

УДК 517.958:537.8

В.Т. ЕРОФЕЕНКО

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРОНИКНОВЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ДИПОЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЧЕРЕЗ БИИЗОТРОПНЫЙ ЭКРАН

The analytical solution of boundary-value problem of diffraction of electromagnetic fields of electrical and magnetic dipoles on screen from bi-isotropic material is obtained. The solution in integral form by means of cylindrical functions is presented.

В настоящее время активно развивается математическое моделирование процессов взаимодействия электромагнитных волн с техническими устройствами, выполненными из композитных материалов [1], включающих биизотропные, киральные [2] и метаматериалы [3–5]. Это приводит к необходимости решения краевых задач для специальных уравнений Максвелла, моделирующих распространение электромагнитных волн в композиционных средах [6]. Поэтому актуальной является разработка, в частности, аналитических методов решения модельных задач дифракции волн на типичных для техники композитных структурах. В качестве примеров использования композитных материалов в микроволновой технике можно назвать радиопоглощающие покрытия, радиопрозрачные стенки антенных обтекателей и укрытий, электромагнитные экраны и оболочки. Экраны используются для решения проблем электромагнитной совместимости технических средств, защиты персонала от электромагнитных излучений и ослабления побочных электромагнитных излучений (ПЭМИ) средств вычислительной техники, являющихся носителями конфиденциальной информации. Методы исследования плоских биизотропных экранов при рассеянии на них плоских электромагнитных волн рассматривались в [7, 8]. Теория рассеяния полей источников, расположенных у поверхности геометрически правильных тонких оболочек из обычных материалов, представлена в [9], а для композитных экранов разработана недостаточно полно. Актуальна проблема фокусировки полей источников плоским композитным экраном [5].

В данной работе аналитически решена краевая задача рассеяния высокочастотных электромагнитных полей электрического и магнитного диполей Герца на плоском экране, выполненном из биизотропного материала, характеризуемого четырьмя произвольными комплекснозначными параметрами. Для ее решения использован метод теорем сложения [9–11] и нелокальные двухсторонние граничные условия [12] на плоских экранах для осесимметричных электромагнитных полей.

Постановка задачи

В пространстве R^3 с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_0, μ_0 размещен экран $D(0 < z < \Delta)$ толщины Δ . Экран D ограничен плоскостями $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$. Слой выполнен из биизотропного материала с электромагнитными комплекснозначными параметрами $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \mu = \mu_r \mu_0, G = G_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, Z = Z_r \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в слое D удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega(\mu \mathbf{H} + Z\mathbf{E}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega(\epsilon \mathbf{E} + G\mathbf{H}) \text{ в } D, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f, f$ – частота поля.

Поля $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j (j=1, 2)$ в полупространствах $D_1(z < 0), D_2(z > \Delta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_j = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_j, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_j = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_j \text{ в } D_j. \quad (2)$$

В области D_1 на оси Oz расположен источник D_0 с определенной осевой симметрией, который возбуждает первичное поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. Обозначим $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$ – отраженное поле в области D_1 ; $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ – поле, проникшее в область D_2 ; $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1, \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$ – суммарное поле в D_1 .

Сформулируем краевую задачу, моделирующую проникновение первичного поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ через экран D .

Краевая задача 1. При заданном поле источника $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ требуется определить поля $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1 \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1); \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \in C^1(D_2) \cap C(\bar{D}_2); \mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, для которых выполнены уравнения (1), (2), граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях Γ_1 и Γ_2

$$(\mathbf{E}_{1\tau} - \mathbf{E}_\tau)|_{\Gamma_1} = 0, (\mathbf{H}_{1\tau} - \mathbf{H}_\tau)|_{\Gamma_1} = 0, (\mathbf{E}_{2\tau} - \mathbf{E})|_{\Gamma_2} = 0, (\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H})|_{\Gamma_2} = 0 \quad (3)$$

и условия излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{E}'_1}{\partial r} - ik_0 \mathbf{E}'_1 \right) = 0, \quad z < 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial r} - ik_0 \mathbf{E}_2 \right) = 0, \quad z > \Delta, \quad (4)$$

где r – радиальная координата, $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

