1} \wedge a_{m-1}, \hat{\tau}^m \wedge a_m) \times \hat{\Omega}$ $\forall m \in N$ (где $\hat{\tau}^0 = 0, a_0 = 0$); на множестве $[e, +\infty) \times \hat{\Omega}$ положим $\hat{v}(t, \hat{\omega})$, $\hat{w}(t, \hat{\omega})$ равными нулю.

Для любого натурального m и для $(\mu \times \hat{P})$-почти всех $(t, \hat{\omega}) \in [\hat{\tau}^{m-1} \wedge a_{m-1}, \hat{\tau}^m \wedge a_m)$ выполняются включения

$$\hat{v}(t, \hat{\omega}) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} \hat{v}_k^m(t, \hat{\omega}) \subset F(t, (\hat{X}^m)_t(\hat{\omega})), \hat{w}(t, \hat{\omega}) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} \hat{w}_k^m(t, \hat{\omega}) \subset \Gamma(t, (\hat{X}^m)_t(\hat{\omega})).$$

Пусть $v(t)$, $w(t)$ – условные математические ожидания случайных величин $\hat{v}(t)$, $\hat{w}(t)$ относительно σ-алгебры $\hat{\mathcal{F}}_t$, $t \in R_+$.

Для любого натурального m для $(\mu \times \hat{P})$-почти всех $(t, \hat{\omega}) \in [\hat{\tau}^{m-1} \wedge a_{m-1}, \hat{\tau}^m \wedge a_m)$ выполняются включения

$$v(t, \hat{\omega}) \in F(t, (\hat{X}^m)_t(\hat{\omega})), w(t, \hat{\omega}) \in \Gamma(t, (\hat{X}^m)_t(\hat{\omega})).$$

Существует измеримый $\hat{\mathcal{F}}_t$-согласованный процесс $z(t)$, $t \in R_+$, такой, что $z(t)z^*(t) = w(t)$ и $z(t) \in D(\mathcal{B}^{-1})$ $\forall t \in R_+$. Пусть $u(t) = \mathcal{B}^{-1} z(t)$. Процессы $v(t)$, $w(t)$, $u(t)$ являются измеримыми $\hat{\mathcal{F}}_t$-согласованными, и для $(\mu \times \hat{P})$-почти всех $(t, \hat{\omega}) \in [0, e) \times \hat{\Omega}$ выполняются включения $v(t, \hat{\omega}) \in F(t, \hat{X}_t(\hat{\omega}))$, $u(t, \hat{\omega}) \in G(t, \hat{X}_t(\hat{\omega}))$.

Определим процессы

$$\overline{X}_n^m(t) = \begin{cases} \Psi(t), t \in [-h, 0], \\ P(t \wedge \tau_n^m)\Psi(0) + \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} P(t \wedge \tau_n^m - s) v_n^m(s) ds + \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} P(t \wedge \tau_n^m - s) u_n^m(s) dW(s), t \in R_+. \end{cases}$$

С вероятностью 1 для любых натуральных m, n и для любого $t \in [-h, +\infty)$ выполняется равенство

$$\mathcal{A}^{-1} \overline{X}_n^m(t) = \begin{cases} \mathcal{A}^{-1}\Psi(t), t \in [-h, 0], \\ \mathcal{A}^{-1}\Psi(0) + \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} \overline{X}_n^m(s) ds + \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} \mathcal{A}^{-1} v_n^m(s) + \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} \mathcal{A}^{-1} u_n^m(s) dW(s), t \in R_+. \end{cases}$$

Для каждых натуральных m, n определим процесс

$$\overline{N}_n^m(t) = \mathcal{A}^{-1} \overline{X}_n^m(t) - \mathcal{A}^{-1}\Psi(0) - \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} \overline{X}_n^m(s) ds - \int\limits_0^{t \wedge \tau_n^m} \mathcal{A}^{-1} v_n^m(s) ds, t \in R_+,$$

который является $\mathcal{F}_t$-мартингалом с квадратичной вариацией

$$\ll \bar{N}_n^m(t) \gg = \int_0^{t\wedge\tau_n^m} (\mathcal{A}^{-1}u_n^m(s)Q^{1/2})(\mathcal{A}^{-1}u_n^m(s)Q^{1/2})^* ds, t\in R_+,$$

кроме того, для любых $m\in N$, $T\in R_+$ существует постоянная $\gamma=\gamma(m,T)$ такая, что $\sup_n \sup_{t\in[0,T]}\left\|\bar{N}_n^m(t)\right\|^2 \le \gamma$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что для каждого натурального m процесс

$$\hat{N}^m(t) = \mathcal{A}^{-1}\hat{X}^m(t) - \mathcal{A}^{-1}\Psi(0) - \int_0^{t\wedge\hat{\tau}^m} \hat{X}^m(s)ds - \int_0^{t\wedge\hat{\tau}^m} \mathcal{A}^{-1}v(s)ds,\ t\in R_+,$$

