УДК 517.9+531.19

Г.Н. ГУБАЛЬ (УКРАИНА), А.И. СЛОБОДЯНЮК

ОБОБЩЕННОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, ПОЛУЧЕННОЕ ИЗ ДИНАМИКИ ЧАСТИЦ

The present paper deals with the problem of the derivation of the generalized kinetic equation from the dynamics of particles. In this case it is constructed the functionals, which provide the most general description of the states of a particle system, using a representation of a solution of the Cauchy problem for the Bogolyubov chain of equations in the form of an expansion over particle groups whose evolution is governed by the cumulants (semi-invariants) of the evolution operator of the corresponding particle group.

Эволюция состояний многочастичных систем описывается цепочкой уравнений Боголюбова [1, 2]. Решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова представляется в форме ряда итераций или функционального ряда (неравновесного кластерного разложения) [2–4]. Нами использовано представление решения в форме разложения по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты (семиинварианты) эволюционного оператора соответствующей группы частиц [5]. Такое представление решения дает возможность детально описать кластерный характер эволюции бесконечных систем частиц с разными свойствами симметрии.

В некоторых случаях состояния многочастичных систем можно описать в терминах одночастичных функций распределения, которые удовлетворяют некоторое замкнутое эволюционное уравнение, которое будем называть кинетическим.

В настоящей работе выведено обобщенное кинетическое уравнение в явной форме из цепочки уравнений Боголюбова. Для математической формулировки этой задачи рассмотрена задача Коши для цепочки уравнений Боголюбова с начальными данными, которые являются произведениями одночастичных функций распределения. Такое предположение для начальных данных естественно для кинетического описания газа, поскольку его состояния в данном случае описываются только одночастичной функцией распределения. В этом предположении показано, что задача Коши для цепочки уравнений Боголюбова в пространстве последовательностей суммируемых функций эквивалентна соответствующей начальной задаче для обобщенного кинетического уравнения.

Заметим, что обобщенные кинетические уравнения были получены для дискретно скоростной симметричной системы упругих шаров [6] и для симметричной системы частиц [7] с использованием решения задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова в другом представлении, для симметричной системы частиц [2] кинетическое уравнение было получено в неявном виде.

Далее нами сформулированы постановка исследуемой проблемы и основной технический результат (теорема 2), который используется для вывода обобщенного кинетического уравнения (теорема 3), а также теорема существования (теорема 4) для выведенного кинетического уравнения.

Уравнения Боголюбова

Рассмотрим симметричную систему многих частиц с массой $m = 1$, взаимодействующих посредством парного потенциала Φ. Считаем, что потенциал взаимодействия Φ удовлетворяет условиям, гарантирующим существование глобального по времени решения начальной задачи уравнений Гамильтона для системы конечного числа частиц. Например, Φ – дважды непрерывно дифференцируемая функция с компактным носителем.

Каждая i-я частица характеризуется фазовыми координатами $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$, $\nu \geq 1$.

Пусть $L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$ – линейное пространство суммируемых функций $f_s(x_1, \dots, x_s)$, определенных на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s}$, симметричных относительно перестановок аргументов $(x_1, \dots, x_s)$ с нормой

$$\|f_s\| = \int_{\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s}} dx_1 \dots dx_s \left| f_s(x_1, \dots, x_s) \right|.$$

Определим множество $L_0^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$, всюду плотное в $L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$, функций $f_s \in L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$ с компактными носителями, которые непрерывно дифференцируемы по переменным $(x_1, \dots, x_s)$. Через L_α^1 обозначим банахово пространство бесконечных последовательностей $f = \{f_s(x_1, \dots, x_s)\}_{s \geq 0}$: $L_\alpha^1 = \oplus_{s=0}^\infty \alpha^s L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$, где $\alpha > 1$.