Представление электромагнитных полей

Для аналитического решения задачи (1) – (4) будем использовать цилиндрическую систему координат ρ, z, φ . Рассмотрим случай, когда поля имеют осевую симметрию в виде множителя $\Phi_m = \exp(im\varphi), m = 1, 2, \dots$. Воспользуемся базисными цилиндрическими полями вида [6]:

$$\mathbf{M}_m^{(\mp 1)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k_0) = \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda \rho) e^{\mp v_0(\lambda)z} \Phi_m, \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_m^{(\mp 2)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k_0) = \frac{1}{k_0} \left(\mp v_0(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda \rho) + \lambda J_m(\lambda \rho) \mathbf{e}_z \right) e^{\mp v_0(\lambda)z} \Phi_m,$$

где

$$\mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda \rho) = \frac{im}{\lambda \rho} J_m(\lambda \rho) \mathbf{e}_\rho - J'_m(\lambda \rho) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda \rho) = J'_m(\lambda \rho) \mathbf{e}_\rho + \frac{im}{\lambda \rho} J_m(\lambda \rho) \mathbf{e}_\varphi, \quad (6)$$

$v_0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ при $\lambda \geq k_0, v_0(\lambda) = -i\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ при $k_0 > \lambda, 0 \leq \lambda < \infty; \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат, $J_m(\cdot)$ – функции Бесселя.

Представим электромагнитные поля в областях D_j через базисные поля (5) в интегральном виде

$$\mathbf{E}_2 = \int_0^\infty [x_2(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-1)} + y_2(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-2)}] d\lambda, \quad \mathbf{H}_2 = \int_0^\infty [x_2(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-2)} + y_2(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-1)}] d\lambda, \quad z > \Delta; \quad (7)$$

$$\mathbf{E}'_1 = \int_0^\infty [x_1(\lambda) \mathbf{M}_m^{(+1)} + y_1(\lambda) \mathbf{M}_m^{(+2)}] d\lambda, \quad \mathbf{H}'_1 = \int_0^\infty [x_1(\lambda) \mathbf{M}_m^{(+2)} + y_1(\lambda) \mathbf{M}_m^{(+1)}] d\lambda, \quad z < 0; \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_0 = \int_0^\infty \left[a(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-1)} + b(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-2)} \right] d\lambda, \quad \mathbf{H}_0 = \int_0^\infty h_0 \left[a(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-2)} + b(\lambda) \mathbf{M}_m^{(-1)} \right] d\lambda, \quad z > -h, \quad (9)$$

где $h_0 = \frac{1}{iZ_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$; $a(\lambda), b(\lambda)$ – заданные плотности первичного поля; $x_j(\lambda), y_j(\lambda)$ – функции, подлежащие определению.

Используя (5), вычислим тангенциальные составляющие $\mathbf{E}_{j\tau} = [\mathbf{e}_z, [\mathbf{E}_j, \mathbf{e}_z]]$ полей (7) – (9) на плоскостях Γ_1 и Γ_2 в базисе (6):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{1\tau}|_{z=0} &= \int_0^\infty \left[\hat{E}'_{1v_1}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + \hat{E}'_{1v_2}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) \right] d\lambda \Phi_m, \\ \mathbf{H}'_{1\tau}|_{z=0} &= \int_0^\infty \left[\hat{H}'_{1v_1}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + \hat{H}'_{1v_2}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) \right] d\lambda \Phi_m; \\ \mathbf{E}_{2\tau}|_{z=\Delta} &= \int_0^\infty \left[\hat{E}_{2v_1}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + \hat{E}_{2v_2}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) \right] d\lambda \Phi_m, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{2\tau}|_{z=\Delta} &= \int_0^\infty \left[\hat{H}_{2v_1}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + \hat{H}_{2v_2}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) \right] d\lambda \Phi_m; \\ \mathbf{E}_{0\tau}|_{z=0} &= \int_0^\infty \left[\hat{E}_{0v_1}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + \hat{E}_{0v_2}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) \right] d\lambda \Phi_m, \\ \mathbf{H}_{0\tau}|_{z=0} &= \int_0^\infty \left[\hat{H}_{0v_1}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) + \hat{H}_{0v_2}(\lambda) \mathbf{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) \right] d\lambda \Phi_m, \end{aligned}$$