является локально квадратично интегрируемым $\hat{\mathcal{F}}_t$-мартингалом с квадратичной вариацией

$$\ll \hat{N}^m(t) \gg = \int_0^{t\wedge\hat{\tau}^m} (\mathcal{A}^{-1}u(s)Q^{1/2})(\mathcal{A}^{-1}u(s)Q^{1/2})^* ds, t\in R_+.$$

Существуют: вероятностное пространство $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ с потоком σ-алгебр $\tilde{\mathcal{F}}_t$, $t\ge -h$, непрерывные процессы $X^m(t,\hat{\omega},\tilde{\omega})$, $t\ge -h$, измеримые процессы $\tilde{v}(t,\hat{\omega},\tilde{\omega})$, $t\in R_+$, $\tilde{u}(t,\hat{\omega},\tilde{\omega})$, $t\in R_+$, случайные величины $\tau^m(\hat{\omega},\tilde{\omega})$, $m\ge 1$, определенные на вероятностном пространстве $(\hat{\Omega}\times\tilde{\Omega},\hat{\mathcal{F}}\times\tilde{\mathcal{F}},\hat{P}\times\tilde{P}) = (\tilde{\tilde{\Omega}},\tilde{\tilde{\mathcal{F}}},\tilde{\tilde{P}})$, такие, что процессы X^m, $\tilde{v}$, $\tilde{u}$ согласованы с потоком $\hat{\mathcal{F}}_t\times\tilde{\mathcal{F}}_t=\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t$, $t\ge -h$, и $X^m(t,\hat{\omega},\tilde{\omega}) = \hat{X}^m(t,\hat{\omega})$, $t\ge -h$, $(\hat{\omega},\tilde{\omega})\in\hat{\Omega}\times\tilde{\Omega}$, $\tilde{v}(t,\hat{\omega},\tilde{\omega}) = v(t,\hat{\omega})$, $t\in R_+$, $(\hat{\omega},\tilde{\omega})\in\hat{\Omega}\times\tilde{\Omega}$, $\tilde{u}(t,\hat{\omega},\tilde{\omega}) = u(t,\hat{\omega})$, $t\in R_+$, $(\hat{\omega},\tilde{\omega})\in\hat{\Omega}\times\tilde{\Omega}$, $\tau^m(\hat{\omega},\tilde{\omega}) = \hat{\tau}^m(\hat{\omega})$, $(\hat{\omega},\tilde{\omega})\in\hat{\Omega}\times\tilde{\Omega}$; последовательность $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t$-согласованных Q-винеровских процессов $\tilde{W}^m(t)$, $\tilde{W}^m(0)=0$ п. н., заданных на $(\tilde{\tilde{\Omega}},\tilde{\tilde{\mathcal{F}}},\tilde{\tilde{P}})$ со значениями в U, таких, что $\tilde{W}^{m_1}(t)=\tilde{W}^{m_2}(t)$ для любых $t\in[0,\tau^{m_1})$, m_1, $m_2\in N$, $m_1\le m_2$; локально квадратично интегрируемый $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t$-мартингал $N^m(t,\hat{\omega},\tilde{\omega}) = \hat{N}^m(t,\hat{\omega})$, $t\in R_+$, $(\hat{\omega},\tilde{\omega})\in\hat{\Omega}\times\tilde{\Omega}$, который может быть представлен как стохастический интеграл

$$N^m(t,\hat{\omega},\tilde{\omega}) = \int_0^{t\wedge\tau^m(\hat{\omega},\tilde{\omega})} \mathcal{A}^{-1}\tilde{u}(s,\hat{\omega},\tilde{\omega})d\tilde{W}^m(s,\hat{\omega},\tilde{\omega}).$$

Пусть $\zeta=\lim_{m\to\infty}\tau^m$, $X(t)=X^m(t), t\in[-h,\tau^m)$. Существует $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t$-согласованный Q-винеровский процесс $\tilde{W}(t)$, $\tilde{W}(0)=0$ п. н., такой, что $\tilde{W}(t)=\tilde{W}^m(t)$ $\forall t\in[0,\tau^m)$ $\forall m\in N$. Процессы $X(t)$, $\tilde{v}(t)$, $\tilde{u}(t)$ являются измеримыми $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t$-согласованными, процесс $X(t)$ имеет непрерывные в E_1 траектории до момента ζ п. н., для $(\mu\times\tilde{\tilde{P}})$-почти всех $(t,\tilde{\tilde{\omega}})\in[0,\zeta)\times\tilde{\tilde{\Omega}}$ выполняются включения $\tilde{v}(t,\tilde{\tilde{\omega}})\in F(t,X_t(\tilde{\tilde{\omega}}))$, $\tilde{u}(t,\tilde{\tilde{\omega}})\in G(t,X_t(\tilde{\tilde{\omega}}))$.

