$= \quad {}_t$

УДК 513.6

А.А. БОНДАРЕНКО

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ ТЕРНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be nonsingular quadratic forms over field K having dimension m and n, char $K \neq 2$. The following problem of a birational composition $f(X)$ and $g(Y)$ is considered: under which conditions the $f(X)\cdot g(Y)$ is birationaly equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ of dimension $m+n$ over K. The solution of the problem of a birational composition for quadratic forms over K in the case $m = n = 3$ is obtained.

Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $Z = (z_1, \ldots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K, $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над полем K.

Определение. Если произведение $f(X)\cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K, т. е. $f(X)\cdot g(Y)$ представляется квадратичной K-формой $h(Z)$ над $K(X, Y)$ и $x_i, y_j \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о «сумме квадратов»: найти наименьшее t при заданных m и n, чтобы выполнялось тождество $(x_1^2 + \ldots + x_m^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_t^2$, где Φ_i – билинейные формы от $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ над K. Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1, 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам изучения такой композиции квадратичных форм. Пфистер продолжил рассматривать такие тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4]. В [5] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K. Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями получено в [6], над конечными полями – в [7].

Основная цель настоящей статьи – получить полное решение проблемы бирациональной композиции тернарных квадратичных форм над полем K.

Полное решение проблемы бирациональной композиции бинарных квадратичных форм над произвольным полем K получено автором в [6].

Решение проблемы бирациональной композиции тернарных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$, если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над K, следует из теоремы 1 статьи [5]: бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K всегда существует и в качестве $h(Z)$ подходит любая квадратичная форма размерности 6, невырожденная часть которой изотропна.

Полное решение проблемы бирациональной композиции тернарных квадратичных форм, когда обе квадратичные формы анизотропные над K, дает

Теорема. *Бирациональная композиция* $h(Z)$ *анизотропных над* K *тернарных квадратичных форм* $f(X)$ *и* $g(Y)$ *существует тогда и только тогда, когда* $f(X)$ *и* $g(Y)$ *эквивалентны с точностью до множителя над К. И если* $g(Y)\sim\lambda f(X)$, *где* $\lambda\in K$, $f(X)=a(x_1^2-\alpha x_2^2-\beta x_3^2)$, *то с точностью до К-эквивалентности* $h(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\lambda a^2(z_1^2-\alpha z_2^2-\beta z_3^2+\alpha\beta z_4^2)$.

Основные понятия и обозначения традиционные (см. [8–10]).

1. Докажем два утверждения, которые будем использовать при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть* $f(x)=x_1^2-\alpha x_2^2-\beta_1 x_3^2$ и $g(y)=y_1^2-\alpha y_2^2-\beta_2 y_3^2$ *– анизотропные тернарные квадратичные формы, имеющие общую подформу* $\psi=<1,-\alpha>$, *образуют бирациональную композицию* $h(Z)$ *над К. Тогда* $\psi(x_1,x_2)+\beta_1\psi(y_1,y_2)$ *и* $\psi(x_1,x_2)+\beta_2\psi(y_1,y_2)$ *– подформы* $h(Z)$.

