

УДК 519. 216

Н.Н. ТРУШ, А.В. КУЗЬМИНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА CGMY

A new algorithm of CGMY process as two tempered stable processes difference are considered.

Процесс CGMY и его свойства изучены в работе [1]. Процесс CGMY применяется в качестве процесса, описывающего эволюцию логарифмических доходностей финансовых активов [1, 2] в модели Леви:

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t r \, ds + X_t\right)$$

где $S = (S_t)_{t \geq 0}$ – процесс цен акции, $S_0 > 0$, $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – процесс CGMY, $r > 0$ – заданная процентная ставка.

Введем определения, используемые при моделировании процесса CGMY.

Определение 1. Распределение F называется CGMY-распределением с параметрами $C > 0$, G , $M > 0$, $Y < 2$, если его характеристическая функция имеет вид [1, 2]

$$\varphi(u) = \exp(C\Gamma(-Y)((M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y)), \quad u \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

а $\Gamma(x) = \int_0^\infty z^{x-1} e^{-z} dz$ – гамма-функция, $x > 0$. Случайную величину ξ с CGMY-распределением будем обозначать $\xi \sim CGMY(C, G, M, Y)$.

Определение 2. Случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с параметрами $C > 0$, $G > 0$, $M > 0$, $Y < 2$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в $\mathbb{R}$, называется процессом CGMY Леви, если выполнены следующие условия:

- 1) $X_0 = 0$;
- 2) X имеет независимые и стационарные приращения;
- 3) приращения X имеют CGMY-распределение, т. е. для любых $s \geq 0, t \geq 0$

$$X_{s+t} - X_s \sim CGMY(Ct, G, M, Y).$$

Мера Леви процесса CGMY имеет вид [1, 2]

$$\nu_{CGMY}(x) = C \left[\frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} 1_{x>0} + \frac{e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0} \right],$$

где

$$1_A(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin A, \\ 1, & \text{если } y \in A, \end{cases}$$

– индикаторная функция.

Определение 3. Распределение F называется медленно растущим устойчивым распределением с параметрами $a > 0$, $b > 0$, $0 < k < 1$, если его характеристическая функция имеет вид [2]

$$\varphi(u) = \exp(ab - a(b^{1/k} - 2iu)^k).$$

Случайную величину η с медленно растущим устойчивым распределением будем обозначать $\eta \sim TS(a, b, k)$.

Определение 4. Случайный процесс $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ с параметрами $a > 0$, $b > 0$, $0 < k < 1$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ со значениями в $\mathbb{R}$, называется медленно растущим устойчивым процессом Леви, если выполнены следующие условия:

- 1) $Z_0 = 0$;
- 2) Z имеет независимые и стационарные приращения;
- 3) приращения Z имеют медленно растущее устойчивое распределение, т. е. для любых $s \geq 0, t \geq 0$

$$Z_{s+t} - Z_s \sim TS(at, b, k).$$

Мера Леви медленно растущего устойчивого процесса имеет вид [2]

$$\nu_{TS}(x) = a2^k \frac{k}{\Gamma(1-k)} x^{-k-1} \exp\left(-\frac{1}{2}b^{1/k}x\right) 1_{x>0}. \quad (2)$$

В [3, 4] доказано, что процесс CGMY с параметрами $C > 0$, $G > 0$, $M > 0$, $Y < 2$ может быть образован из винеровского процесса с помощью случайной замены времени неотрицательным неубывающим $Y/2$ -устойчивым процессом Леви, который называют устойчивым субординатором, т. е.

$$X_t = AS_t + W(S_t),$$

где $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени S_t , $S = (S_t)_{t \geq 0}$ –

$Y/2$ -устойчивый процесс Леви, независимый от винеровского процесса, $A = \frac{G-M}{2}$.

Алгоритм моделирования процесса CGMY состоит из следующей последовательности шагов.

Алгоритм 1.

1. Положим шаг моделирования равным $\Delta t C$, $0 < \Delta t < 1$.

2. Положим $A = \frac{G-M}{2}$, $B = \frac{G+M}{2}$.

