

УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО ИНВАРИАНТА

The case of non-zero constant absolute invariant for the system $x' = y(1 + \sum_{k=1}^8 c_k x^k)$, $y' = -x + (\sum_{i=0}^7 a_i x^i) y^2 + (\sum_{j=0}^{10} b_j x^j) y^3$, where $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{C}$, is considered. Seven center conditions for this system are presented. Three new center conditions for a cubic differential system with eleven parameters are also shown in the article.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x' &= y(1 + Dx + Px^2) + Hx^2 + Qx^3, \\ y' &= -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $A, B, C, D, H, K, L, M, N, P, Q \in \mathbb{C}$. Для (1) в начале координат возникает проблема центра и фокуса. Решение проблемы в случае $M=N=P=0$ содержится в [1], в случае $H=Q=0$ – в работе [2].

В [3] представлены 9 условий центра системы (1), а также показано, что (1) можно привести к виду

$$x' = yP_0(x), \quad y' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3, \quad (2)$$

где $P_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^8 c_k x^k$, $P_2(x) = \sum_{i=0}^7 a_i x^i$, $P_3(x) = \sum_{j=0}^{10} b_j x^j$, $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{C}$, $i = \overline{0, 7}$, $j = \overline{0, 10}$, $k = \overline{1, 8}$.

Первые фокусные величины системы (2) имеют вид: $g_1 = b_0$, $g_2 = b_2 + 3a_0b_1$, $g_3 = 3(5a_0a_1 + a_2)b_1 + (15a_0^2 + 5a_0c_1 + 3a_1 + c_2)b_2 + (13a_0 + 2c_1)b_3 + 3b_4$, g_4 содержит 38 слагаемых, $g_5 - 138$, $g_6 - 438$, $g_7 - 1239$, ..., $g_{20} - 7\,473\,803$. Введем вектор $p = (a_0, \dots, a_7, b_0, \dots, b_{10}, c_1, \dots, c_8)$ и образуем идеал $I = \langle g_1, g_2, \dots \rangle$. Тогда многообразие $V(I) = \{p \in \mathbb{C}^{27} : \forall g \in I \quad g(p) = 0\}$ будем называть *многообразием центра* системы (2) [4, 5]. Особая точка $O(0,0)$ системы (2) является центром тогда и только тогда, когда $p \in V(I)$ [5].

Из равенства нулю первых трех величин следует выполнение соотношений

$$P_3(x) = xQ(x), \quad Q'(x)P_0(x) + 3Q(x)P_2(x) = xR(x), \quad 3R'(x)Q(x) - 5R(x)Q'(x) = xS(x), \quad (3)$$

где $Q(x) = b_1 - 3a_0b_1x + \sum_{i=3}^{10} b_i x^{i-1}$, $R(x) = \sum_{j=0}^{15} r_j x^j$, $S(x) = \sum_{k=0}^{21} s_k x^k$, $r_j, s_k \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, 15}$, $k = \overline{0, 21}$.

Пусть выполняется тождество $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \text{const}$, тогда начало координат системы (2) является центром [6, 7]. Задача о поиске условий центра в случае $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \text{const}$ равносильна задаче о поиске условий центра при $S(x) \equiv 0$, где $Q(x) \neq 0$.

В данной работе представлены два способа поиска и указаны 7 условий центра системы (2) в случае $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \text{const}$, где $R(x) \neq 0$. Случай $R(x) \equiv 0$ требует отдельного внимания и в данной статье рассматриваться не будет.

Способ 1. Введем обозначения: $\mu_1 = 5a_0^2b_1 - 2b_3$, $\mu_2 = 7a_0^2b_1 - 2b_3$, $\mu_3 = 6a_0^2b_1 - b_3$, $\mu_4 = 2a_0^2b_1 - b_3$, $\mu_5 = 3a_0^2b_1 - b_3$, $\mu_6 = 9a_0^2b_1 - 2b_3$, $\mu_7 = 4a_0^2b_1 - b_3$.