где $\hat{E}'_{1v_1} = x_1(\lambda)$, $\hat{E}'_{1v_2} = \bar{v}_0(\lambda)y_1(\lambda)$, $\bar{v}_0(\lambda) = \frac{v_0(\lambda)}{k_0}$, $\hat{H}'_{1v_1} = h_0y_1(\lambda)$, $\hat{H}'_{1v_2} = h_0\bar{v}_0(\lambda)x_1(\lambda)$;

$$\hat{E}_{2v_1} = x_2(\lambda)F(\lambda), \quad \hat{E}_{2v_2} = -\bar{v}_0(\lambda)y_2(\lambda)F(\lambda), \quad F(\lambda) = e^{-v_0(\lambda)\Delta}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{2v_1} &= h_0y_2(\lambda)F(\lambda), \quad \hat{H}_{2v_2} = -h_0\bar{v}_0(\lambda)x_2(\lambda)F(\lambda); \\ \hat{E}_{0v_1} &= a(\lambda), \quad \hat{E}_{0v_2} = -\bar{v}_0(\lambda)b(\lambda), \quad \hat{H}_{0v_1} = h_0b(\lambda), \quad \hat{H}_{0v_2} = -h_0\bar{v}_0(\lambda)a(\lambda); \\ \hat{E}_{1v_j} &= \hat{E}_{0v_j} + \hat{E}'_{1v_j}, \quad \hat{H}_{1v_j} = \hat{H}_{0v_j} + \hat{H}'_{1v_j}. \end{aligned}$$

Решение краевой задачи экранирования

Краевая задача (1) – (4) является трехобластной краевой задачей с классическими граничными условиями сопряжения (3) на плоскостях раздела сред Γ_1 и Γ_2 . В статье рассматриваются поля с осевой симметрией специального вида. Это позволяет сформулировать задачу (1) – (4) в виде двухобластной краевой задачи для областей D_1 и D_2 с нелокальными граничными условиями, связывающими поля по обе стороны экрана D .

Воспользуемся граничными условиями работы [12], которые выведены на основании базисных решений уравнений (1) в цилиндрических координатах [13]:

$$\mathbf{W}_2|_{\Gamma_2} = \hat{A} \mathbf{W}_1|_{\Gamma_1}, \quad (12)$$

где

$$\hat{A} = \hat{A}(\Delta) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} \hat{E}_{jv_1} \\ \hat{E}_{jv_2} \\ \hat{H}_{jv_1} \\ \hat{H}_{jv_2} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= p(p_1 C_2 - p_2 C_1), \quad A_{12} = p\left(p_2 \frac{q_1}{l_1} S_1 - p_1 \frac{q_2}{l_2} S_2\right), \quad A_{13} = Z_0 p(C_1 - C_2), \\
A_{14} &= Z_0 p\left(\frac{q_2}{l_2} S_2 - \frac{q_1}{l_1} S_1\right), \quad A_{21} = p\left(p_2 \frac{l_1}{q_1} S_1 - p_1 \frac{l_2}{q_2} S_2\right), \quad A_{22} = p(p_1 C_2 - p_2 C_1), \\
A_{23} &= Z_0 p\left(\frac{l_2}{q_2} S_2 - \frac{l_1}{q_1} S_1\right), \quad A_{24} = Z_0 p(C_1 - C_2), \quad A_{31} = \frac{pp_1 p_2}{Z_0}(C_2 - C_1), \\
A_{32} &= \frac{pp_1 p_2}{Z_0}\left(\frac{q_1}{l_1} S_1 - \frac{q_2}{l_2} S_2\right), \quad A_{33} = p(p_1 C_1 - p_2 C_2), \quad A_{34} = p\left(p_2 \frac{q_2}{l_2} S_2 - p_1 \frac{q_1}{l_1} S_1\right), \\
A_{41} &= \frac{pp_1 p_2}{Z_0}\left(\frac{l_1}{q_1} S_1 - \frac{l_2}{q_2} S_2\right), \quad A_{42} = \frac{pp_1 p_2}{Z_0}(C_2 - C_1), \quad A_{43} = p\left(p_2 \frac{l_2}{q_2} S_2 - p_1 \frac{l_1}{q_1} S_1\right), \\
A_{44} &= p(p_1 C_1 - p_2 C_2), \quad C_j = \operatorname{ch}(k_0 v_j \Delta), \quad S_j = \operatorname{sh}(k_0 v_j \Delta).
\end{aligned} \tag{14}$$

Матричные коэффициенты определяются через параметры уравнения (1):

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_r \mu_0, \quad G = G_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad Z = Z_r \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad l_j = \frac{v_j}{k_j}, \quad q_j = \frac{g}{k_j g_j}, \\
g &= \varepsilon_r \mu_r - Z_r G_r, \quad g_j = f_j - \frac{1}{2} a, \quad a = i(G_r - Z_r), \quad f_j = (-1)^j f_0, \quad j = 1, 2; \\
f_0 &= \sqrt{\varepsilon_r \mu_r - \frac{1}{4}(G_r + Z_r)^2}, \quad 0 \leq \arg f_0 < \pi, \quad p_j = \frac{1}{\mu_r} \left(i \frac{g}{g_j} - Z_r \right), \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{k_0}, \quad p = \frac{1}{p_1 - p_2}, \\
k_j &= \sqrt{g + \frac{1}{2} a^2 + a f_j}, \quad 0 \leq \arg k_j < \pi, \quad v_j = \sqrt{\bar{\lambda}^2 - k_j^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Запишем граничное условие (12) в виде

$$\mathbf{W}_1|_{\Gamma_1} = \hat{A}^{-1} \mathbf{W}_2|_{\Gamma_2}. \tag{15}$$

Обратная матрица для матрицы (13) вычисляется с помощью формулы $\hat{A}^{-1} = \hat{A}(-\Delta)$.

Используя граничное условие (15), сформулируем краевую задачу.

Краевая задача 2. Требуется при заданном поле источника $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ определить поля $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1 \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$, $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \in C^1(D_2) \cap C(\bar{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям (2), граничным условиям

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{1v_1}|_{z=0} &= (A_{11} \hat{E}_{2v_1} - A_{12} \hat{E}_{2v_2} + A_{13} \hat{H}_{2v_1} - A_{14} \hat{H}_{2v_2})|_{z=\Delta}, \\
\hat{E}_{1v_2}|_{z=0} &= (-A_{21} \hat{E}_{2v_1} + A_{22} \hat{E}_{2v_2} - A_{23} \hat{H}_{2v_1} + A_{24} \hat{H}_{2v_2})|_{z=\Delta}, \\
\hat{H}_{1v_1}|_{z=0} &= (A_{31} \hat{E}_{2v_1} - A_{32} \hat{E}_{2v_2} + A_{33} \hat{H}_{2v_1} - A_{34} \hat{H}_{2v_2})|_{z=\Delta}, \\
\hat{H}_{1v_2}|_{z=0} &= (-A_{41} \hat{E}_{2v_1} + A_{42} \hat{E}_{2v_2} - A_{43} \hat{H}_{2v_1} + A_{44} \hat{H}_{2v_2})|_{z=\Delta}
\end{aligned} \tag{16}$$

и условиям излучения на бесконечности (4).

Заметим, что условия (16) являются нелокальными интегральными граничными условиями для искомых электромагнитных полей в силу интегральных соотношений (10).

Преобразуем (16), подставив (11) в левую часть равенств (16), тогда

$$\begin{aligned}
x_1 + a &= (A_{11} \hat{E}_{2v_1} - A_{12} \hat{E}_{2v_2} + A_{13} \hat{H}_{2v_1} - A_{14} \hat{H}_{2v_2}), \\
y_1 - b &= \frac{1}{v_0} (-A_{21} \hat{E}_{2v_1} + A_{22} \hat{E}_{2v_2} - A_{23} \hat{H}_{2v_1} + A_{24} \hat{H}_{2v_2}), \\
y_1 + b &= iZ_0 (A_{31} \hat{E}_{2v_1} - A_{32} \hat{E}_{2v_2} + A_{33} \hat{H}_{2v_1} - A_{34} \hat{H}_{2v_2}), \\
x_1 - a &= \frac{iZ_0}{v_0} (-A_{41} \hat{E}_{2v_1} + A_{42} \hat{E}_{2v_2} - A_{43} \hat{H}_{2v_1} + A_{44} \hat{H}_{2v_2}).
\end{aligned} \tag{17}$$

