АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В.И. Вальковская (г. Гомель, Беларусь)

Рассматриваются решения краевых задач для осесимметричного волнового уравнения:

$$b_0^2\frac{\partial^2\nu}{\partial t^2}+b_1^2\frac{\partial\nu}{\partial t}+b_2^2\nu-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\alpha+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}\right)\nu=f(t,r)$$

в следующих областях изменения r:
а) $0\le r<\infty$, б) $0\le r\le R$, в) $R_1\le r\le R_2$, г) $R\le r<\infty$. В случае а) граничные условия заключаются в ограниченности решения в точках $r=0$, $r=\infty$. В случае б) краевые условия заключаются в условии ограниченности решения при $r=0$ и условии взаимодействия волн через границу с окружающей средой:

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial r}+h_2\frac{\partial}{\partial t}+h_3\right)\nu\Big|_{r=R}=q(t). \tag{1}$$

В случае в) граничные условия (1) задаются при $r=R_1, r=R_2$, а в случае г) кроме условия (1) имеем условие ограниченности решения при $r=\infty$.

Предполагается, что правые части уравнений и краевых условий являются случайными функциями над некоторым вероятностным пространством. Дан теоретический анализ возникающих краевых задач, включающий в себя введение понятия обобщенного решения, доказательство теоремы существования и корректной разрешимости. При этом существенно используются пространства $W_2^S(\Omega,h)$.

Основной результат состоит в следующем:

Рассмотрим краевую задачу:

$$b_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b_1^2\frac{\partial u}{\partial t}+b_2^2u-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x), \tag{2}$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x), \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

при следующих предположениях:

$$u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega, h_2) = h_2 \left(\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega) \right),$$

$$u_1(x) \in L_2(\Omega, h_2) = h_2 \left(L_2(\Omega) \right), \tag{4}$$

$$f(t,x) \in L_2(0,T; L_2(\Omega, h_2)), \quad \Omega =]0, l[$$

Тогда обобщенное решение задачи (2), (3) существует и единственно. Отображение $\{f, u_0, u_1\} \to \left\{u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\}$ является линейным и непрерывным отображением:

$$L_2(0,T; L_2(\Omega, h_2)) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega, h_2) \times L_2(\Omega, h_2) \to$$

$$\to L_2 \left(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega, h_2) \right) \times L_2(0,T; L_2(\Omega, h_2)).$$

Можно отметить, что условие (4) легко формулируется в терминах корреляционных функций случайных функций $f(t,x), u_0(x), u_1(x)$.