Доказательство. Из леммы 1 статьи [5] следует, что невырожденная часть $h_1(Z)$ квадратичной формы $h(Z)$ содержит в качестве подформы $\psi=<1,-\alpha>$ и $\beta_1,\beta_2\in D_k(h_1)$. Рассмотрим пфистерову квадратичную форму $\psi(x_1,x_2)+\beta_1\psi(y_1,y_2)$. Покажем, что она – подформа h_1, т. е. $\psi(x_1,x_2)+\beta_1\psi(y_1,y_2)\in D_{k(x_1,x_2,y_1,y_2)}h_1$. $\psi(x_1,x_2)+\beta_1\psi(y_1,y_2)=\psi(y_1,y_2)(\psi(x_1,x_2)\psi^{-1}(y_1,y_2)+\beta_1)$. Так как $\psi=<1,-\alpha>$ – пфистерова квадратичная форма, то $\psi(x_1,x_2)\psi^{-1}(y_1,y_2)\in D_{k(x_1,x_2,y_1,y_2)}\psi$, ибо множество значений $D_{k(x_1,x_2,y_1,y_2)}\psi$ – группа (см. [10, теорема 4.1]). Далее $\psi(x_1,x_2)\psi^{-1}(y_1,y_2)+\beta_1\in D_{k(x_1,x_2,y_1,y_2)}f$, ибо $\psi(x_1,x_2)\psi^{-1}(y_1,y_2)\in D_{k(x_1,x_2,y_1,y_2)}\psi$ и третью переменную в $f(X)$ полагаем 1. Следовательно, $\psi(x_1,x_2)+\beta_1\psi(y_1,y_2)=\psi(y_1,y_2)(\psi(x_1,x_2)\psi^{-1}(y_1,y_2)+\beta_1)\in D_{k(X,Y)}gf\subset D_{k(X,Y)}h_1$, где $X=(x_1,x_2,x_3)$ и $Y=(y_1,y_2,y_3)$, ибо $\psi(y_1,y_2)\in D_{k(y_1,y_2)}g$. Последнее включение справедливо, ибо $g(Y)f(X)\in D_{k(X,Y)}h_1$. Аналогично доказывается, что пфистерова квадратичная форма $\psi(x_1,x_2)+\beta_2\psi(y_1,y_2)$ – подформа $h(Z)$. И лемма 1 доказана.

На заключительном этапе доказательства теоремы будет использована

Лемма 2. *Пусть* $f(x)=x_1^2-\alpha_1 x_2^2$ *и* $g(y)=y_1^2-\alpha_2 y_2^2-\beta_2 y_3^2$ *– анизотропные квадратичные формы над* K, $d=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\notin K^{x^2}$. $g(Y)$ *изотропна над* $L=K(\sqrt{d})$ *тогда и только тогда, когда* $\beta_2\in D_K<1,-\alpha_1>D_K<1,-\alpha_2>$.

Доказательство. Пусть $g(Y)$ изотропна над L, следовательно, $\beta_2=(a_1+a_2\sqrt{d})^2-$ $-\alpha_2(b_1+b_2\sqrt{d})^2=(a_1^2-\alpha_2 b_1^2)+d(a_2^2-\alpha_2 b_2^2)$ и $a_1a_2=\alpha_2 b_1 b_2$, т. е. $\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{1}{\alpha_2}\dfrac{a_1}{b_1}$, где $a_1,a_2,b_1,b_2\in K$. Далее

$$\beta_2=(a_1^2-\alpha_2 b_1^2)+da_2^2(1-\alpha_2\frac{b_2^2}{a_2^2})=(a_1^2-\alpha_2 b_1^2)+da_2^2(1-\frac{a_1^2}{\alpha_2 b_1^2})=(a_1^2-\alpha_2 b_1^2)(1-\frac{da_2^2}{\alpha_2 b_1^2})=$$

$$=(a_1^2-\alpha_2 b_1^2)(1-\frac{\alpha_1 a_1^2}{\alpha_2^2 b_1^2})=(a_1^2-\alpha_2 b_1^2)(1-\alpha_1(\frac{a_1}{\alpha_2 b_1})^2)\in D_K<1,-\alpha_2>D_K<1,-\alpha_1>.$$

И необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $\beta_2=\gamma_1\gamma_2$, где $\gamma_1\in D_K<1,-\alpha_1>$, $\gamma_2\in D_K<1,-\alpha_2>$. Квадратичная форма $\gamma_2 g(Y)=\gamma_2(y_1^2-\alpha_2 y_2^2)-\gamma_1\gamma_2^2 y_3^2$ эквивалентна над K квадратичной форме $y_1^2-\alpha_2 y_2^2-\gamma_1 y_3^2$, ибо $\gamma_2(y_1^2-\alpha_2 y_2^2)\sim y_1^2-\alpha_2 y_2^2$, так как $<1,-\alpha_2>$ – пфистерова форма и $D_K<1,-\alpha_2>=G_K<1,-\alpha_2>$ (см. [10, теорема 4.1]).

Квадратичная форма $y_1^2-\alpha_2 y_2^2-\gamma_1 y_3^2=y_1^2-\alpha_1(\dfrac{1}{\sqrt{d}})^2 y_2^2-\gamma_1 y_3^2$ эквивалентна над L $y_1^2-\alpha_1 y_2^2-\gamma_1 y_3^2$.