Система $R^3(x)/Q^5(x) \equiv \text{const}$, $R(x) \neq 0$, где $R(x)$ представим в виде $R(x) = \sum_{j=0}^{15} r_j x^j$, равносильна системе $3R'(x)Q(x) - 5R(x)Q'(x) \equiv 0$, $Q(x) \neq 0$, $R(x) \neq 0$. Делим тождество последней системы на $R(x)Q(x)$. Получаем

$$3R'(x)/R(x) \equiv 5Q'(x)/Q(x). \quad (4)$$

Из второго соотношения системы (3) видно, что степень многочлена $R(x)$ зависит от степени многочлена $Q(x)$. Домножаем числитель и знаменатель правой дроби тождества (4) на многочлен $D_6(x) = \sum_{i=0}^6 d_i x^i$, где $d_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{0, 6}$, и приравняем числители и знаменатели. Получаем следующую систему:

$$3R'(x) - 5Q'(x)D_6(x) = \sum_{i=0}^{14} \alpha_i x^i \equiv 0, \quad R(x) - Q(x)D_6(x) = \sum_{i=0}^{15} \beta_i x^i \equiv 0, \quad Q(x) \neq 0, \quad R(x) \neq 0.$$

Найдем решение системы уравнений

$$\alpha_i = 0, \quad \beta_j = 0, \quad Q(x) \neq 0, \quad R(x) \neq 0, \quad i = \overline{0, 14}, \quad j = \overline{0, 15}. \quad (5)$$

Отметим, что если $b_1 = 0$, то получим условия, при которых либо $Q(x) \equiv 0$, либо $R(x) \equiv 0$. Поэтому далее будем полагать, что $b_1 \neq 0$.

Из системы уравнений $\alpha_i = 0, \beta_j = 0, b_1 \neq 0, i = \overline{1,5}, j = \overline{0,15}$, находим значения $r_0, r_i, d_j, i = \overline{2,15}, j = \overline{1,6}$. Подставляем найденные величины в уравнения $\alpha_6 = 0, \alpha_7 = 0, \alpha_8 = 0, \alpha_9 = 0, \alpha_{14} = 0$. Получаем (не меняем обозначения α_i)

$$\alpha_6 = 14d_0\gamma_1 / (27b_1^2) = 0, \alpha_7 = 2d_0\gamma_2 / (81b_1^3) = 0, \alpha_8 = 2d_0\gamma_3 / (81b_1^3) = 0, \alpha_9 \equiv 0, \alpha_{14} \equiv 0,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= a_0(936a_0^6b_1^3 - 819a_0^4b_1^2b_3 + 210a_0^2b_1b_3^2 - 14b_3^3) - 3(21a_0^2b_1\mu_1 + 2b_3^2)b_4 + 18a_0b_1b_4^2 - \\ &\quad - 9b_1((2a_0\mu_2 - b_4)b_5 + \mu_3b_6) - 27b_1^2(a_0b_7 + b_8), \\ \gamma_2 &= 7b_3(819a_0^6b_1^3 - 126a_0^2b_1(\mu_1 + b_3)b_3 - 4b_3^3) + 9a_0b_1(189a_0^4b_1^2 - 322a_0^2b_1b_3 + 74b_3^2)b_4 - \\ &\quad - 18b_1(27a_0^2b_1 - 8b_3)b_4^2 + 9b_1(2(21a_0^4b_1^2 - 54a_0^2b_1b_3 + 8b_3^2) - 39a_0b_1b_4)b_5 - 27b_1^2(4b_3^2 + (2a_0^3b_1 + \\ &\quad + 13a_0b_3 + 8b_4)b_6 + (9a_0^2b_1 + 8b_3)b_7) - 81b_1^3(11a_0b_8 - 8b_9), \\ \gamma_3 &= (1638a_0^6b_1^3 - 252a_0^2b_1(\mu_1 + b_3)b_3 - 8b_3^3)b_4 - 72a_0b_1\mu_2b_4^2 + 18b_1b_4^3 + (441a_0^5b_1^3 - \\ &\quad - 42a_0b_1(\mu_2 + b_3)b_3 - 57b_1\mu_3b_4)b_5 - 63a_0b_1^2b_5^2 + 3b_1(3a_0^2b_1(\mu_2 - 2b_3) + b_3^2 - 42a_0b_1b_4 - \\ &\quad - 27b_1b_5)b_6 - 9b_1^2(3(a_0\mu_4 + 3b_4)b_7 + 4(\mu_5 - b_3)b_8) - 27b_1^3(13a_0b_9 - 9b_{10}). \end{aligned}$$

В случае $d_0 = 0$ получим $R(x) \equiv 0$. Далее полагаем $d_0 \neq 0$. Тогда из системы уравнений $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = 0$ находим значения b_8, b_9, b_{10} . Подставляем все найденные значения $r_0, r_i, d_j, b_8, b_9, b_{10}, i = \overline{2,15}, j = \overline{1,6}$, в оставшиеся уравнения $\alpha_k = 0, k = \overline{9,13}$. Получаем $\alpha_9 = 10d_0\tilde{\alpha}_1 / (243b_1^4) = 0, \alpha_{10} = d_0\tilde{\alpha}_2 / (243b_1^4) = 0, \alpha_{11} = d_0\tilde{\alpha}_3 / (729b_1^5) = 0, \alpha_{12} = d_0\tilde{\alpha}_4 / (2187b_1^5) = 0, \alpha_{13} = d_0\tilde{\alpha}_5 / (6561b_1^6) = 0$.