Состояние такой системы определяется решением задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \{H_s(x_1, \dots, x_s), F_s(t, x_1, \dots, x_s)\} + \\ + \frac{1}{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} dx_{s+1} \left\{ \sum_{i=1}^s \Phi(q_i - q_{s+1}), F_{s+1}(t, x_1, \dots, x_{s+1}) \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными данными, имеющими свойство факторизации (хаоса):

$$F_1(t, x_1)\big|_{t=0} = F_1(0, x_1), \quad F_s(t, x_1, \dots, x_s)\big|_{t=0} = \prod_{i=1}^s F_1(0, x_i), \quad s \geq 2, \tag{2}$$

где $H_s(x_1, \dots, x_s)$ – функция Гамильтона, $\frac{1}{\upsilon}$ – плотность, $\{\cdot,\cdot\}$ – скобка Пуассона [2], $F_1(0, x_i) \in L_0^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$.

Глобальное решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова

Решение задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова представляется в форме разложения по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты эволюционного оператора соответствующей группы частиц [5]

$$F_{|Y|}(t, Y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{\nu n} \times \mathbb{R}^{\nu n}} d(X \setminus Y) \mathfrak{A}_{|X_Y|}(t, X_Y) F_{|X|}(0, X), \tag{3}$$

где

$$Y = (x_1, \dots, x_s), \quad X = (x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_{s+n}), \quad X_Y = (Y, x_{s+1}, \dots, x_{s+n}),$$
$$\mathfrak{A}_{|X_Y|}(t, X_Y) = \sum_{P:\, X_Y = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i), \quad |X \setminus Y| \geq 0,$$

$\sum_{P}$ – сумма по всем возможным разбиениям множества X_Y на $|P|$ непустых взаимно непересекающихся подмножеств $X_i \subset X_Y$, причем множество Y целиком принадлежит одному из подмножеств X_i. $S_s(-t)$ – оператор эволюции:

$$\left(S_s(-t)f_s\right)(x_1,\dots,x_s) = f_s(X_1(-t,x_1,\dots,x_s),\dots,X_s(-t,x_1,\dots,x_s)), \quad s \geq 1,$$

где $X_i(t) = X_i(t,x_1,\dots,x_s)$, $i = 1,\dots,s,$ – решение начальной задачи для уравнений Гамильтона системы s частиц с начальными данными $X_i(0,x_1,\dots,x_s) = x_i$, $i = 1,\dots,s$ [2].

В пространстве L^1_α справедлива

Теорема 1 [8]. *Если* $F_1(0) \in L^1_0(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu) \subset L^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$, *то существует единственное сильное, глобальное по времени решение* $F(t) = \{F_s(t,Y)\}_{s=|Y|\geq 0}$, *где* $F_s(t) \in L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$, $s \geq 1$, *задачи Коши (1), (2), которое представляется разложением по группам частиц, эволюцию которых определяют кумулянты*

$$F_s(t,Y) = S_s(-t,Y)\prod_{i=1}^{s} F_1(0,x_i) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}} d(X\setminus Y)\mathfrak{A}_{|X_Y|}(t,X_Y)\prod_{i=1}^{n+s}F_1(0,x_i), \quad s \geq 1. \tag{4}$$

Функциональный ряд (4) сходится по норме пространства $L^1(\mathbb{R}^{\nu s} \times \mathbb{R}^{\nu s})$ для произвольного $t \in \mathbb{R}^1$. Имеет место такая оценка [8]:

$$\left\|F_s(t)\right\| \leq \left\|F_1(0)\right\|^s e^{\frac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}} \frac{1}{1-\dfrac{\|F_1(0)\|}{\upsilon}}, \quad s \geq 1. \tag{5}$$

О решении нелинейного уравнения для одночастичной функции распределения

Если начальные данные (2) определены в терминах одночастичной функции распределения $F_1(0)$, то задача (1), (2) не «полностью определена» в том понятии, что начальные данные $F_s(0) = \prod_{i=1}^{s} F_1(0,x_i)$, $s \geq 2$, не есть независимые для каждой неизвестной функции в (1). Поэтому переформулируем задачу (1), (2) как новую задачу Коши для независимой неизвестной функции, $F_1(t)$ вместе с бесконечной последовательностью функционалов $F_s(t \mid F_1(t)) = F_s(t,Y \mid F_1(t))$, $s \geq 2$.

