ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ СОВМЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ, РАВНОМЕРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А. В. Конюх (г. Минск, Беларусь)

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{$*$}$$

Пусть $x(t,\xi)$ ненулевое решение системы $(*)$. Как известно, характеристическим и верхним равномерным показателями этого решения называются соответственно величины

$$\lambda[x] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \|x(t,\xi)\| \quad \text{и} \quad \overline{\beta}\,[x] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t,\xi)\|}{\|x(\tau,\xi)\|},$$

которые будем рассматривать как функции начального вектора ξ. Пусть $X(t)$ фундаментальная матрица системы $(*)$, а $\sigma_1(t) \geqslant \ldots \geqslant \sigma_n(t)$ ее сингулярные числа [1, с. 236]. Величина

$$\overline{\sigma}_k(A) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t} \ln \sigma_{n-k+1}(t), \quad k = 1,\ldots,n,$$

называется k-м верхним сингулярным показателем системы $(*)$. Возникает естественная задача о совместном распределении этих величин, полное решение которой для общих систем $(*)$ неизвестно. Ее решение для двумерных диагональных систем $(*)$ дает

Теорема. *Функции $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ и пара чисел $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ тогда и только тогда являются, соответственно, равномерным верхним, характеристическим и верхними сингулярными показателями некоторой линейной диагональной системы $(*)$, когда выполняются следующие условия:*

1) $f_1(\xi) = f_1(\eta)$, если $\omega(\xi) = \omega(\eta)$, где $\omega(\xi)$ совокупность номеров ненулевых компонент вектора ξ;

2) для любого $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ найдется такой номер $i_\xi \in \omega(\xi)$, что для каждого $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ такого, что $\omega(\eta) \subset \omega(\xi)$ и $i_\xi \in \omega(\eta)$, выполняется неравенство $f_1(\xi) \leqslant f_1(\eta)$;

3) для любого $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ найдётся такой номер $i_\xi \in \omega(\xi)$, что для каждого $\eta \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ такого, что $\omega(\eta) \subset \omega(\xi)$ и $i_\xi \in \omega(\eta)$, имеет место равенство $f_2(\xi) = f_2(\eta)$;

4) для любого $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполнено неравенство $f_1(\xi) \geqslant f_2(\xi)$.

5) выполняются соотношения

$$\min_{\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} f_2(\xi) \geqslant \sigma_1 \quad \text{и} \quad \max_{\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}} f_2(\xi) = \sigma_2.$$

Литература. 1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.