Находим базис Гребнера идеала $\langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5 \rangle$ с порядком переменных $b_7 > b_6 > b_5 > b_4 > b_3 > b_1 > a_0$. Получаем $\langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5 \rangle = \langle \gamma_4^2, \dots, h_{74} \rangle$, где $\gamma_4 = 15a_0^2b_1\mu_4 + b_3^2 - 3b_1(2a_0b_4 + b_5)$. Тогда $\langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5 \rangle + \langle \gamma_4 \rangle = \langle \gamma_4, b_1\gamma_5^2, \dots, h_{33} \rangle$, где $\gamma_5 = a_0(2a_0^2b_1(\mu_5 - 4b_3) + 3b_3^2) - (\mu_5 - b_3)b_4 - 3b_1b_6$. Наконец, находим базис Гребнера идеала $\langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5 \rangle + \langle \gamma_4, \gamma_5 \rangle$. Получаем $\langle \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_4, \tilde{\alpha}_5 \rangle + \langle \gamma_4, \gamma_5 \rangle = \langle \gamma_4, \gamma_5, h_3, \gamma_6^2, \dots, h_{21} \rangle$, где $\gamma_6 = 72a_0^6b_1^3 - 9a_0^2b_1(\mu_1 + b_3)b_3 - b_3^3 + 9b_1(2a_0\mu_4 - b_4)b_4 + 27b_1^2b_7$.

Система уравнений $\gamma_4 = 0, \gamma_5 = 0, \gamma_6 = 0, h_3 = 0, h_j = 0, b_1 \neq 0, j = \overline{5,21}$, равносильна системе $\gamma_4 = 0, \gamma_5 = 0, \gamma_6 = 0, b_1 \neq 0$. Тогда система уравнений (5) при условии $b_1 \neq 0$ равносильна системе уравнений

$$\gamma_i = 0, \alpha_j = 0, \beta_k = 0, b_1 \neq 0, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,5}, k = \overline{0,15}. \quad (6)$$

Найдем значения $r_0, r_i, d_j, b_k, i = \overline{2,15}, j = \overline{1,6}, k = \overline{5,10}$, из системы уравнений (6). Подставляем их в многочлен $R(x) = \sum_{i=0}^{15} r_i x^i$. Получаем $R(x) = d_0 b_1 \tilde{R}^5(x)$, где $\tilde{R}(x) = 1 - a_0 x - \mu_5 x^2 / (3b_1) - (a_0 \mu_1 - b_4) x^3 / (3b_1)$. С другой стороны, $R(x) = (Q'(x)P_0(x) + 3Q(x)P_2(x)) / x$. Тогда имеет место тождество

$$\sum_{i=0}^{15} r_i x^i - (Q'(x)P_0(x) + 3Q(x)P_2(x)) / x \equiv 0. \quad (7)$$

Подставляем в (7) значения $r_0, r_i, d_j, b_k, i = \overline{2,15}, j = \overline{1,6}, k = \overline{5,10}$. Получаем

$$\sum_{i=0}^{15} r_i x^i - (Q'(x)P_0(x) + 3Q(x)P_2(x)) / x = \tilde{R}^2(x) \left(\sum_{i=0}^9 f_i x^i \right) / (27b_1^2) \equiv 0.$$

Поскольку $R(x) \neq 0$, то имеет место тождество $\sum_{i=0}^9 f_i x^i \equiv 0$. Найдем решение системы уравнений