Рассмотрим соотношение (4) при $s = 1$ как замкнутое уравнение относительно $F_1(0)$ в пространстве $L^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$

$$F_1(0) = AF_1(0), \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}\left(AF_1(0)\right)(x_1) = S_1(t,x_1)F_1(t,x_1) - \\ -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}} d(X\setminus\{x_1\})\,S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_{|X_{\{x_1\}}|}(t,X_{\{x_1\}})\prod_{i=1}^{n+1}F_1(0,x_i), \\ d(X\setminus\{x_1\}) = dx_2\dots dx_{n+1}.\end{gathered} \tag{7}$$

Обозначим $S_1(t,x_1)F_1(t,x_1) \equiv F_1^0$, пусть $\left\|F_1(t,x_1)\right\| \leq r < +\infty$. Тогда $F_1^0 \in L^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$, $\left\|F_1^0\right\| = \left\|S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\right\| \leq r < +\infty$. В пространстве $L^1_0(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu) \subset L^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$ рассмотрим шар $\mathbb{S}(F_1^0, R) \equiv$ $\equiv \left\{F_1(0) \in L^1_0(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu) : \left\|F_1(0) - F_1^0\right\| \leq R\right\}$.

Справедлива

Теорема 2 [8]. *Если*

$$\frac{1}{\upsilon} < \frac{1}{R+r}\min\{x, z\},$$

где x *– решение уравнения* $\dfrac{e^x}{1-x} = \dfrac{2R+r}{R+r}$, z *– решение уравнения* $e^z\dfrac{1+z-z^2}{(1-z)^2} = 2$, *то существует единственное решение уравнения (6), которое в области* $\mathbb{S}(F_1^0, R) \subset L^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$ *представляется формулой*

$$F_1(0,x_1)=S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1\})\,\tilde{\mathfrak{A}}^{(n)}(t)\prod_{i=1}^{n+1}F_1(t,x_i), \tag{8}$$

где

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(t)=-S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_2),$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(2)}(t)=S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)$$

и т. д., $\hat{\mathfrak{A}}_{|X_i|}(t,X_i)=\mathfrak{A}_{|X_i|}(t,X_i)\prod\limits_{x_j\in X_i}S_1(t,x_j)$.

Обобщенное кинетическое уравнение

Одночастичная функция распределения, являющаяся решением начальной задачи (1), (2), представляется таким разложением (теорема 1):

$$F_1(t,x_1)=S_1(-t,x_1)F_1(0,x_1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1\})\,\mathfrak{A}_{|X_{\{x_1\}}|}(t,X_{\{x_1\}})\prod_{i=1}^{n+1}F_1(0,x_i). \tag{9}$$

Теорема 3. *Сильная производная по* t *соотношения (9) имеет вид*

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1)=-p_1\frac{\partial}{\partial q_1}F_1(t,x_1)+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}}dx_2\,\{\Phi(q_1-q_2),F_2(t,x_1,x_2\,|\,F_1(t))\},$$

где функционал $F_2(t,x_1,x_2\,|\,F_1(t))$ *определяется следующей формулой:*

$$\begin{gathered}F_2(t,x_1,x_2\,|\,F_1(t))=\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(t,x_i)+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1,x_2\})\,\breve{\mathfrak{A}}^{(n)}(t,X_{\{x_1,x_2\}})\prod_{i=1}^{n+2}F_1(t,x_i),\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\hat{S}_2^t(x_1,x_2)=S_2(-t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}S_1(t,x_i),$$

$$\breve{\mathfrak{A}}^{(1)}(t)=-\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)+\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3),$$

$$\begin{gathered}\breve{\mathfrak{A}}^{(2)}(t)=\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_3,x_4)\Big)\times\\\times\Big(\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)-\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)\Big)-\\-\frac{1}{2!}\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_3,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_2,x_3,x_4)\Big)+\frac{1}{2!}\hat{\mathfrak{A}}_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\ \text{и т. д.}\end{gathered}$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (9) в виде

$$F_1(t)=U(t)F_1(0),$$

где

$$\big(U(t)F_1(0)\big)(x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1\})\,\mathfrak{A}_{|X_{\{x_1\}}|}(t,X_{\{x_1\}})\prod_{i=1}^{n+1}F_1(0,x_i).$$

Таким образом, используя групповое свойство [3, 5] оператора $U(t)$ и выражение (9), получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1)=\frac{\partial}{\partial t}\big(U(t)F_1(0)\big)(x_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big((U(t+\Delta t)-U(t))F_1(0)\big)(x_1)=\\=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big(U(t)(U(\Delta t)-I)F_1(0)\big)(x_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\big((U(\Delta t)-I)U(t)F_1(0)\big)(x_1)=\\=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(S_1(-\Delta t,x_1)-I)\big(U(t)F_1(0)\big)(x_1)+\\+\frac{1}{\upsilon}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}}dx_2\,\mathfrak{A}_2(\Delta t,x_1,x_2)U(t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(0,x_i).\end{gathered}$$

Согласно равенству [2] $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(S_1(-\Delta t,x_1)-I)=\{H_1,\cdot\}$, выражению [5]

$$\mathfrak{A}_2(\Delta t,x_1,x_2)=S_2(-\Delta t,x_1,x_2)-S_1(-\Delta t,x_1)S_1(-\Delta t,x_2)$$

и теореме Лиувилля получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1)=\{H_1,F_1(t,x_1)\}+$$

$$+\frac{1}{\upsilon}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,(S_2(-\Delta t,x_1,x_2)-I)-(S_1(-\Delta t,x_1)-I)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\right)F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))=$$

$$=-p_1\frac{\partial}{\partial q_1}F_1(t,x_1)+\frac{1}{\upsilon}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,\{H_2,\cdot\}-\{H_1,\cdot\}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\right)F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t)). \quad (11)$$

Вычислим член в скобках равенства (11).

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,\{H_2,F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\}=\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i^2}{2}+\Phi(q_1-q_2),F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\right\}=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\left\{\Phi(q_1-q_2),F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\right\}-p_1\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\frac{\partial}{\partial q_1}F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,p_2\frac{\partial}{\partial q_2}F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))=\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\left\{\Phi(q_1-q_2),F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\right\}-$$

$$-p_1\frac{\partial}{\partial q_1}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))-\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_2\,p_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}dq_2\frac{\partial}{\partial q_2}F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\left\{\Phi(q_1-q_2),F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\right\}-p_1\frac{\partial}{\partial q_1}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t)). \quad (12)$$

В равенстве (12) используем тот факт, что вероятность состояния с бесконечным расстоянием между частицами равна нулю:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}dp_2\,p_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}dq_2\frac{\partial}{\partial q_2}F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))=0.$$

$$\left\{H_1,\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\right\}=-p_1\frac{\partial}{\partial q_1}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t)). \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (11), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1)=-p_1\frac{\partial}{\partial q_1}F_1(t,x_1)+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\left\{\Phi(q_1-q_2),F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))\right\}. \quad (14)$$

Определим явный вид функционала $F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t))$. Решение (4) при $Y=\{x_1,x_2\}$ имеет вид

$$F_2(t,x_1,x_2)=S_2(-t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(0,x_i)+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}F_1(0,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\frac{1}{2!}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_3dx_4\,\mathfrak{A}_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(0,x_i)+\cdots. \quad (15)$$

Запишем решение (8):

$$F_1(0,x_1)=S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)-\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_2\,S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_2dx_3\,\big(S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)+$$

$$+S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_2)S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)-$$

$$-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_2,x_3)\big)\prod_{i=1}^{3}S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)+\cdots. \quad (16)$$

Подставляя решение (16) в решение (15), используя взаимодействие между частицами, получим

$$F_2(t,x_1,x_2\,|\,F_1(t)) = S_2(-t,x_1,x_2)\Bigg[\prod_{i=1}^{2} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) -$$

$$-\frac{1}{\upsilon}\Bigg(S_1(t,x_2)F_1(t,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_3\, S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)S_1(t,x_3)F_1(t,x_3) +$$

$$+S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_3\, S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)\prod_{i=2}^{3} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\Bigg) +$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\Bigg(S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}} dx_3 dx_4\,\big(S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)\times$$

$$\times S_1(t,x_3)\mathfrak{A}_2(t,x_3,x_4)\prod_{i=2}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) +$$