3. Генерируем $Y/2$ -устойчивый процесс Леви $S = (S_t)_{t \geq 0}$.

3.1. Положим $d = \frac{\varepsilon^{1-\frac{Y}{2}}}{1-\frac{Y}{2}}$, $\lambda = \frac{2}{Y} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{Y}{2}}}$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

3.2. Генерируем моменты появления скачков как

$$T_j = \sum_{i=1}^j t_i,$$

где $t_i = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u_{1i})$, u_{1i} , $i \geq 1$, – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные числа.

3.3. Генерируем величины скачков как

$$y_j = \frac{\varepsilon}{(1 - u_{2j})^{\frac{Y}{2}}},$$

где u_{2j} , $j \geq 1$, – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные числа.

3.4. Генерируем $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ следующим образом:

$$S_t = dtC\Delta t + \sum_j y_j 1_{T_j < t} 1_{h(y_j) > u_{3j}},$$

где u_{3j} , $j = 1, \dots, T$, – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные числа, а

$$h(y) = e^{-\frac{B^2 y}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{Y}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(Y) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2^Y \left(\frac{B^2 y}{2}\right)^{\frac{Y}{2}} I\left(Y, B^2 y, \frac{B^2 y}{2}\right),$$

$$I(u, v, w) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-vx-wx^2} dx = (2w)^{-u/2} \Gamma(u) H_{-u} \left(\frac{v}{\sqrt{2w}} \right),$$

где $H_{-u}(z)$ – функция Эрмита с параметром $-u$ [5], для которой справедливо представление

$$H_u(z) = \frac{2^u \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2}\right)} \Phi\left(-\frac{u}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right) + \frac{2^u \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{u}{2}\right)} z \Phi\left(\frac{1-u}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right),$$

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} e^z \int_0^1 e^{-zs} s^{\beta-\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \text{ – вырожденная гипергеометрическая функция, } \operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re} \alpha.$$

4. Генерируем процесс CGMY следующим образом:

$$X_0 = 0, \quad X_t = AS_t + \sqrt{S_t} \xi_t, \quad t \geq 1,$$

где $\xi_t, t \geq 1$, – стандартные нормальные случайные числа.

Далее предлагается алгоритм моделирования процесса CGMY как разности двух медленно растущих устойчивых процессов.

Теорема. Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – процесс CGMY с параметрами $C > 0, G > 0, M > 0, Y < 2$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, с мерой Леви (1), а $X^1 = (X_t^1)_{t \geq 0}$ и $X^2 = (X_t^2)_{t \geq 0}$ – медленно растущие устойчивые независимые процессы Леви с параметрами $C > 0, M > 0, Y < 2$ и $C > 0, G > 0, Y < 2$, соответственно такие, что их меры Леви имеют вид

$$v_1(x) = \frac{C e^{-Mx}}{x^{1+Y}} 1_{x>0} \text{ и } v_2(x) = \frac{C e^{-G|x|}}{|x|^{1+Y}} 1_{x<0}. \quad (3)$$

Тогда процесс CGMY $X = (X_t)_{t \geq 0}$ представим как

$$X_t = X_t^1 - X_t^2. \quad (4)$$

Доказательство. Представление процесса CGMY как разности двух медленно растущих устойчивых процессов следует из вида характеристической функции процесса CGMY.

Рассмотрим характеристическую функцию процесса CGMY [1]

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \exp(tC\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y + (G+iu)^Y - G^Y)) = \\ &= \exp(tC\Gamma(-Y)((M-iu)^Y - M^Y)) \exp(tC\Gamma(-Y)((G+iu)^Y - G^Y)). \end{aligned}$$

Из (3) и (2) имеем следующие соотношения для параметров процесса $X^1 = (X_t^1)_{t \geq 0}$: $C = a2^k \frac{k}{\Gamma(1-k)}$,

$M = \frac{1}{2} b_1^{1/k}$, $Y = k$. Аналогичные соотношения получаем для процесса $X^2 = (X_t^2)_{t \geq 0}$: $C = a2^k \frac{k}{\Gamma(1-k)}$,