С вероятностью 1 для всех $t\in R_+$ выполняется равенство

$$X^m(t) = X^m(0) + \mathcal{A}\left(\int_0^{t\wedge\tau^m} X^m(s)ds\right) + \int_0^{t\wedge\tau^m}\tilde{v}(s)ds + \int_0^{t\wedge\tau^m}\tilde{u}(s)d\tilde{W}(s).$$

Таким образом, с вероятностью 1 для любого $t\in[0,\zeta)$ имеет место соотношение

$$X(t) = P(t)X(0) + \int_0^t P(t-s)\tilde{v}(s)ds + \int_0^t P(t-s)\tilde{u}(s)d\tilde{W}(s).$$

Следовательно, $(\tilde{\tilde{\Omega}},\tilde{\tilde{\mathcal{F}}},\tilde{\tilde{P}},\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_t,\tilde{W}(t),X(t),\tilde{v}(t),\tilde{u}(t),\zeta)$ – β-мартингальное решение задачи (1) – (3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(t,x,\varphi)$ *и* $g(t,x,\varphi)$ *измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста;* $u_0(\cdot)\in H_\mathfrak{v}^1$, $u_1(\cdot,\cdot)\in C([-h,0],H_\mathfrak{v}^1)$. *Тогда для любого* β-*мартингального решения задачи (1) – (3) момент взрыва равен бесконечности почти наверное.*

Доказательство. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, \mathcal{W}(t), X(t), v(t), u(t), \tau)$ – β-мартингальное решение задачи (1) – (3). Существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|\mathfrak{f}(t,\varphi)\| + \|\mathfrak{g}(t,\varphi)\| \le C(1+\|\varphi\|)$ для любых $t \in R_+$, $\varphi \in C([-h,0], H^1_\mathfrak{v})$. Кроме того, $\alpha(F(t,\varphi),0) + \alpha(G(t,\varphi),0) \le C(1+\|\varphi\|)$ для любых $t \in R_+$, $\varphi \in C([-h,0], H^1_\mathfrak{v})$.

С вероятностью 1 для всех $t \in [0,\tau)$ выполняется равенство

$$X(t) = P(t)\Psi(0) + \int_0^t P(t-s)v(s)ds + \int_0^t P(t-s)u(s)d\mathcal{W}(s).$$

Пусть $\tau_m = \inf\left\{t \in R_+ \middle| \|X(t)\| > m\right\}$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $T \in R_+$

$$\lim_{m\to\infty} P\{\tau_m \le T\} = 0. \tag{5}$$

Для любого $T \in R_+$ существует постоянная $M_T > 0$, такая, что $\sup_{t\in[0,T]}\|P(t)\| \le M$.

Выберем и зафиксируем произвольное $T \in R_+$. Из соотношения (5) вытекает, что для любого $m \in N$, любого момента остановки $\sigma \le T \wedge \tau_m$ и любого $t \in R_+$ выполняется неравенство

$$E\left(\|X(t\wedge\sigma)\|\right)^2 \le 3M_T^2\|\Psi(0)\|^2 + 6C^2T + 6C^2E\left(\int_0^{t\wedge\sigma}\|X(s)\|^2 ds\right).$$

Используя неравенство Гронуолла, заключаем, что

$$E\left(\|X(\sigma)\|^2\right) \le \left(3M_T^2\|\Psi(0)\|^2 + 6C^2T\right)\exp(6C^2T) = L_T. \tag{6}$$

Полагая в равенстве (6) $\sigma = T \wedge \tau_m \wedge \inf\left\{t \in R_+ \middle| \|X(t)\|^2 \ge r\right\}$, $r > 0$, и учитывая неравенство Чебышева и равенство

$$\left\{\omega \middle| \sup_{t\le T\wedge\tau_m}\|X(t)\|^2 \ge r\right\} = \left\{\omega \middle| \|X(\sigma)\|^2 \ge r\right\},$$

заключаем, что для любого $r > 0$ справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{t\le T\wedge\tau_m}\|X(t)\|^2 \ge r\right\} \le \frac{L_T}{r}.$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} P\left\{\sup_{t\le T\wedge\tau_m}\|X(t)\|^2 \ge m^2\right\} = 0.$$

Из последнего соотношения и вытекает требуемое равенство (5). Теорема доказана.

1. Peszat S., Zabczyk J. // Probab. Theory Related Fields. 1998. Vol. 116. P. 421.
2. Taniguchi T., Liu K., Truman A. // J. Differential Equations. 2002. Vol. 181. № 1. P. 72.
3. Ondrejat M. // Stochastics and Dynamics. 2006. Vol. 6. № 1. P. 23.

Поступила в редакцию 21.04.11.

Максим Михайлович Васьковский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.