Вычитая из первого равенства (17) четвертое, а из третьего – второе равенство (17), приходим к двум уравнениям, не содержащим неизвестные x_1 и y_1 :

$$\begin{aligned} 2a &= \left(A_{11} + \frac{iZ_0}{\bar{v}_0} A_{41} \right) \hat{E}_{2v_1} - \left(A_{12} + \frac{iZ_0}{\bar{v}_0} A_{42} \right) \hat{E}_{2v_2} + \\ &+ \left(A_{13} + \frac{iZ_0}{\bar{v}_0} A_{43} \right) \hat{H}_{2v_1} - \left(A_{14} + \frac{iZ_0}{\bar{v}_0} A_{44} \right) \hat{H}_{2v_2}, \\ 2b &= \left(iZ_0 A_{31} + \frac{1}{\bar{v}_0} A_{21} \right) \hat{E}_{2v_1} - \left(iZ_0 A_{32} + \frac{1}{\bar{v}_0} A_{22} \right) \hat{E}_{2v_2} + \\ &+ \left(iZ_0 A_{33} + \frac{1}{\bar{v}_0} A_{23} \right) \hat{H}_{2v_1} - \left(iZ_0 A_{34} + \frac{1}{\bar{v}_0} A_{24} \right) \hat{H}_{2v_2}. \end{aligned}$$

Учитывая в этих равенствах формулы (11), получим систему алгебраических уравнений относительно x_2, y_2 :

$$Q_{11}x_2 + Q_{12}y_2 = 2aG, \quad Q_{21}x_2 + Q_{22}y_2 = 2bG, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} G &= e^{v_0(\lambda)\Delta}, \quad Q_{11} = A_{11} + h_0 \bar{v}_0 A_{14} + \frac{iZ_0}{\bar{v}_0} A_{41} + A_{44}, \quad Q_{12} = \bar{v}_0 A_{12} + h_0 A_{13} + iZ_0 A_{42} + \frac{1}{\bar{v}_0} A_{43}, \\ Q_{21} &= \frac{1}{\bar{v}_0} A_{21} + h_0 A_{24} + iZ_0 A_{31} + \bar{v}_0 A_{34}, \quad Q_{22} = A_{22} + \frac{h_0}{\bar{v}_0} A_{23} + iZ_0 \bar{v}_0 A_{32} + A_{33}. \end{aligned}$$

Источники электромагнитного поля

В качестве источника первичного поля (9) рассмотрим точечный источник, размещенный в точке $O_1(0, 0, -h)$, $h > 0$, и ориентированный вдоль оси Oz . В случае диполей Герца [10] поле источника представим через сферические базисные поля [6, с. 166, 174]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= A \tilde{\mathbf{m}}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0) + B \tilde{\mathbf{n}}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0), \\ \mathbf{H}_0 &= \frac{k_0}{i\omega\mu_0} (A \tilde{\mathbf{n}}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0) + B \tilde{\mathbf{m}}_{01}(r_1, \theta_1, \varphi; k_0)), \end{aligned} \quad (19)$$

где (r_1, θ_1, φ) – сферические координаты с началом в точке O_1 ; A, B – постоянные.

При $A = 0$, $B \neq 0$ имеем электрический диполь, при $A \neq 0$, $B = 0$ – магнитный диполь.

Используя теоремы сложения [11], [6, с. 153], преобразуем поле (19) к интегральному виду (9) при $m = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \int_0^\infty \left[a(\lambda) \mathbf{M}_0^{(-1)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k_0) + b(\lambda) \mathbf{M}_0^{(-2)}(\rho, z, \varphi; \lambda, k_0) \right] d\lambda = \\ &= \int_0^\infty \left[a(\lambda) J_1(\lambda\rho) \mathbf{e}_\varphi + b(\lambda) \left(\bar{v}_0(\lambda) J_1(\lambda\rho) \mathbf{e}_\rho + \frac{\lambda}{k_0} J_0(\lambda\rho) \mathbf{e}_z \right) \right] e^{-v_0(\lambda)z} d\lambda, \end{aligned}$$

где $a(\lambda) = Ac(\lambda)$, $b(\lambda) = Bc(\lambda)$, $c(\lambda) = \bar{c}(\lambda) e^{-v_0(\lambda)h}$, $\bar{c}(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{k_0^2 v_0(\lambda)}$.

Разрешая систему алгебраических уравнений (18), определим поле (7), прошедшее через экран D .

$$\mathbf{E}_2 = \int_0^\infty \left[x_2(\lambda) J_1(\lambda\rho) \mathbf{e}_\varphi + y_2(\lambda) \left(\bar{v}_0(\lambda) J_1(\lambda\rho) \mathbf{e}_\rho + \frac{\lambda}{k_0} J_0(\lambda\rho) \mathbf{e}_z \right) \right] e^{-v_0(\lambda)z} d\lambda,$$

где $x_2(\lambda) = Q(\lambda)(AQ_{22}(\lambda) - BQ_{12}(\lambda))$, $y_2(\lambda) = Q(\lambda)(BQ_{11}(\lambda) - AQ_{21}(\lambda))$,

$$Q(\lambda) = \frac{2c(\lambda)G(\lambda)}{Q_{11}(\lambda)Q_{22}(\lambda) - Q_{12}(\lambda)Q_{21}(\lambda)}.$$

Проблему фокусировки полей [14] рассмотрим для биизотропного экрана. Для фокусировки поля магнитного диполя $A \neq 0, B = 0$ за экраном D в точке $O_2(0, 0, h + \Delta)$ выберем параметры биизотроп-

ного слоя следующим образом: положим $G_r = Z_r = \sqrt{\epsilon_r \mu_r - 1}$, $\Delta = 2h$, тогда $k_j = 1$, $l_j = \bar{v}_0$, $v_j = \bar{v}_0$, $q_j = g_j = (-1)^j$, $g = 1$, $Q_{12} = Q_{21} = 0$, $Q_{11} = Q_{22} = \tau e^{v_0 \Delta} + (2 - \tau) e^{-v_0 \Delta}$, где $\tau = 1 + \frac{1}{2}(\epsilon_r + \mu_r)$ – параметр фокусировки ($\tau \neq 0$). Поле в плоскости фокуса

$$\mathbf{E}_2(z = h + \Delta) = \int_0^\infty \frac{2A\bar{c}(\lambda)J_1(\lambda\rho)}{2 - \tau + \tau e^{2v_0(\lambda)\Delta}} d\lambda \mathbf{e}_\rho$$

фокусируется при $\tau \rightarrow 0$.

В случае, когда диполи произвольно ориентированы в пространстве [6, с. 166, 174], краевая задача (1) – (4) разрешается с использованием теорем сложения и граничных условий (12) при $m = \pm 1$. Для квадруполь и более сложных источников применяется аналогичная методика при $m \geq 2$.

1. Виноградов А.П. Электродинамика композитных материалов. М., 2001.
2. Неганов В.А., Осипов О.В. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8. № 1. С. 7.
3. Tie Jun Cui, Smith D.R., Liu R. Metamaterials. Theory, Design and Applications. Springer, 2009.
4. Гуляев Ю.В., Лагарьков А.Н., Никитов С.А. // Вестн. РАН. 2008. Т. 78. № 5. С. 438.
5. Миттра Р. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 9. С. 1051.
6. Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Аналитическое моделирование в электродинамике. Мн., 2010.
7. Oksanen M.I., Tretyakov S.A., Lindell I.V. // J. of Electromagnetic Waves and Applications. 1990. Vol. 4. № 7. P. 613.
8. Ерофеев В.Т., Малый С.В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 2. С. 11.
9. Аполлонский С.М., Ерофеев В.Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Мн., 1988.
10. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Мн., 1968.
11. Ерофеев В.Т., Кравченко В.Ф., Крючков А.Н. // Радиотехника. 1995. № 6. С. 49.
12. Ерофеев В.Т. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 2. С. 41.
13. Ерофеев В.Т., Тавакколи Д.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2007. № 2. С. 56.
14. Веселаго В.Г. // Успехи физ. наук. 1967. Т. 92. № 3. С. 517.

Поступила в редакцию 23.06.11.

Виктор Тихонович Ерофеев – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник НИЛ математических методов защиты информации Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики.