О ПОСТРОЕНИИ ДОСТИЖИМОЙ ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫМИ НЕМОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И.В. Марченко (г. Минск, Беларусь)

Рассмотрим возмущенную линейную дифференциальную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A, интегрально ограниченной кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q и старшим показателем $\lambda_n(A + Q)$.

Пусть φ — положительная и кусочно-непрерывная на $[0, +\infty[$ функция, а $\theta(k) = \operatorname{ess\,sup}\{\varphi^{-1}(t) : t \in [k, k+1[\}$. Обозначим через $\mathfrak{I}[\varphi]$ множество возмущений Q таких, что выполняется условие $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\|Q(t)\|dt < +\infty$, а через $\mathfrak{L}[\varphi]$ — множество матриц Q, для которых имеет место соотношение $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = 0$. Пусть кроме того $X(t,\tau)$ — матрица Коши системы (1) без возмущений, а величина $\Lambda(\mathfrak{M})$ определяется равенством $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$, где $\mathfrak{M} = \mathfrak{I}[\varphi]$ или $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}[\varphi]$.

Теорема 1. *Если $\varphi(t) \geq 2$ при всех $t \geq 0$ и для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{m\to+\infty} m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\theta^{1+\varepsilon}(k)\int\limits_{k-1}^{k}\varphi(\tau)d\tau = 0,$$

то справедлива формула $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m при $m \in N$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|\theta(k)\eta_k)$, $k \in N \cup \{0\}$, с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

Теорема 2. *Если $v(k) := k^{-1}\theta(k) \leq 1/2$ при всех $k \in N$ и для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^{1+\varepsilon}(k)\int\limits_{k-1}^{k}\varphi(t)dt < +\infty,$$

то справедлива формула $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m при $m \in N$ определяется рекуррентным соотношением $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\|v(k)\eta_k)$, $k \in N \cup \{0\}$, с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.