$M = \frac{1}{2} b_2^{1/k}$, $Y = k$. Тогда характеристическую функцию $\varphi(u)$ процесса CGMY можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \exp\left(at2^k \frac{k}{\Gamma(1-k)} \Gamma(-Y) \left(\left(\frac{1}{2} b_1^{1/k} - iu \right)^k - \left(\frac{1}{2} b_1^{1/k} \right)^k \right)\right) \times \\ &\times \exp\left(at2^k \frac{k}{\Gamma(1-k)} \Gamma(-Y) \left(\left(\frac{1}{2} b_2^{1/k} + iu \right)^k - \left(\frac{1}{2} b_2^{1/k} \right)^k \right)\right) = \\ &= \exp(atb_1 - a(b_1^{1/k} - 2iu)^k) \exp(atb_2 - a(b_2^{1/k} + 2iu)^k). \end{aligned}$$

Таким образом, характеристическая функция $\varphi(u)$ процесса CGMY представима в виде произведения характеристических функций медленно растущих устойчивых процессов $X^1 = (X_t^1)_{t \geq 0}$ и $X^2 = (X_t^2)_{t \geq 0}$

$$\varphi(u) = \varphi_{X^1}(u) \varphi_{X^2}(u).$$

Откуда и следует (4).

Теорема дает способ моделирования процесса CGMY как разности двух медленно растущих процессов. Приведем алгоритм моделирования медленно растущего процесса $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ с параметрами $a > 0$, $b > 0$, $0 < Y < 1$ [2].

Алгоритм 2.

1. Генерируем последовательности (e_i) , (b_i) , $i = 1, 2, \dots$, $b_1 < b_2 < \dots < b_i < \dots$, независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром 1.
2. Генерируем последовательности (u_i) , $(\tilde{u}_i)$, $i = 1, 2, \dots$, независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин.
3. Аппроксимируем траектории медленно растущего процесса $X = (X_t)_{0 \leq t < T}$ величинами

$$X_t^{(K)} = \sum_{i=1}^K \min \left(2 \left(\frac{aT}{b_i \Gamma(1-Y)} \right)^{1/Y}, \frac{2e_i \tilde{u}_i^{1/Y}}{b^{1/Y}} \right) 1_{(Tu_i < t)}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

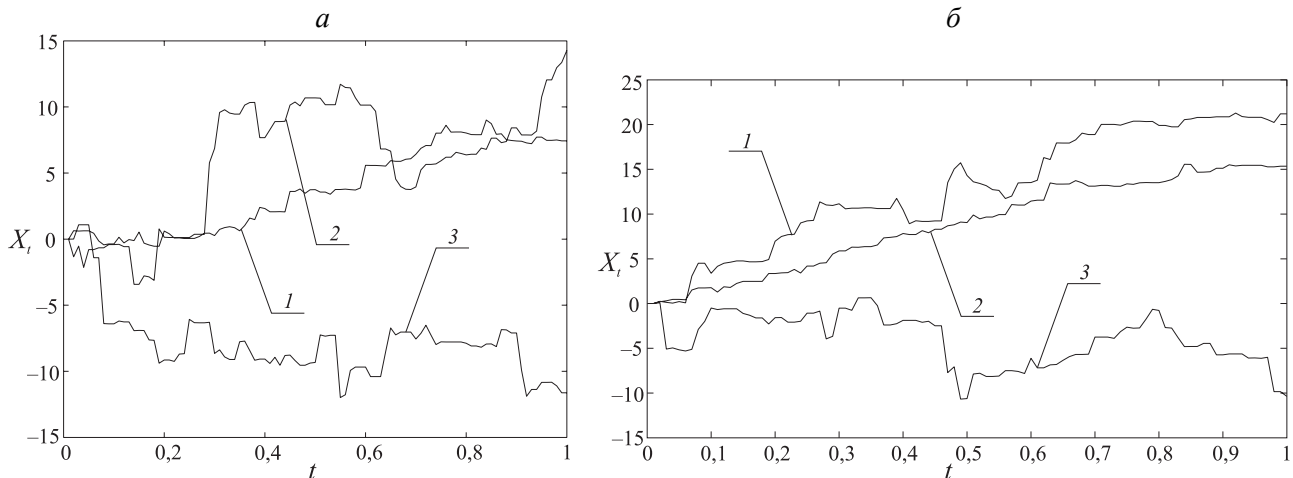
Алгоритм моделирования процесса CGMY как разности двух медленно растущих устойчивых процессов состоит из следующих этапов.

Алгоритм 3.

1. Генерируем медленно растущий процесс $X^1 = (X_t^1)_{t \geq 0}$ с параметрами $C > 0$, $M > 0$, $Y < 2$ (алгоритм 2).
2. Генерируем медленно растущий процесс $X^2 = (X_t^2)_{t \geq 0}$ с параметрами $C > 0$, $G > 0$, $Y < 2$ (алгоритм 2).
3. Процесс CGMY $X = (X_t)_{0 \leq t < T}$ с параметрами $C, G, M > 0$, $Y < 2$ получаем как

$$X_t = X_t^1 - X_t^2.$$

На рисунке представлены траектории процессов CGMY, моделирование которых осуществляется алгоритмами 1 (а) и 3 (б) соответственно.



Траектории процесса CGMY по алгоритму 1 (а) и алгоритму 3 (б) с параметрами:
 1 – $C = 2$, $Y = 0,8$, $G = 5$, $M = 2$; 2 – $C = 0,1$, $Y = 0,2$, $G = 0,8$, $M = 0,5$; 3 – $C = 1$, $Y = 0,3$, $G = 0,5$, $M = 0,8$

Моделирование процесса CGMY осуществляется в системе MATLAB® 7.6.0 (R2008a). При моделировании процесса CGMY с параметрами $C = 10$, $G = 7$, $M = 5$, $Y = 0,2$, $\varepsilon = 0,0001$ и временным шагом $\Delta t = 0,01$ как винеровского процесса с помощью случайной замены времени $Y/2$ -устойчивым субординатором (алгоритм 1) стандартное отклонение составляет 0,0241, а при моделировании этого процесса как разности двух медленно растущих устойчивых процессов (алгоритм 3) при $K = 10000$, $\Delta t = 0,01$ стандартное отклонение равно 0,0238. Преимущество способа моделирования процесса CGMY как разности двух медленно растущих устойчивых процессов относительно способа моделирования этого процесса как винеровского процесса с помощью случайной замены времени $Y/2$ -устойчивым субординатором заключается в затрачиваемом на моделирование процесса CGMY времени. При моделировании процесса CGMY алгоритмом 3 затрачивается значительно меньше

времени, чем при моделировании этого процесса алгоритмом 1. Например, при моделировании алгоритмом 3 процесса CGMY $X = (X_t)_{0 \leq t < T}$ с параметрами $C = 10$, $G = 7$, $M = 5$, $Y = 0,2$ и временным шагом $\Delta t = 0,01$, состоящего из $T = 1000$ значений, потребуется 11 с, а при моделировании такого же процесса CGMY алгоритмом 1 – 302 с. Подобные временные затраты на моделирование процесса CGMY как винеровского процесса с помощью случайной замены времени $Y/2$ -устойчивым субординатором отмечаются в работе [3].

1. Carr P., Geman H., Madan D.B., Yor M. // J. of Business. 2002. Vol. 75. № 2. P. 305.
2. Schoutens W. Levy processes in finance. Bognor Regis, 2003.
3. Poirrot J., Tankov P. // Asia-Pacific Financial Market. 2006. Vol. 13. № 4. P. 327.
4. Madan D.B., Yor M. // <http://arxiv.org/abs/math/0601173>. 2006.
5. Lebedev N. N. Special function and their applications. Englewood Cliffs, 1965.

Поступила в редакцию 06.07.11.

Николай Николаевич Труш – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики.

Анна Викентьевна Кузьмина – ассистент кафедры информационных систем управления. Научный руководитель – Н.Н. Труш.

$$x_1 \quad y_1^2 \quad \cdot \quad ^2) \quad \frac{2}{1} \quad \dots \quad ^2,$$

$$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$$