$$f_i = 0, b_1 \neq 0, Q(x) \neq 0, R(x) \neq 0, i = \overline{0,9}. \quad (8)$$

В системе (8) многочлены $f_i, i = \overline{0,6}$, имеют вид

$$f_j = -27b_1^2 \tilde{f}_j, f_k = -9b_1 \tilde{f}_k, f_6 = \tilde{f}_6, j = \overline{0,3}, k = 4,5,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0 &= 3b_1(a_0(3a_0 + c_1) - a_1) - 2b_3 + b_1d_0, \tilde{f}_1 = 3a_0b_1(2a_0(3a_0 + c_1) + a_1 + c_2 - d_0) - (7a_0 + \\ &+ 2c_1)b_3 - 3(a_2b_1 + b_4), \tilde{f}_2 = a_0b_1(5a_0^2(a_0 + 3c_1) + 3a_0(a_1 + 2c_2) + 3(a_2 + c_3)) - b_3(a_1 + 2a_0 \times \\ &\times (a_0 + 3c_1) + 2c_2 - d_0) - b_4(a_0 + 3c_1) - 3a_3b_1, \tilde{f}_3 = a_0b_1(5a_0^2(a_1 + 3c_2) + 3(2a_0c_3 + a_3 + c_4)) - \\ &- 2(a_0(a_1 + 3c_2) + c_3)b_3 - (a_1 + 3c_2 - d_0)b_4 + a_2\mu_5 - 3a_4b_1, \tilde{f}_4 = 3b_1(5a_0^3b_1 - b_4)(2a_0d_0 + 3c_3) - \\ &- ((15a_0^2b_1 - b_3)d_0 + 6b_1(3a_0c_3 + c_4))b_3 + 9a_0b_1^2(2a_0c_4 + c_5) + 3b_1(a_2(a_0\mu_1 - b_4) + a_3\mu_5) + 9b_1^2 \times \\ &\times (a_0a_4 - a_5), \tilde{f}_5 = (2a_0^3b_1(\mu_5 - 4b_3) + 3a_0b_3^2 - (\mu_5 - b_3)b_4)d_0 + 3b_1((a_0\mu_1 - b_4)(a_3 + 3c_4) + \\ &+ \mu_5(a_4 + 2c_5)) + 9b_1^2(a_0(c_6 + a_5) - a_6), \tilde{f}_6 = (72a_0^6b_1^3 - 9a_0^2b_1(\mu_1 + b_3)b_3 - b_3^3 + 9b_1(2a_0\mu_4 - \\ &- b_4)b_4)d_0 - 27b_1^2((a_0\mu_1 - b_4)(a_4 + 3c_5) + \mu_5(a_5 + 2c_6)) - 81b_1^3(a_0(c_7 + a_6) - a_7). \end{aligned}$$

Из уравнения $\tilde{f}_0 = 0$ находим значение d_0 и подставляем в уравнения $\tilde{f}_i = 0, i = \overline{1,6}$. Получаем (не меняем обозначения $\tilde{f}_i, i = \overline{1,6}$)

$$\tilde{f}_1 = \gamma_7 = 0, \quad \tilde{f}_j = -\gamma_{j+6} / b_1 = 0, \quad j = \overline{2,6}.$$

Находим значения $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ из системы уравнений $\gamma_j = 0, j = \overline{7,12}$. Подставив значения $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ в уравнение $f_9 = 0$, получим $f_9 = \delta_1\delta_2 / (3b_1^2) = 0$,

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a_0\mu_1 - b_4, \quad \delta_2 = 16947a_0^8b_1^4 - 14064a_0^6b_1^3b_3 + 3720a_0^4b_1^2b_3^2 - \\ &- 312a_0^2b_1b_3^3 + 2b_3^4 - 168a_0b_1\mu_5(\mu_2 + b_3)b_4 + 12b_1(15a_0^2b_1 - 2b_3)b_4^2 + 3b_1((a_0(2883a_0^6b_1^3 - 2079 \times \\ &\times a_0^4b_1^2b_3 + 434a_0^2b_1b_3^2 - 21b_3^3) - 7(75a_0^4b_1^2 - 27a_0^2b_1b_3 + b_3^2)b_4 + 21a_0b_1b_4^2)c_1 + (1521a_0^6b_1^3 - 954 \times \\ &\times a_0^4b_1^2b_3 + 153a_0^2b_1b_3^2 - 2b_3^3 - 9b_1(4a_0\mu_2 - b_4)b_4)c_2) + 9b_1^2((249a_0^5b_1^2 - 130a_0^3b_1b_3 + 15a_0b_3^2 - \\ &- 5\mu_3b_4)c_3 + (123a_0^4b_1^2 - 48a_0^2b_1b_3 + 2b_3^2 - 12a_0b_1b_4)c_4) + 27b_1^3(3(3a_0\mu_5 - b_4)c_5 + \mu_6c_6) + 81b_1^4(a_0c_7 + 3c_8). \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай $\delta_2 = 0$. Находя из уравнения $\delta_2 = 0$ значение c_8 и подставляя значения $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, c_8$ в уравнение $f_7 = 0$, получаем $f_7 = \delta_3 / (3b_1) = 0$, где