Но $\gamma_1\in D_K<1,-\alpha_1>$, следовательно, последняя квадратичная форма $y_1^2-\alpha_1 y_2^2-\gamma_1 y_3^2$ изотропна над *К*. Поэтому исходная квадратичная форма $\gamma_2 g(Y)$ изотропна над L, значит, над L изотропна и квадратичная форма $g(Y)$.

И лемма 2 доказана.

2. Доказательство теоремы. Докажем достаточность условия теоремы. Пусть $g(Y)$ эквивалентна над K $\lambda f(X)$. $f(X)$ – любая анизотропная тернарная квадратичная форма над K, с точностью до эквивалентности над K ее можно считать равной $a(x_1^2-\alpha x_2^2-\beta x_3^2)$. Тогда $g(y)=$ $=\lambda a(y_1^2-\alpha y_2^2-\beta y_3^2)$ и $f(X)g(Y)=\lambda a^2(x_1^2-\alpha x_2^2-\beta x_3^2)(y_1^2-\alpha y_2^2-\beta y_3^2)=\lambda a^2[(x_1y_1+\alpha x_2y_2+\beta x_3y_3)^2-$ $-\alpha(x_2y_1+x_1y_2)^2-\beta(x_3y_1+x_1y_3)^2+\alpha\beta(x_2y_3-x_3y_2)^2]=\lambda a^2(z_1^2-\alpha z_2^2-\beta z_3^2+\alpha\beta z_4^2)$, где

$$\begin{cases} z_1=x_1y_1+\alpha x_2y_2+\beta x_3y_3, \\ z_1=x_2y_1+x_1y_2, \\ z_2=x_3y_1+x_1y_3, \\ z_4=x_2y_3-x_3y_2, \\ z_5=x_1, \\ z_6=x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Из (1) получаем $x_1=z_5$, $x_2=z_6$ и x_3 получаем из уравнения $-x_3z_2+x_2z_3-x_1z_4=0$, которое легко проверяется непосредственным вычислением, что $x_3=\dfrac{z_6z_3-z_5z_4}{z_2}$, т. е. x_1, x_2 и x_3 рационально выражается через z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6. Далее из (1) получаем, например из первых трех равенств по правилу Крамера, рациональное выражение y_1, y_2 и y_3 через z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6. Это и доказывает бирациональную эквивалентность над K $f(X)\cdot g(Y)$ и $h(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\lambda a^2(z_1^2-\alpha z_2^2-\beta z_3^2+\alpha\beta z_4^2)$, т. е. бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ существует.

Из теоремы 2 статьи [5] следует, что если анизотропные квадратичные формы образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над K, то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до эквивалентности над K. Поэтому в нашем случае $h(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\lambda a^2(z_1^2-\alpha z_2^2-\beta z_3^2+\alpha\beta z_4^2)$ определена однозначно с точностью до K-эквивалентности. Это доказывает заключительную часть теоремы при выполнении условия существования бирациональной композиции.

Докажем необходимость. Пусть существует бирациональная композиция тернарных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$. Если $f(X)$ либо $g(Y)$ заменить на эквивалентную с точностью до множителя над K, то композиция измененных квадратичных форм также будет существовать и за результатом изменения $h(Z)$ легко проследить. По этой причине теорему достаточно доказывать для квадратичных форм $f(x)=x_1^2-\alpha_1x_2^2-\beta_1x_3^2$ и $g(y)=y_1^2-\alpha_2y_2^2-\beta_2y_3^2$ для упрощения рассуждений.

Пусть $h(Z)$ – бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K и $h_1(Z)$ – невырожденная часть $h(Z)$. Обозначим через V_f, V_g и V – квадратичные пространства, соответствующие квадратичным формам $f(X)$, $g(Y)$ и $h_1(Z)$. Так как $1\in D_K(f)$ и $1\in D_K(g)$, то согласно лемме 1 из [5] $f(X)\in D_{K(X)}h_1$ и $g(Y)\in D_{K(Y)}h_1$, и, следовательно (см. [10, теорема 2.1]), $f(X)$ и $g(Y)$ подформы h_1. Поэтому $V_f,V_g\subset V$. Рассмотрим все варианты пересечения V_f и V_g.

Случай 1. $\dim V_f\cap V_g=3$, т. е. $V_f=V_g$. Это означает, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны над K и в этом случае все очевидно.

Случай 2. $\dim V_f\cap V_g=2$, т. е. $f(X)$ и $g(Y)$ имеют общую подформу ψ размерности 2. Подформа $<1>$ общая для $f(X)$ и $g(Y)$, поэтому можно считать $\psi=<1,-\alpha>$, а $f(X)=x_1^2-\alpha x_2^2-\beta_1x_3^2$ и $g(Y)=y_1^2-\alpha y_2^2-\beta_2y_3^2$. В этом случае из леммы 1 следует, что квадратичные формы $f_1=x_1^2-\alpha x_2^2-\beta_1x_3^2+\alpha\beta_1x_4^2$ и $g_1=y_1^2-\alpha y_2^2-\beta_2y_3^2+\alpha\beta_2y_4^2$ являются подформами h_1. Пусть V_1 и V_2 – квадратичные пространства, соответствующие квадратичным формам f_1 и g_1. Как следует из рассуждений выше, $V_1,V_2\subset V$.

Рассмотрим возможности для V_1 и V_2. Если $V_1=V_2$, то квадратичная форма f_1 эквивалентна g_1 над K. Покажем, что в этом случае квадратичные формы f и g эквивалентны с точностью до множителя над K. В самом деле

$$f_1 \sim f \oplus <\alpha\beta_1>,$$
$$g_1 \sim g \oplus <\alpha\beta_2>, \tag{2}$$

квадратичные формы f_1 и g_1 пфистеровы и $\alpha\beta_1 \in D_K(f_1)$, $\alpha\beta_2 \in D_K(g_1)$, поэтому (см. [10, теорема 3.4]) $\alpha\beta_1 \in G_K(f_1)$, $\alpha\beta_2 \in G_K(g_1)$. А отсюда из (2) следует

$$f_1 \sim (\alpha\beta_1)f_1 \sim (\alpha\beta_1)f \oplus <1>,$$
$$g_1 \sim (\alpha\beta_2)g_1 \sim (\alpha\beta_2)g \oplus <1>. \tag{3}$$

Из (3) по теореме упрощения (см. [8, теорема 4, гл. IV]) получаем $(\alpha\beta_1)f \sim (\alpha\beta_2)g$, т. е. f и g эквивалентны с точностью до множителя над *K*.

Если $\dim V_1 \cap V_2 = 3$, то квадратичную форму, соответствующую пересечению, обозначим τ.

Имеем, что

$$f_1 \sim f \oplus <\alpha\beta_1>,$$
$$f_1 \sim \tau \oplus <a> \tag{4}$$

и

$$g_1 \sim g \oplus <\alpha\beta_2>,$$
$$g_1 \sim \tau \oplus <b>. \tag{5}$$

Вспомним, что f_1 и g_1 пфистеровы квадратичные формы. Следовательно, повторяя только что приведенное рассуждение, из (4) получим, что $f \sim \lambda_1\tau$, $\lambda_1 \in K$, и из (5) $g \sim \lambda_2\tau$, $\lambda_2 \in K$. А значит, квадратичные формы f и g эквивалентны с точностью до множителя из *K*.

И последняя возможность в этом случае для V_1 и V_2: $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, ибо $V_1 \cap V_2 \supset V_f \cap V_g$. В этом случае $V_1 + V_2 = V$, ибо $\dim V \le 6$, а $\dim V_1 + V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2 = 4 + 4 - 2 = 6$. Покажем, что такого не может быть.

Пусть $f_1 = <1, -\alpha, -\beta_1, \alpha\beta_1>$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 из V_1, $g_1 = <1, -\alpha, -\beta_2, \alpha\beta_2>$ в базисе e_1, e_2, u_3, u_4 из V_2. $V_1 + V_2 = V$. Поэтому $e_1, e_2, e_3, e_4, u_3, u_4$ – базис V, и в этом базисе квадратичная форма $h_1 = z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta_1 z_3^2 + \alpha\beta_1 z_4^2 - \beta_2 z_5^2 + \alpha\beta_2 z_6^2$. Покажем, что $\alpha \notin D_K <1, -\beta_1> D_K <1, -\beta_2>$.

Если $\alpha = \gamma_1\gamma_2$, где $\gamma_1 \in D_K <1, -\beta_1>$, $\gamma_2 = \alpha\gamma_1^{-1} \in D_K <1, -\beta_2>$. Имеем $\gamma_1^{-1} h_1(Z) \sim z_1^2 - \alpha\gamma_1^{-1} z_2^2 - \beta_1 z_3^2 - \alpha\beta_1\gamma_1^{-1} z_4^2 - \beta_2\gamma_1^{-1} z_5^2 + \alpha\beta_2\gamma_1^{-1} z_6^2 = z_1^2 - \alpha\gamma_1^{-1}(z_2^2 - \beta_2 z_6^2) - \beta_1 z_3^2 - \alpha\beta_1\gamma_1^{-1} z_4^2 - \beta_2\gamma_1^{-1} z_5^2 \sim z_1^2 - z_2^2 + \beta_2 z_6^2 - \beta_1 z_3^2 - \alpha\beta_1\gamma_1^{-1} z_4^2 - \beta_2\gamma_1^{-1} z_5^2$, учитывая, что $\gamma_1^{-1} \in D_K <1, -\beta_1> = G_K <1, -\beta_1>$ для получения первой эквивалентности и $\gamma_2 = \alpha\gamma_1^{-1} \in D_K <1, -\beta_2> = G_K <1, -\beta_2>$ – для получения второй. Очевидно, последняя квадратичная форма изотропна над *K*, а значит, изотропна и квадратичная форма $h_1(Z)$, а это не так по теореме 2 из [5]. Противоречие мы получили, положив, что $\alpha \in D_K <1, -\beta_1> D_K <1, -\beta_2>$. Следовательно, $\alpha \notin D_K <1, -\beta_1> D_K <1, -\beta_2>$, а тогда согласно лемме 2 квадратичные формы $f(X) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta_1 x_3^2$ и $g(Y) = y_1^2 - \alpha y_2^2 - \beta_2 y_3^2$ анизотропны над $L = K\left(\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\right)$. Квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны над L, поэтому согласно достаточному условию теоремы, которое уже доказано, существует их бирациональная композиция над L, и она ранга 4. А поэтому бирациональная композиция $h(Z)$ над K квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ ранга 4, ибо она эквивалентна над L бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$ над L согласно теореме 2 из [5]. По этой причине, если существует бирациональная композиция $h(Z)$ для $f(X)$ и $g(Y)$ над *K*, то не может быть $\dim V_1 \cap V_2 = 2$, ибо, как мы видели, это влечет то, что ранг $h(Z)$ равен 6.

Случай 3. $\dim V_f \cap V_g = 1$. Он последний, ибо квадратичная форма $<1>$ является подформой и $f(X)$, и $g(Y)$. Покажем, что если $f(X)$ и $g(Y)$ обладают бирациональной композицией над *K*, то такого не может быть.

В самом деле $V_f + V_g \subset V$ и $\dim V_f + V_g = 3 + 3 - 1 = 5$. Пусть $f(X) = x_1^2 - \alpha_1 x_2^2 - \beta_1 x_3^2$ в базисе e_1, e_2, e_3 пространства V_f и $g(Y) = y_1^2 - \alpha_2 y_2^2 - \beta_2 y_3^2$ в базисе e_1, u_2, u_3 пространства V_g. Квадратичная форма, соответствующая квадратичному пространству $V_f + V_g$ в базисе e_1, e_2, e_3, u_2, u_3, есть $\varphi = z_1^2 - \alpha_1 z_2^2 - \beta_1 z_3^2 - \alpha_2 z_4^2 - \beta_2 z_5^2$. φ – подформа $h(Z)$ и ранга 5.

Докажем, что в этом случае $\beta_1 \notin D_K < 1, -\alpha_1 > D_K < 1, -\alpha_2 >$, $\beta_2 \notin D_K < 1, -\alpha_1 > D_K < 1, -\alpha_2 >$.

Положим $\beta_2 = s_1 s_2$, где $s_1 \in D_K < 1, -\alpha_1 >$ и $s_2 = s_1^{-1}\beta_2 \in D_K < 1, -\alpha_2 >$. $< 1, -\alpha_2 >$ – пфистерова квадратичная форма, поэтому $s_2^{-1} \in D_K < 1, -\alpha_2 >= G_K < 1, -\alpha_2 >$. Следовательно, $s_2^{-1} g = s_2^{-1}(y_1^2 - \alpha_2 y_2^2) - -s_2^{-1}\beta_2 y_3^2 \sim y_1^2 - \alpha_2 y_2^2 - s_1 y_3^2$. Очевидно, бирациональная композиция $q(U)$ над K квадратичных форм $s_2^{-1} g(Y)$ и $f(X)$ существует и эквивалентна $h(Z)$ с точностью до множителя над *K*. Размерность пересечения квадратичных пространств V_f и $V_{s_2^{-1}g}$, соответствующего квадратичной форме $s_2^{-1} g$, равна 1. В противном случае она больше 1, и ранг бирациональной композиции $q(U)$ из предыдущих рассуждений равен 4. А тогда и ранг $h(Z)$ равен 4 и у нее не может быть подформы φ ранга 5. Поэтому $\dim V_f + V_{s_2^{-1}g} = 5$. И аналогично, квадратичная форма, соответствующая квадратичному пространству $V_f + V_{s_2^{-1}g}$ в подходящем базисе, равна $\psi = u_1^2 - \alpha_1 u_2^2 - \beta_1 u_3^2 - \alpha_2 u_4^2 - s_1 u_5^2$. Она – подформа анизотропной формы $q(U)$, $q(U)$ анизотропна согласно теореме 2 из [5]. Но квадратичная форма ψ изотропна над *K*, ибо $D_K < 1, -\alpha_1 > \ni s_1 = a^2 - \alpha_1 b^2$, где $a, b \in K$, и ψ при $u_1 = a$, $u_2 = b$ и $u_5 = 1$, $u_3 = u_4 = 0$ обращается в 0. Получили противоречие, ибо у анизотропной формы не может быть изотропной подформы. Оно получилось из предположения, что $\beta_2 \in D_K < 1, -\alpha_1 > D_K < 1, -\alpha_2 >$. Аналогично получим противоречие, если положим $\beta_1 \in D_K < 1, -\alpha_1 > D_K < 1, -\alpha_2 >$.

По этой причине из леммы 2 получаем, что $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над $L = K\left(\sqrt{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right)$. $f(X)$ и $g(Y)$ имеют над L общую подформу размерности 2, и есть бирациональная композиция $h(Z)$ над K (она же бирациональная композиция и над L). А как мы видели, если $\dim V_f \cap V_g \geq 2$, то бирациональная композиция этих форм ранга 4. И такого быть не может, чтобы у $h_1(Z)$ была подформа φ ранга 5. Противоречие и показывает, что $\dim V_f \cap V_g \geq 2$, если существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K.

И теорема полностью доказана.

1. Hurwitz A. // Math. Ann. 1923. Bd. 88. № 1-2. S. 1.
2. Radon J. // Abh. Math. Sem. Univ. Humburg, 1922. Bd. 1. № 1. S. 1.
3. Lam K. Y. // Quadratic and Hermition Forms (Hamilton, Ont., 1983). CMS Conf., Proc. Providence. 1984. Vol. 4. P. 173.
4. Pfister A. // Arch. Math. (Basel). 1965. Bd. 16. № 1. S. 363.
5. Бондаренко А. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56.
6. Бондаренко А. А. // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 661.
7. Бондаренко А. А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 3. С. 90.
8. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М., 1972.
9. Lam T. Y. Algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.
10. Knebusch M., Scharlau W. Algebraic Theory of Quadratic Forms. Generic methods and Pfister forms. DMV Sem. 1. Birkhäuser. Boston, 1980.

Поступила в редакцию 24.03.11.

Александр Адамович Бондаренко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации.