

**ОПТИМАЛЬНЫЙ ДИЗАЙН НЕОГРАНИЧЕННЫХ
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ
ВКЛЮЧЕНИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ РАДИУСОВ**

С.Ф. Макарук (г. Брест, Беларусь)

Рассматривается следующая задача, возникающая при изучении экстремальных свойств композиционных материалов. Пусть L_k , $k = \overline{1, n}$, $\text{int } L_i \cap \text{int } L_j = \emptyset \forall i \neq j$ — простые замкнутые взаимно-непересекающиеся кривые.

Обозначим $D^- := \bigcup_{k=1}^n \text{ext } L_k$ многосвязную область, ограниченную объединением L кривых L_k , а $D^+ := \bigcup_{k=1}^n \text{int } L_k = \bigcup_{k=1}^n D_k$ — объединение внутренностей кривых L_k (D^+ -несвязная область). Области D^+ и D^- заполнены материалами с различной проводимостью. Пусть $g \in C^{1,\lambda}(\mathbb{C})$ — заданная функция, связанная со значениями внешнего потока (внешней силы). Задача состоит в нахождении кривой L , такой, чтобы при заданной функции g сконструированный материал имел оптимальную эффективную проводимость. Соответствующая математическая модель сводится к задаче определения (кусочно-) аналитической функции $\varphi(z)$, непрерывной вплоть до границы соответствующих областей, удовлетворяющей краевому условию

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t), t \in L,$$

такой, что меняющаяся компонента функционала эффективной проводимости σ принимает максимальное (или минимальное) значение, т. е.

$$\sigma := \frac{1}{\pi r^2} \int_L \operatorname{Re} \varphi^+(t) dy \rightarrow \max(\min), \quad t = x + iy,$$

в предположении, что площадь области D^+ фиксирована.

Если включения являются кругами $D_k := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r_k\}$, $k = \overline{1, n}$ различного радиуса, при условии, что $|a_j - a_k| \geq r_j + r_k$, $\forall k \neq j$, a_k , $k = \overline{1, n}$ — центры включений, то имеет место следующая

Лемма. Пусть функция σ достигает максимума на множестве точек $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда $\sigma(A) \in R$, и каждый круг D_k касается хотя бы одного из остальных кругов D_m , причем замыкание $\overline{D^-}$ является связным множеством на комплексной плоскости \mathbb{C} .

Получено полное геометрическое описание задачи в случае двух круговых включений различных радиусов, когда $g(z) = \bar{z}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Фундаментальных исследований Республики Беларусь.