$$\begin{aligned} \delta_3 &= a_0\mu_5(27552a_0^6b_1^3 - 17124a_0^4b_1^2b_3 + 2826a_0^2b_1b_3^2 - 79b_3^3) - \\ &- 3(6708a_0^6b_1^3 - 4030a_0^4b_1^2b_3 + 619a_0^2b_1b_3^2 - 9b_3^3 - a_0b_1(480a_0^2b_1 - 127b_3)b_4)b_4 - 27b_1b_4^3 + 3 \times \\ &\times (14064a_0^8b_1^4 - 11985a_0^6b_1^3b_3 + 3286a_0^4b_1^2b_3^2 - 219a_0^2b_1b_3^3 + 2b_3^4 - 7a_0b_1(429a_0^4b_1^2 - 213a_0^2b_1b_3 + \\ &+ 23b_3^2)b_4 + 3b_1(53a_0^2b_1 - 8b_3)b_4^2)c_1 + 3b_1((a_0(7128a_0^6b_1^3 - 5283a_0^4b_1^2b_3 + 1149a_0^2b_1b_3^2 - 61b_3^3) - \\ &- 3(441a_0^4b_1^2 - 165a_0^2b_1b_3 + 7b_3^2)b_4 + 54a_0b_1b_4^2)c_2 + 3(1272a_0^6b_1^3 - 824a_0^4b_1^2b_3 + 138a_0^2b_1b_3^2 - 2b_3^3 - \\ &- a_0b_1(222a_0^2b_1 - 67b_3)b_4 + 9b_1b_4^2)c_3) + 9b_1^2((a_0(624a_0^4b_1^2 - 342a_0^2b_1b_3 + 43b_3^2) - 3(26a_0^2b_1 - 5b_3) \times \\ &\times b_4)c_4 + 3(96a_0^4b_1^2 - 39a_0^2b_1b_3 + 2b_3^2 - 9a_0b_1b_4)c_5) + 27b_1^3((72a_0^3b_1 - 25a_0b_3 - 9b_4)c_6 + 6\mu_7c_7). \end{aligned}$$

Пусть $\mu_7 \neq 0$. Тогда из уравнения $\delta_3 = 0$ находим c_7 . Подставляя в уравнение $f_8 = 0$ значения $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, c_8, c_7$, получаем $f_8 = \delta_4\delta_5 / (18b_1^2\mu_7) = 0$, где

$$\begin{aligned} \delta_4 &= 720a_0^4b_1^2(\mu_7 - 2b_3) + 393a_0^2b_1b_3^2 + 4b_3^3 - 126a_0b_1(8a_0^2b_1 - 3b_3)b_4 + 81b_1b_4^2, \quad \delta_5 = 876a_0^6b_1^3 - \\ &- 510a_0^4b_1^2b_3 + 75a_0^2b_1b_3^2 - b_3^3 - 3b_1(10a_0\mu_7 - b_4)b_4 + 3b_1((7a_0\mu_5(\mu_2 + b_3) - (15a_0^2b_1 - 2b_3)b_4) \times \\ &\times c_1 + (75a_0^4b_1^2 - 27a_0^2b_1b_3 + b_3^2 - 6a_0b_1b_4)c_2) + 9b_1^2((2a_0\mu_2 - b_4)c_3 + \mu_3c_4) + 27b_1^3(a_0c_5 + c_6). \end{aligned}$$

Образует два идеала

$$I_1 = \langle \delta_2, \delta_3, \delta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0, 1 - b_1\mu_7t \rangle \cap \mathbb{C}[p],$$

$$I_2 = \langle \delta_2, \delta_3, \delta_5, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0, 1 - b_1t \rangle \cap \mathbb{C}[p].$$

При $p \in V(I_1) \cup V(I_2)$ $O(0,0)$ является центром системы (2).

В случае $\mu_7 = 0$ уравнение $\delta_3 = 0$ принимает вид $\delta_3 = b_1(28a_0^3b_1 + 9b_4)\tilde{\delta}_1 = 0$. Если $28a_0^3b_1 + 9b_4 = 0$, то, подставив значения $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, c_8$, а также $b_4 = -28a_0^3b_1/9, b_3 = 4a_0^2b_1$, в уравнение $f_8 = 0$, получаем $f_8 \equiv 0$. Введем идеал

$$I_3 = \langle \delta_2, \mu_7, 28a_0^3b_1 + 9b_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0 \rangle.$$

При $p \in V(I_3)$ начало координат является центром системы (2).