$$+S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_4)\prod_{i=2}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) -$$

$$-\frac{1}{2!}S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_3(t,x_2,x_3,x_4)\prod_{i=2}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\Big) +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_3\, S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)S_1(t,x_3)F_1(t,x_3)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_4\, S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_4)S_1(t,x_2)F_1(t,x_2)S_1(t,x_4)F_1(t,x_4) +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_3\, S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_3)\prod_{i=2}^{3} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_4\, S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_4)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)S_1(t,x_4)F_1(t,x_4) +$$

$$+S_1(t,x_2)F_1(t,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}} dx_3 dx_4\,\big(S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)\times$$

$$\times S_1(t,x_3)\mathfrak{A}_2(t,x_3,x_4)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\prod_{i=3}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) +$$

$$+S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_3)S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_4)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\prod_{i=3}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) -$$

$$-\frac{1}{2!}S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_3,x_4)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)\prod_{i=3}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\big)\Bigg)\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_3\,\mathfrak{A}_3(t,x_1,x_2,x_3)\Bigg[\prod_{i=1}^{3} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) -$$

$$-\frac{1}{\upsilon}\prod_{i=1}^{2} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_4\, S_1(t,x_3)\mathfrak{A}_2(t,x_3,x_4)\prod_{i=3}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) -$$

$$-\frac{1}{\upsilon}\prod_{i=2}^{3} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_4\, S_1(t,x_1)\mathfrak{A}_2(t,x_1,x_4)S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)S_1(t,x_4)F_1(t,x_4) -$$

$$-\frac{1}{\upsilon}S_1(t,x_1)F_1(t,x_1)S_1(t,x_3)F_1(t,x_3)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu} dx_4\, S_1(t,x_2)\mathfrak{A}_2(t,x_2,x_4)S_1(t,x_2)F_1(t,x_2)S_1(t,x_4)F_1(t,x_4)\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\frac{1}{2!}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}} dx_3 dx_4\,\mathfrak{A}_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4} S_1(t,x_i)F_1(t,x_i) + \cdots.$$

В терминах операторов $\hat{S}_2^t(x_1,x_2)$, $\hat{\mathfrak{A}}_{|X_i|}(t,X_i)$ имеем

$$F_2(t,x_1,x_2\,|\,F_1(t))=\Bigg[\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(t,x_i)-\frac{1}{\upsilon}\Bigg(\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)\prod_{i=1}^{3}F_1(t,x_i)+$$

$$+\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}F_1(t,x_i)\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\Bigg(\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_3dx_4\Bigg(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+$$

$$+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)-\frac{1}{2!}\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_2,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)\Bigg)+$$

$$+\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_4\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+$$

$$+\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_4\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+$$

$$+\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_3dx_4\Bigg(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+$$

$$+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)-\frac{1}{2!}\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)\Bigg)\Bigg)\Bigg]+$$

$$+\Bigg[\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)\prod_{i=1}^{3}F_1(t,x_i)-$$

$$-\frac{1}{\upsilon^2}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_4\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_4\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\,\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_4\,\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)\Bigg)\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\frac{1}{2!}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_3dx_4\,\hat{\mathfrak{A}}_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+\cdots.$$

Собирая члены одного порядка по плотности $\frac{1}{\upsilon}$, представим результат в компактном виде:

$$F_2(t,x_1,x_2\,|\,F_1(t))=\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(t,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^\nu\times\mathbb{R}^\nu}dx_3\Big[-\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)+\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)\Big]\prod_{i=1}^{3}F_1(t,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_3dx_4\Big[\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_3,x_4)\Big)\times$$

$$\times\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)-\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)-$$

$$-\frac{1}{2!}\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_3,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_2,x_3,x_4)\Big)+\frac{1}{2!}\hat{\mathfrak{A}}_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4)\Big]\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+\cdots.$$

Обозначим

$$\breve{\mathfrak{A}}^{(1)}(t) = -\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)+\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3),$$

$$\breve{\mathfrak{A}}^{(2)}(t) = \Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_3,x_4)\Big)\times$$

$$\times\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_1,x_3)+\hat{\mathfrak{A}}_2(t,x_2,x_3)\Big)-\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_2,x_3)-$$

$$-\frac{1}{2!}\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\Big(\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_1,x_3,x_4)+\hat{\mathfrak{A}}_3(t,x_2,x_3,x_4)\Big)+\frac{1}{2!}\hat{\mathfrak{A}}_4(t,x_1,x_2,x_3,x_4)$$

и т. д. Тогда получим

$$F_2(t,x_1,x_2\mid F_1(t)) = \hat{S}_2^t(x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(t,x_i)+$$

$$+\frac{1}{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu}}dx_3\,\breve{\mathfrak{A}}^{(1)}(t)\prod_{i=1}^{3}F_1(t,x_i)+\frac{1}{\upsilon^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\nu}\times\mathbb{R}^{2\nu}}dx_3dx_4\,\breve{\mathfrak{A}}^{(2)}(t)\prod_{i=1}^{4}F_1(t,x_i)+\cdots=$$

$$=\hat{S}_2^t(x_1,x_2)\prod_{i=1}^{2}F_1(t,x_i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^{\nu n}\times\mathbb{R}^{\nu n}}d(X\setminus\{x_1,x_2\})\breve{\mathfrak{A}}^{(n)}(t,X_{\{x_1,x_2\}})\prod_{i=1}^{n+2}F_1(t,x_i).$$

Уравнение (14) назовем *обобщенным кинетическим уравнением*.

Согласно оценке (5) и теореме 2 функциональный ряд (10) и в более общем случае функциональный ряд $F_{|Y|}(t,Y\mid F_1(t))$ сходится по норме пространства $L^1(\mathbb{R}^{\nu s}\times\mathbb{R}^{\nu s})$, т. е. эти функционалы существуют.

Не будем приводить, для краткости, явный вид n-го приближения $\breve{\mathfrak{A}}^{(n)}(t)$ в (10), поскольку целью этой статьи является только сильная сходимость ряда (10). □

Теорема существования для обобщенного кинетического уравнения

Из теорем 1, 2 следует

Теорема 4. *Если* $F_1(0)\in\mathbb{S}(F_1^0,R)\subset L_0^1(\mathbb{R}^{\nu}\times\mathbb{R}^{\nu})$, *то при условии*

$$\frac{1}{\upsilon}<\frac{1}{R+r}\min\{x,z\},$$

где x *– решение уравнения* $\dfrac{e^x}{1-x}=\dfrac{2R+r}{R+r}$, z *– решение уравнения* $e^z\dfrac{1+z-z^2}{(1-z)^2}=2$, *существует единственное сильное глобальное по времени решение задачи Коши для уравнения* (14)*, которое представляется сильно сходящимся рядом* (9).

* * *

При малых плотностях задача Коши (1), (2) для цепочки уравнений Боголюбова с начальными данными, имеющими свойство факторизации, сведена к начальной задаче для обобщенного кинетического уравнения (14).

Таким образом, получено обобщенное кинетическое уравнение в явном виде для симметричной системы многих частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала, с использованием решения задачи Коши для цепочки уравнений Боголюбова в форме кумулянтного представления.

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946.
2. Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations. Dordrecht, 1997.
3. Петрина Д.Я., Герасименко В.И. // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 5. С. 3.
4. Сташенко М.А., Губаль Г.Н. // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 1. С. 188. (Siberian Math. J. 2006. Vol. 47. № 1. P. 152).
5. Gerasimenko V.I., Ryabukha T.V., Stashenko M.O. // J. Phys. A: Math. and General. 2004. Vol. 37. № 42. P. 9861.
6. Borgioli G., Gerasimenko V., Lauro G. // Rend. Seminario Mat. Univ. Politecnico Torino. 1998. Vol. 56. №. 2. P. 59.
7. Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya. // Ukr. J. Phys. 1998. Vol. 43. № 6. P. 697.
8. Губаль Г.Н. (Украина), Слободянюк А.И. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 2. С. 96.

Поступила в редакцию 09.07.11.

Галина Николаевна Губаль – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Луцкого национального технического университета (г. Луцк, Украина).

Анатолий Иванович Слободянюк – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой методики преподавания физики и информатики.