Пусть $28a_0^3b_1 + 9b_4 \neq 0$. Тогда $\tilde{\delta}_1 = 0$. Из уравнения $\tilde{\delta}_1 = 0$ находим значение c_6 и подставляем $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, c_8, c_6$ в уравнение $f_8 = 0$. Получаем $f_8 = (28a_0^3b_1 + 9b_4)\tilde{\delta}_2/3 = 0$. Образует идеал

$$\tilde{I}_1 = \langle \delta_2, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \mu_7, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0, 1 - b_1t \rangle \cap \mathbb{C}[p].$$

Здесь $V(\tilde{I}_1) \subset V(I_2)$. Новых случаев центра не получаем.

Случай $\delta_1 = 0$. Находя b_4 из уравнения $\delta_1 = 0$ и подставляя значения $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_4$ в уравнение $f_8 = 0$, получаем $f_8 = \mu_5\delta_6/(3b_1^2) = 0$, где

$$\begin{aligned} \delta_6 = & 3807a_0^8b_1^4 - 2808a_0^6b_1^3b_3 + 720a_0^4b_1^2b_3^2 - 72a_0^2b_1b_3^3 + 2b_3^4 + 3b_1(a_0(783a_0^6b_1^3 - 504a_0^4b_1^2b_3 + \\ & + 7(15a_0^2b_1 - b_3)b_3^2)c_1 + \mu_6(18a_0^2b_1\mu_5 + b_3^2)c_2) + 9b_1^2(a_0(99a_0^4b_1^2 - 5(\mu_6 + b_3)b_3)c_3 + (63a_0^4b_1^2 - \\ & - 24a_0^2b_1b_3 + 2b_3^2)c_4) + 27b_1^3(3a_0\mu_7c_5 + \mu_6c_6) + 81b_1^4(a_0c_7 + 2c_8). \end{aligned}$$

В случае $\mu_5 \neq 0$ находим значение c_8 из уравнения $\delta_6 = 0$ и подставляем $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_4, c_8$ в оставшиеся уравнения системы (8) $f_7 = 0$. Получаем $f_7 = (15a_0^2b_1 - 4b_3)\delta_7/(2b_1) = 0$, где

$$\begin{aligned} \delta_7 = & a_0\mu_6(63a_0^4b_1^2 - 24a_0^2b_1b_3 + 2b_3^2 + 9b_1^2c_4) + \\ & + (351a_0^6b_1^3 - 180a_0^4b_1^2b_3 + 27a_0^2b_1b_3^2 - b_3^3)c_1 + 3b_1(3\mu_3(a_0\mu_7c_2 + b_1c_5) + (15a_0^2b_1\mu_5 + b_3^2)c_3) + 27b_1^3(a_0c_6 + c_7). \end{aligned}$$

Образует идеалы

$$I_4 = \langle \delta_1, \delta_6, \delta_7, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0, 1 - b_1t \rangle \cap \mathbb{C}[p],$$

$$I_5 = \langle \delta_1, \delta_6, 15a_0^2b_1 - 4b_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0 \rangle.$$

При $p \in V(I_4) \cup V(I_5)$ $O(0,0)$ системы (2) является центром.

Если $\mu_5 = 0$, то, выразив из уравнения значение b_3 и подставив найденные $d_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_4, b_3$ в уравнение $f_7 = 0$, получим $f_7 = 81b_1^3a_0\delta_8 = 0$, где

$$\delta_8 = a_0^8 + a_0^7c_1 + a_0^6c_2 + a_0^5c_3 + a_0^4c_4 + a_0^3c_5 + a_0^2c_6 + a_0c_7 + c_8.$$

Образует идеалы

$$I_6 = \langle \delta_1, \mu_5, \delta_8, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12}, 3a_0b_1 + b_2, b_0 \rangle,$$

$$I_7 = \langle a_0, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_0, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} \rangle.$$

При $p \in V(I_6) \cup V(I_7)$ начало координат системы (2) является центром.

Теорема 1. Пусть $V(I)$ – многообразие центра системы (2). Имеет место включение

$$\bigcup_{j=1}^7 V(I_j) \subset V(I).$$

Доказательство. Пусть $p \in \bigcup_{j=1}^7 V(I_j)$, тогда для (2) выполняется тождество

$R^3(x) \mid Q^5(x) \equiv \text{const}$, где $Q(x) = P_3(x) \mid x$, $R(x) = (Q'(x)P_0(x) + 3Q(x)P_2(x)) \mid x$. Теорема доказана.

Способ 2. Рассмотрим второй способ поиска условий центра системы (2) в случае $R^3(x) \mid Q^5(x) \equiv \text{const}$, $R(x) \neq 0$. Должно выполняться равенство

$$\deg[R^3(x)] = \deg[Q^5(x)]. \quad (9)$$

Введем многочлен $D_i(x) = 1 + \sum_{j=1}^i d_j x^j$, $d_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, i}$. Рассмотрим, какую степень могут иметь многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, чтобы выполнялось равенство (9) и тождество $R^3(x) \mid Q^5(x) \equiv \text{const}$ при

условии $R(x) \neq 0$. Далее будем фиксировать степень многочлена $Q(x)$ и анализировать вид многочленов $Q(x), R(x)$.

Пусть $\deg[Q(x)] = 9$. Тогда $\max[\deg[R(x)]] = 15$. Равенство (9) выполняется, если $\deg[R(x)] = 15$. Тогда если

$$Q(x) = aD_3^3(x), R(x) = bD_3^5(x) \text{ или } Q(x) = aD_1^9(x), R(x) = bD_1^{15}(x),$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, то выполняется тождество $R^3(x) / Q^5(x) \equiv \text{const}$.

Пусть $\deg[Q(x)] = 6$. Тогда $\max[\deg[R(x)]] = 12$. Равенство (9) выполняется, если $\deg[R(x)] = 10$. Тогда если

$$Q(x) = aD_2^3(x), R(x) = bD_2^5(x) \text{ или } Q(x) = aD_1^6(x), R(x) = bD_1^{10}(x),$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, то выполняется тождество $R^3(x) / Q^5(x) \equiv \text{const}$.

Пусть $\deg[Q(x)] = 3$. Тогда $\max[\deg[R(x)]] = 9$. Равенство (9) выполняется, если $\deg[R(x)] = 5$. Тогда если

$$Q(x) = aD_1^3(x), R(x) = bD_1^5(x),$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, то выполняется тождество $R^3(x) / Q^5(x) \equiv \text{const}$.

Пусть $\deg[Q(x)] = 0$. Тогда $\max[\deg[R(x)]] = 6$. Равенство (9) выполняется, если $\deg[R(x)] = 0$. Тогда если

$$Q(x) = aD_0(x), R(x) = bD_0(x),$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, то выполняется тождество $R^3(x) / Q^5(x) \equiv \text{const}$.

В случаях $\deg[Q(x)] = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ выполнение (9) невозможно. При поиске условий центра системы (2) приведенным способом также получаем найденные ранее семь условий центра $V(I_j), j = \overline{1, 7}$. Новых условий центра не получаем.

Девять условий центра системы (1) в случае постоянного абсолютного инварианта представлены в работе [3]. Укажем еще три новых условия центра. Введем обозначения: $\lambda_1 = A + C, \lambda_2 = C + 2D, \lambda_3 = 5AC + 4AD + 4C^2 + CD - 2D^2, \lambda_4 = DH - Q, \lambda_5 = 3C - 4D, \lambda_6 = 18C^2 - 48CD + 55D^2$, вектор $h = (A, B, C, D, H, K, L, M, N, P, Q)$ и рассмотрим идеалы

$$\begin{aligned} W_1 = & \langle 2H^4\lambda_3 + C^2\lambda_1^3(C - D) - H^2\lambda_1(5C^3 + 6C^2A - 6CD^2 - 5C^2D - 2\lambda_2AD), \\ & \lambda_1^2(2\lambda_1C - 6D^2 + 4AD - 5CD)H - 2H^3\lambda_3 + 3\lambda_1^3\lambda_2B, 3C(H^2 + \lambda_1D) - \lambda_2K, 5Q + 3L, C(\lambda_1^2 \times \\ & \times (C - D)(2C^2 + 3AC + 2AD + CD) - H^2\lambda_3(2A + C - D)) + \lambda_1^3\lambda_2M, N, M + 2P, \lambda_1^2(C^2 - \\ & - 2CD - 2D^2)H - H^3\lambda_3 + \lambda_1^2\lambda_2Q, 1 - \lambda_1\lambda_2t \rangle \cap \mathbb{C}[h], \\ W_2 = & \langle 3(D^2 + H^2)H^3D + 12Q^2(3DH - 2Q) - H^2(18D^2 + 5H^2)Q, 4Q + (A - D)H, \\ & H^2(3D^2 + 4H^2) - 12Q\lambda_4 + 3H^3B, 4Q - 3CH, H^2(15D^2 + 14H^2) - 3(21DH - 23Q)Q + 3H^2K, \\ & 3H^2(3D^2 + H^2)D + 36Q^2D - (36D^2 + H^2)HQ + 18H^3L, \lambda_4(3DH - 2Q) - 3H^2M, 3(D^2 - \\ & - H^2)H^2D + 12Q^2D - (12D^2 - 5H^2)HQ - 18H^3N, \lambda_4Q - H^2P, 1 - Ht \rangle \cap \mathbb{C}[h], \\ W_3 = & \langle 2H^3\lambda_4^3(7H^2(213C - 400D) + 2(594C^3 - 4455C^2D + 10065CD^2 - 7196D^3)) - \\ & - 2H^5\lambda_4(\lambda_5^2(6C - 17D)(\lambda_5 - D)D - H^2(270C^3 - 1161C^2D + 1719CD^2 - 940D^3)) + H^4\lambda_4^2 \times \\ & \times ((\lambda_5 - 3D)(108C^3 - 1116C^2D + 2571CD^2 - 1727D^3) + 3H^2(603C^2 - 1848CD + 1618D^2)) + \\ & + H^6(D^2\lambda_5^4 + H^2(9C^2 - 24CD + 25D^2)(9C^2 - 18CD + 11D^2)) + 4\lambda_4^4(2116Q^2 + H^2(1917C^2 - \\ & - 5706CD + 4810D^2 + 608H^2) - 276(11C - 10D)HQ), H^3\lambda_4(H^2(27C - 40D) - 3D(12C^2 - \\ & - 28CD + 51D^2)) + H^4(H^2(9C^2 - 18CD + 11D^2) + D^2(9C^2 - 15CD + 22D^2)) + 2\lambda_4^2(19H^4 + \\ & + 104Q^2 + 2H^2(9C^2 - 15CD + 35D^2) - 2(24C - 13D)HQ) + 9AH(\lambda_4 - Q)^2Q, H^3(H^3(9C^2 + \\ & + 9CD - 43D^2) - D^2(27C^2 - 105CD + 101D^2)H - H^2(33C - 62D)Q + 3D(12C^2 - 43CD + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +39D^2)Q) + 2\lambda_4^2(26H^4 + H^2\lambda_6 + 92Q^2 - 2(33C - 7D)HQ) + 9H^3B(\lambda_4 - Q)Q, (H^2(3D^2 + \\
& + 2H^2) - 12\lambda_4Q)(43Q^2 + 9H^2(C^2 + CD + D^2) - 3(8C + 13D)HQ) + 27H^2K(\lambda_4 - Q)^2, H^4 \times \\
& \times (3D^2\lambda_5^2 - H^2(8D^2 - \lambda_6)) + H^3\lambda_4(H^2(66C - 151D) - 9D(12C^2 - 43CD + 39D^2)) + 2\lambda_4^2 \times \\
& \times (61H^4 + 3H^2\lambda_6 + 276Q^2 - 6(33C - 7D)HQ) + 27H^4L(\lambda_4 - Q), H^2(9C^2 - 15CD + 13D^2) + \\
& + 4\lambda_4(6CH - DH - 10Q) - 9H^2M, 2\lambda_4^2(33CH - 30DH - 46Q) + H^2(3DH(3C^2 - 19CD + \\
& + 23D^2) - (6C - 17D)(\lambda_5 - D)Q) - 27H^4N, \lambda_4Q - H^2P, 1 - HQ(\lambda_4 - Q)t \rangle \cap \mathbb{C}[h].
\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $h \in \bigcup_{i=1}^3 V(W_i)$, тогда $O(0,0)$ системы (1) является центром.

Доказательство. Проверкой убеждаемся, что при $h \in V(W_1)$ для приведенной дифференциальной системы (2) выполняется тождество $R^3(x) / Q^5(x) \equiv \text{const}$, а при $h \in V(W_2) \cup V(W_3)$ – тождество $R(x) \equiv 0$, где $Q(x)$ и $R(x)$ – многочлены из соотношений (3). Теорема доказана.

1. Бондарь Ю.Л., Садовский А.П. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 1. С. 11.
2. Садовский А.П., Щеглова Т.В. // Там же. 2011. Т. 47. № 2. С. 209.
3. Садовский А.П., Щеглова Т.В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 1. С. 71.
4. Romanovski V.G., Shafer D.S. The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach. Boston; Basel; Berlin, 2009.
5. Садовский А.П. Полиномиальные идеалы и многообразия: Пособие для студентов. Мн., 2008.
6. Садовский А.П. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1716.
7. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.

Поступила в редакцию 01.11.11.

Татьяна Витальевна Щеглова – аспирант кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор А.П. Садовский.